Educadores e estudantes,

Este livro integra o Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD), executado pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) e pelo Ministério da Educação (MEC). Seu conteúdo passou por diversas etapas avaliativas, visando a garantir a vocês livros didáticos de qualidade.

As obras destinadas aos anos finais do ensino fundamental em 2024 (e que também serão utilizadas nos anos de 2025, 2026 e 2027) terão também uma versão digital. Assim, vocês poderão utilizar seus livros no formato que preferirem. As obras digitais estarão disponíveis no Portal do PNLD, em pnld.fnde.gov.br.

Conversem com a gestão da sua escola, que poderá ajudá-los a acessar todos os livros digitais do Portal. Informações e orientações de acesso aos novos materiais digitais do PNLD podem ser acessadas no link "Livro Digital", disponível em https://www.gov.br/fnde/pt-br/acesso-a-informacao/acoes-e-programas/programas/programas-do-livro.

Para colaborar com o PNLD, todos podem enviar sugestões e ideias para o e-mail livrodidatico@fnde.gov.br. O PNLD é um patrimônio de todos nós.

O FNDE deseja um ano letivo de muitas trocas e descobertas!

MATEMÁTICA E REALIDADE

Gelson **IEZZI**
Osvaldo **DOLCE**
Antonio **MACHADO**

Componente curricular: Matemática
Ensino Fundamental – Anos Finais

MANUAL DO PROFESSOR

Gelson Iezzi

Licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP)

Engenheiro metalúrgico pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (Poli-USP)

Atuou como professor da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)

Atuou como professor do Ensino Médio na rede particular de ensino

Autor de materiais didáticos de Matemática para o Ensino Fundamental e o Ensino Médio

Osvaldo Dolce

Engenheiro civil pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (Poli-USP)

Atuou como professor dos Anos Finais do Ensino Fundamental na rede pública de ensino e de cursos pré-vestibulares na rede particular de ensino

Autor de materiais didáticos de Matemática para o Ensino Fundamental e o Ensino Médio

Antonio Machado

Mestre em Estatística pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP)

Licenciado em Matemática pelo IME-USP

Atuou como professor do Ensino Superior no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP)

Atuou como professor do Ensino Médio na rede particular de ensino

Autor de materiais didáticos de Matemática para o Ensino Fundamental e o Ensino Médio

10ª edição, São Paulo, 2022

Direção executiva: Flávia Bravin
Direção de negócio: Volnei Korzenieski
Gestão editorial: Alice Ribeiro Silvestre
Gestão de planejamento: Eduardo Kruel Rodrigues
Gestão de projeto digital: Tatiany Renó
Gestão de área: Rodrigo Pessota
Coordenação de área: Pamela Hellebrekers Seravalli
Edição: Igor Nóbrega, Valéria Elvira Prete, Daniela Benites e Gabriela Barbosa da Silva (editores), Tainara Figueiredo Dias e Marcio Vieira de Almeida (assist.), Rogério Fernandes Cantelli e Nadili L. Ribeiro (digital)
Planejamento e controle de produção: Vilma Rossi, Camila Cunha, Adriana Souza e Isabela Salustriano
Revisão: Mariana Braga de Milani (ger.), Alexandra Costa da Fonseca, Ana Paula C. Malfa, Carlos Eduardo Sigrist, Flavia S. Venezio e Sueli Bossi
Arte: Claudio Faustino (ger.), Erika Tiemi Yamauchi (coord.), Patricia Mayumi Ishihara (edição de arte), FyB Arquitetura e Design (diagramação)
Iconografia e tratamento de imagens: Roberto Silva (ger.), Claudia Balista e Alessandra Pereira (pesquisa iconográfica), Emerson de Lima (tratamento de imagens)
Direitos autorais: Fernanda Carvalho (coord.), Emília Yamada, Erika Ramires e Carolyne Ribeiro (analistas adm.)
Licenciamento de conteúdos de terceiros: Erika Ramires e Tempo Composto Ltda.
Ilustrações: Alberto De Stefano, Artur Fujita, Ericson Guilherme Luciano, Estúdio Mil, Hélio Senatore, Ilustra Cartoon, Luigi Rocco, Marcelo Gagliano, Rodval Matias e Tiago Donizete Leme
Cartografia: Mouses Sagiorato e Vespúcio Cartografia
Design: Luis Vassallo (proj. gráfico, capa e Manual do Professor)
Foto de capa: Jonas Fuhrmann/EyeEm/Getty Images
Pré-impressão: Alessandro de Oliveira Queiroz, Pamela Pardini Nicastro, Débora Fernandes de Menezes, Fernanda de Oliveira e Valmir da Silva Santos

Alameda Santos, 960, 4º andar, setor 3
Cerqueira César – São Paulo – SP – CEP 01418-002
Tel.: 4003-3061
www.edocente.com.br
saceditorasaraiva@somoseducacao.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Iezzi, Gelson
Matemática e realidade : 9º ano / Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antonio Machado. -- 10. ed. -- São Paulo : Saraiva Educação S.A., 2022.
(Matemática e realidade)

Bibliografia
Suplementado pelo manual do professor
ISBN 978-65-5766-253-3 (aluno)
ISBN 978-65-5766-254-0 (professor)

1. Matemática (Ensino fundamental - Anos finais) I. Título II. Dolce, Osvaldo III. Machado, Antonio

22-2419 CDD 372.7

Angélica Ilacqua - CRB-8/7057

2022
Código da obra CL 820855
CAE 802099 (AL) / 802100 (PR)
10ª edição
1ª impressão
De acordo com a BNCC.

Impressão e acabamento

APRESENTAÇÃO

Caro professor,

Esta coleção tem o objetivo de servir de suporte para suas aulas de Matemática. Neste Manual do Professor você encontra informações que o auxiliam no trabalho com as propostas didáticas da coleção durante o ano letivo.

Acreditamos que o ensino de Matemática é fundamental para a formação de cidadãos críticos e conscientes de seu papel na sociedade, uma vez que possibilita o desenvolvimento do raciocínio lógico, da autonomia e das habilidades de interpretação, argumentação e análise em diversas situações cotidianas. Além disso, propicia aos estudantes fazer conjecturas, tomar decisões e compreender melhor a realidade na qual estão inseridos, tornando-os aptos a intervir no meio, quando necessário.

Segundo esse cenário, concebemos esta coleção, que contempla os requisitos da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) em situações contextualizadas e que consideram a interação da Matemática com outras áreas do conhecimento e com os Temas Contemporâneos Transversais (TCTs).

Além dos pressupostos metodológicos da coleção, apresentamos neste Manual orientações específicas que potencializarão o desempenho docente em sala de aula. Você encontrará sugestões de atividades complementares, artigos científicos, teses e diversas fontes de estudos. Disponibilizamos também indicações de recursos externos ao Livro do Estudante, como *sites*, simuladores, visitações, obras paradidáticas, entre outras.

O trabalho docente é composto da necessidade do constante estudo de temas que permeiam a educação no Brasil e no mundo. Em nosso país, alguns desses temas têm impactado diretamente as práticas docentes há alguns anos. É essencial que você se atualize e expanda seu campo conceitual acerca de inovações e tendências pedagógicas para acompanhar as mudanças com olhar crítico e reflexivo sobre sua profissão. Neste Manual, abordamos alguns desses temas visando suscitar reflexões, adaptações e ressignificações de práticas e saberes docentes.

Esperamos que todos esses elementos contribuam com sua prática docente e sejam o ponto de partida para a construção de um processo de ensino e aprendizagem significativo.

Os autores.

Sumário

Orientações gerais

A estrutura deste Manual do Professor

As ***Orientações gerais*** do Manual descrevem a coleção e apresentam a estrutura do Livro do Estudante, com indicações dos objetivos e funções das seções e dos boxes variados que o compõem.

Você conhecerá a relação de conteúdos abordados ao longo dos quatro volumes destinados aos Anos Finais do Ensino Fundamental, com detalhamento das habilidades exploradas.

Refletimos ainda, neste tópico, sobre os pressupostos metodológicos desta coleção, sugerimos processos avaliativos, referências complementares, sugestões de leitura e abordamos outros aspectos teóricos que embasaram a construção da obra e contribuem para sua formação continuada.

As ***Orientações específicas*** de cada volume deste Manual trazem propostas de cronograma bimestral, trimestral e semestral correlacionando-os aos conteúdos trabalhados no Livro do Estudante, de modo que você tenha uma visão geral dos temas para o planejamento do ano letivo.

Ainda nas *Orientações específicas*, são apresentados os objetivos pedagógicos e as justificativas de cada Unidade, além das competências gerais e competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental, das habilidades e dos Temas Contemporâneos Transversais contemplados na Unidade. Constam também informações gerais sobre os principais aspectos abordados ao longo dos capítulos.

Desse modo, o conjunto de informações das *Orientações específicas* deste Manual é muito útil e deve ser considerado no planejamento escolar e das aulas, junto às características particulares da turma e da comunidade escolar.

Em seguida, na seção ***Resoluções***, você encontra as resoluções completas de todas as atividades do Livro do Estudante. Caso os estudantes apresentem resoluções diferentes das propostas nessa seção, analise e valorize as estratégias utilizadas e oriente-os, se necessário.

Orientações específicas

Sugestões de cronogramas para o volume

Este volume é composto de 24 capítulos, organizados em 9 Unidades, abordando todas as habilidades da BNCC previstas para o 6º ano do Ensino Fundamental.

Para colaborar com o planejamento de seu trabalho ao utilizar este volume, apresentamos sugestões de distribuição dos conteúdos em cronogramas bimestral, trimestral e semestral. No entanto, você pode organizar os capítulos e as Unidades seguindo critérios de seleção dos temas de acordo com as necessidades da turma e levando em consideração a carga horária, a grade curricular e o projeto pedagógico da escola.

Para elaboração dessas sugestões de cronograma, foram consideradas 40 semanas letivas, conforme previsto pela Lei Federal nº 13.415 de 2017.

Sugestões de organização				Unidades	Capítulos
1º semestre	1º trimestre	1º bimestre	Semanas 1 e 2	Unidade 1: Sistemas de numeração e operações com números naturais	Capítulo 1: Números e sistemas de numeração
			Semanas 3 e 4		Capítulo 2: Adição e subtração
			Semana 5	Unidade 2: Noções iniciais de Geometria	Capítulo 3: Noções fundamentais de Geometria
			Semanas 6 e 7		Capítulo 4: Semirreta, segmento de reta e ângulo
			Semanas 8 e 9	Unidade 3: Mais operações com números naturais	Capítulo 5: Multiplicação
			Semana 10		Capítulo 6: Divisão
		2º bimestre	Semanas 11 e 12		Capítulo 7: Potenciação
			Semana 13		Capítulo 8: Introdução à Álgebra
	2º trimestre		Semanas 14 e 15	Unidade 4: Múltiplos e divisores	Capítulo 9: Divisibilidade
			Semana 16		Capítulo 10: Números primos e fatoração
			Semana 17		Capítulo 11: Múltiplos e divisores de um número natural
			Semanas 18 e 19	Unidade 5: Frações	Capítulo 12: O que é fração?
			Semana 20		Capítulo 13: Frações equivalentes e comparação de frações
2º semestre		3º bimestre	Semanas 21, 22 e 23		Capítulo 14: Operações com frações
			Semanas 24 e 25	Unidade 6: Números decimais	Capítulo 15: Fração decimal e número decimal
			Semanas 26, 27 e 28		Capítulo 16: Operações com números decimais
	3º trimestre		Semana 29	Unidade 7: Comprimento, perímetro e área	Capítulo 17: Comprimento
			Semana 30		Capítulo 18: Curvas, poligonais, polígonos e perímetro
		4º bimestre	Semana 31 e 32		Capítulo 19: Área, ampliação e redução
			Semana 33	Unidade 8: Massa, volume, capacidade, tempo e temperatura	Capítulo 20: Massa
			Semanas 34 e 35		Capítulo 21: Volume e capacidade
			Semana 36		Capítulo 22: Tempo e temperatura
			Semanas 37 e 38	Unidade 9: Noções de Estatística e Probabilidade	Capítulo 23: Noções de Estatística
			Semanas 39 e 40		Capítulo 24: Possibilidades e Probabilidade

LVII

Reprodução da página LVII, volume 6 do Manual do Professor.

Por fim, o **Manual do Professor em U** traz, página a página, as ***Orientações didáticas***, com comentários específicos sobre os conteúdos trabalhados em cada página do Livro do Estudante. Há apontamentos sobre práticas pedagógicas que você pode desenvolver com a turma; textos de aprofundamento teórico para você, professor; leituras complementares para os estudantes; diferentes estratégias para a resolução de exercícios propostos; temas para investigação; tarefas de exploração e pesquisa, entre outros. As sugestões de *sites*, leituras complementares, atividades extras e visitações que enriquecem o conteúdo explorado nas páginas são apresentadas nos boxes ***Proposta para o professor*** e ***Proposta para o estudante***.

Orientações didáticas

A origem dos números

Na BNCC

Capítulo 1

Números e sistemas de numeração

A origem dos números

Como escrevemos os números

Região do rio Indo

Orientações didáticas

Como escrevemos os números

Proposta para o professor

Proposta para o estudante

Reprodução das páginas 10 e 11, volume 6 do Manual do Professor.

No início das seções e de alguns tópicos, o boxe ***Na BNCC*** descreve como as habilidades e os Temas Contemporâneos Transversais estão distribuídos na obra. Mostramos, ainda, de que modo mobilizamos, nesta coleção, as competências gerais e as competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

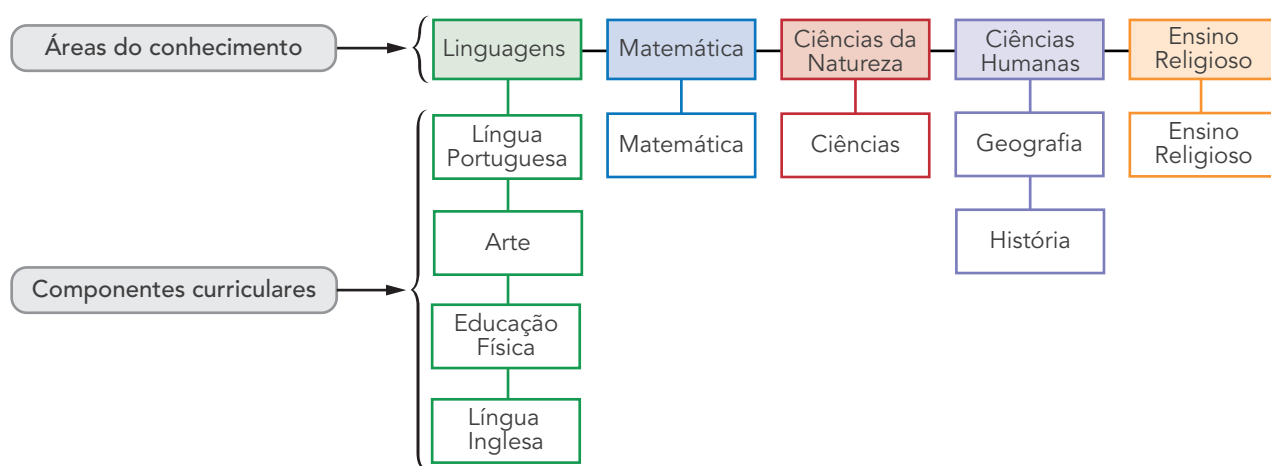
A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento orientador para a criação dos currículos escolares e das propostas na Educação Básica. Fornece elementos para que os sistemas educacionais públicos e particulares fiquem alinhados às diretrizes curriculares no que se refere a conhecimentos essenciais, competências e habilidades a serem desenvolvidos em cada etapa da Educação Básica. Esse documento indica:

- as competências gerais que os estudantes devem desenvolver em todas as áreas do conhecimento;
- as competências específicas de cada área de conhecimento e respectivos componentes curriculares;
- os conteúdos mínimos que os estudantes devem aprender, os objetos de conhecimento e as habilidades a serem desenvolvidos em cada etapa da Educação Básica;
- a progressão e o sequenciamento dos conteúdos e habilidades mínimos de cada componente curricular para todos os anos da Educação Básica.

A BNCC e o currículo

A BNCC é uma referência obrigatória, mas não é o currículo. Ela estabelece os objetivos que se espera alcançar, enquanto o currículo define como alcançar os objetivos. As redes de ensino têm autonomia para elaborar ou adequar os currículos respeitando a realidade local e os projetos pedagógicos.

Os conteúdos da BNCC para o Ensino Fundamental – Anos Iniciais (1º ao 5º ano) e Anos Finais (6º ao 9º ano) – são sugeridos com base em diferentes componentes curriculares, organizados em cinco áreas do conhecimento, conforme apresentado a seguir.

Banco de imagens/Arquivo da editora

A educação integral

A educação integral, como definida na BNCC, é uma proposta de formação ampla e visa promover o desenvolvimento cognitivo, físico, social, emocional e cultural dos estudantes. Desse modo, as diretrizes da Base estão respaldadas no compromisso com a compreensão das singularidades e diversidades dos sujeitos, pois entende-se que a juventude não é simplesmente um período entre a infância e a fase adulta, mas uma etapa do desenvolvimento humano com características biológicas, psicológicas, sociais e culturais próprias.

A proposta da BNCC é promover uma educação voltada ao desenvolvimento pleno e plural de ideias, ao convívio social republicano, à Cultura de Paz e à saúde mental dos estudantes, preparando-os para o exercício da empatia, da cooperação e da argumentação.

A convivência escolar e a Cultura de Paz

O trabalho com a BNCC pressupõe articulações entre os envolvidos no processo educativo: **estudantes**, **professores** e **equipe gestora**, de modo a garantir as condições básicas de vida e a criação de mecanismos que favoreçam a atuação e o protagonismo da comunidade escolar na construção da democracia e na garantia e efetivação de direitos e justiça social.

Nesse sentido, para assegurar a boa convivência no ambiente escolar e a Cultura de Paz, é preciso adotar uma postura na qual a educação seja um fator essencial e contribua para o combate à violência, à intimidação sistemática (*bullying*) e às ações excludentes e preconceituosas.

O texto a seguir reflete o que se espera ao propor um ambiente escolar para promoção da Cultura de Paz.

> A educação se dá para além do ambiente escolar, sendo composta pelo tempo e contexto em que as aprendizagens acontecem, em espaços formais e não formais de educação e a partir da interação de diferentes sujeitos sociais. Dessa forma, é preciso respeitar, ouvir e valorizar a diversidade de participantes que constroem esse espaço, na perspectiva de atuação conjunta dos agentes da rede de proteção na intenção de restabelecer "os valores e a segurança necessários para um ambiente educacional saudável, no qual a justiça, a igualdade, o respeito, a solidariedade e a consideração entre as pessoas prevalecem" [...].
>
> Ao se propor um ambiente escolar para a promoção da Cultura de Paz e de convivências respeitosas, possibilita-se que a escola cumpra a sua função fundamental: promover aprendizagens as quais devem estar em consonância com as demandas pessoais e coletivas, de forma a fortalecer os/as estudantes como sujeitos de direitos que pensam, criticam, refletem, agem coletivamente, para entender, compreender e experimentar o mundo, desenvolver-se [...].
>
> Assim, a educação para a Cultura da Paz propõe mudanças inspiradas em valores como justiça social, diversidade, respeito e solidariedade, aliadas às ações fundamentadas na educação, saúde, cultura, esporte, participação cidadã e melhoria da qualidade de vida no território de responsabilidade compartilhada entre educação e diversos setores da sociedade [...].
>
> [...] A Educação em Direitos Humanos deve ser permanente, continuada e global, atenta à mudança cultural, à interdisciplinaridade, com base nos eixos transversais do currículo, deve ocorrer com a colaboração de educadores/as, educandos/as e diferentes agentes da rede de proteção. Deve igualmente abarcar questões concernentes "aos campos da educação formal, à escola, aos procedimentos pedagógicos, às agendas e instrumentos que possibilitem uma ação pedagógica conscientizadora e libertadora, voltada para o respeito e valorização da diversidade, aos conceitos de sustentabilidade e de formação da cidadania ativa" [...].
>
> Assim, as orientações e ações voltadas para a promoção da cidadania e garantia dos Direitos Humanos e Cultura de Paz pautam-se na compreensão das diversas formas de violências, violações de Direitos Humanos e suas ocorrências no campo dos direitos civis, políticos, econômicos, sociais, culturais e ambientais. (DISTRITO FEDERAL, 2020, p. 11-13)

A perspectiva de enfrentamento e prevenção à violência contra as crianças e os jovens do Ensino Fundamental é um dos grandes desafios da escola, dos familiares e responsáveis e de toda sociedade.

Em março de 2019, a escola estadual Raul Brasil, em Suzano (SP), foi palco de uma das maiores tragédias em unidades de ensino do país, que resultou em mortos e feridos. Essa tragédia mostrou a necessidade de ações que promovam a Cultura de Paz no ambiente escolar. Em outubro do mesmo ano, o artista brasileiro Eduardo Kobra (1975-) criou um painel para revitalizar o pátio da escola: a representação de um abraço carinhoso entre um professor e um estudante que carrega o símbolo da paz na mochila. Foto de 2020.

Acreditamos que as instituições de educação devem reconhecer a extensão e o impacto gerado pela prática de violência entre membros da unidade escolar e desenvolver ações para que uma Cultura de Paz e aceitação da diversidade seja construída de modo participativo e democrático.

Proposta para o professor

No documento *Convivência escolar e Cultura de Paz*, promovido pelo governo do Distrito Federal, constam algumas ações que auxiliam na manutenção da Cultura de Paz no ambiente escolar. Sugerimos a leitura dessas sugestões e o compartilhamento delas com toda a equipe da escola. Isso os auxiliará no desenvolvimento de ações e na tomada de decisões que privilegiem a boa convivência no ambiente escolar.

DISTRITO FEDERAL. Secretaria de Estado de Educação. *Convivência escolar e Cultura de Paz*. Brasília, DF, 2020. p. 66-67. Disponível em: https://www.educacao.df.gov.br/wp-conteudo/uploads/2018/02/Caderno-Conviv%C3%AAncia-Escolar-e-Cultura-de-Paz.pdf. Acesso em: 9 jun. 2022.

Os impactos da pandemia para os estudantes do Ensino Fundamental

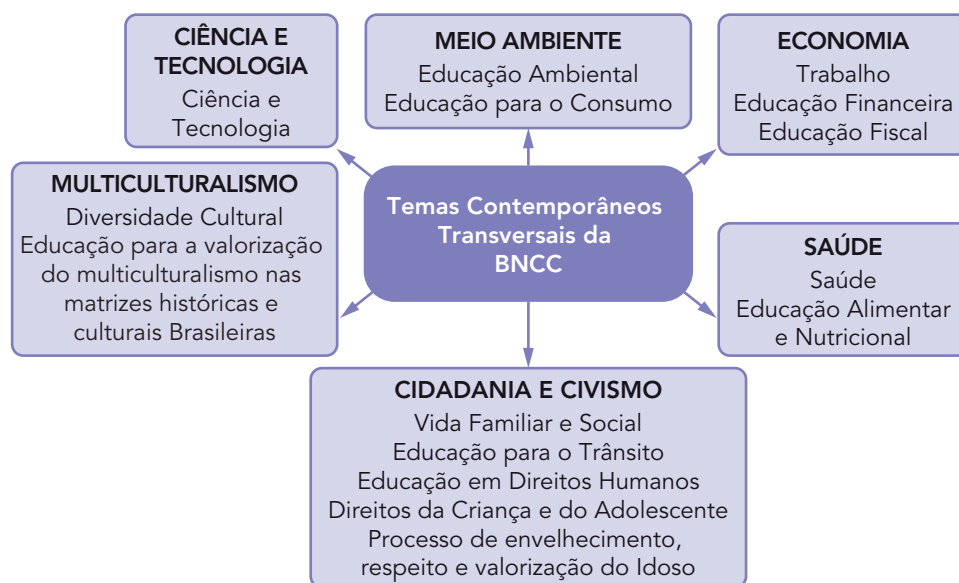
A pandemia do novo agente do coronavírus, que teve origem em 2019, na China, trouxe muitas consequências para nossa sociedade, afetando, inclusive, a área da educação, já que o modelo presencial de ensino teve de ser substituído para o modelo remoto rapidamente e com pouco planejamento, ocasionando uma mudança significativa no ambiente escolar e na maneira como as crianças e os jovens se relacionavam.

Muito se fala sobre a saúde mental dos jovens e das crianças por causa desse isolamento tão duro imposto prematuramente a todos durante mais de um ano. A suspensão das atividades presenciais evidenciou as desigualdades e seu impacto na educação, uma vez que o tipo de apoio escolar e as condições do ambiente doméstico variaram bastante em relação a questões como acesso à internet e preparo e disponibilidade das famílias, e tudo isso influenciou a aprendizagem dos estudantes.

Diante desse contexto, professores e equipe gestora estão mais atentos aos estudantes do Ensino Fundamental, porque trazem consigo experiências pessoais e acadêmicas únicas. Sugerimos o uso de avaliações diagnósticas (apresentadas em momento oportuno neste Manual) e planos de ensino personalizados, além do foco nos aspectos socioemocionais do trabalho, visando garantir a ressocialização desses estudantes.

Os Temas Contemporâneos Transversais

Na perspectiva da BNCC e desta coleção, diversos aspectos podem ser contemplados a partir dos Temas Contemporâneos Transversais (TCTs) que exploram, sobretudo, questões da realidade social brasileira e do mundo, integrando-as às demais áreas do conhecimento.

Assim, o desenvolvimento dos TCTs possibilita a integração entre os diferentes componentes curriculares e faz conexão com situações vivenciadas pelos estudantes em suas realidades, o que contribui para trazer contexto e contemporaneidade aos objetos de conhecimento descritos na BNCC.

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: propostas de Práticas de Implementação. Brasília, DF: MEC, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 2 jun. 2022.

As competências gerais da BNCC

A BNCC foi estruturada para promover desenvolvimento amplo do sujeito, apoiada nos princípios da educação integral e de acordo com a compreensão das singularidades e diversidades dos sujeitos em diferentes dimensões formativas.

> A Educação Básica deve visar à formação e ao desenvolvimento humano global, o que implica compreender a complexidade e a não linearidade desse desenvolvimento, rompendo com visões reducionistas que privilegiam ou a dimensão intelectual (cognitiva) ou a dimensão afetiva. (BRASIL, 2017, p. 14)

No texto introdutório da BNCC, a proposta formativa da educação integral é feita para todas as etapas da Educação Básica e tem como alicerce o trabalho com as **10 competências gerais** para a Educação Básica.

De acordo com a BNCC, competência é a mobilização e a articulação de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolução de situações cotidianas relacionadas a meio ambiente, princípios éticos, cidadania, mundo do trabalho, entre outras questões de urgência social.

> Por meio da indicação clara do que os alunos devem “saber” (considerando a constituição de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e, sobretudo, do que devem “saber fazer” (considerando a mobilização desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho), a explicitação das competências oferece referências para o fortalecimento de ações que assegurem as aprendizagens essenciais definidas na BNCC. (BRASIL, 2017, p. 13)

A seguir, estão listadas as dez competências gerais definidas pela BNCC.

Competências gerais da Educação Básica

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários. (BRASIL, 2017, p. 9-10)

As competências gerais da BNCC nesta coleção

Nesta coleção, utilizaremos a sigla **CG** para nos referir às competências gerais da BNCC para a Educação Básica. Desse modo, a primeira competência será nomeada como **CG01**, a segunda como **CG02**, e assim sucessivamente.

A **CG01** faz referência ao **conhecimento** e visa à valorização e ao uso dos conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para os estudantes entenderem e explicarem a realidade em que vivem.

Essa competência é mobilizada na coleção nos momentos em que se propõe ao estudante que reconheça e coloque em prática conhecimentos historicamente construídos, como nas seções que apresentam um apanhado histórico acerca do desenvolvimento de conceitos matemáticos e da aplicabilidade deles na atualidade e na resolução de problemas.

Enfatizamos que essa competência destaca a importância do processo de construção de conhecimento e a estreita relação com a estruturação

Faber14/Shutterstock

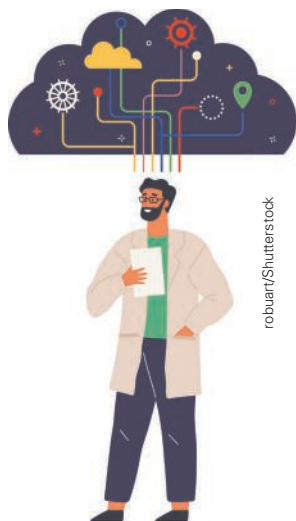
de uma sociedade justa, democrática e inclusiva. Sempre que trabalhar essa competência em sala de aula, ressalte-a como fundamental para o desenvolvimento da autonomia e da capacidade de entender o mundo, explicá-lo e intervir na realidade.

robuart/Shutterstock

A **CG02** se relaciona ao **pensamento científico**, que deve ser exercitado. Ao mobilizar essa competência, os estudantes desenvolvem a curiosidade intelectual recorrendo à abordagem própria das ciências, incluindo investigação, reflexão, análise crítica, imaginação e criatividade para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas, além de criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nas diferentes áreas do conhecimento. O desenvolvimento dessa competência também dá aos estudantes a oportunidade de analisar um problema e propor soluções alternativas.

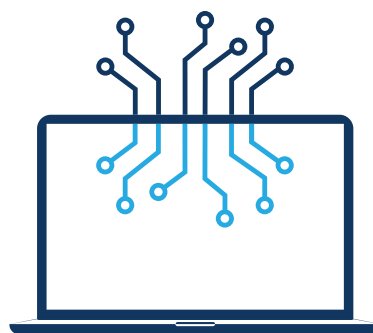
A **CG03** é a de **repertório cultural**, que mobiliza a valorização das diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e a participação em práticas diversificadas da produção artístico-cultural. Essa competência instiga os estudantes a explorarem o conhecimento com base em valores expressos por meio da arte e da cultura, discute o subjetivo e unifica as diferentes sociedades, o que faz com que não percam sua identidade cultural na sala de aula.

Visando essa competência, nos quatro volumes da coleção há oportunidades para que os estudantes conheçam obras de arte, acervos de museus, peças de esculturas, gêneros e movimentos musicais, entre outras situações que contribuem para a formação integral deles.

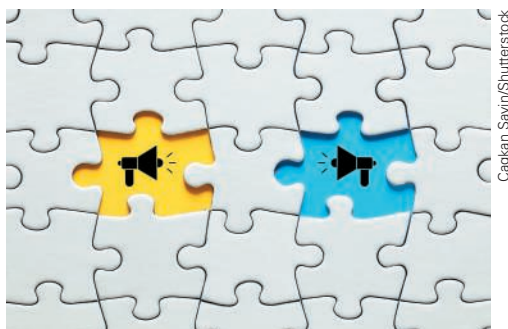
Lightspring/Shutterstock

A **comunicação** é explorada ao mobilizar a **CG04**, que aponta para a necessidade de utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, além de conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para expressão e partilhamento de informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e também para produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.

GoodStudio/Shutterstock

Tratando das competências éticas que devem estar presentes no uso das diversas **tecnologias de informação**, a **CG05** propõe a compreensão, utilização e criação de tecnologias digitais de informação e comunicação de modo crítico, significativo, reflexivo e ético nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para os estudantes se comunicarem, acessarem e disseminarem informações, produzirem conhecimentos, resolverem problemas e exercerem protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva, compreendendo como participar desses processos de maneira significativa e reflexiva.

Shahin Aliyev/Shutterstock

A abordagem da dimensão que favorece a educação integral para fazer escolhas e seguir as aspirações, ora no campo dos estudos, ora no campo do trabalho, **trabalho e projeto de vida** é contemplada na BNCC por meio da **CG06**, que mostra que os estudantes devem valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhes possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao próprio projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.

MarcoVector/Shutterstock

Com o objetivo de capacitar os estudantes a desenvolver argumentos com base em dados, fatos e informações confiáveis, diferenciando-os de *fake news* e saber avaliar e compreender se os argumentos que assimilam em contraponto são análogos, a BNCC dedica exclusivamente a **CG07**, da **argumentação**. Deve ser desenvolvida nos estudantes a habilidade de argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis para que formulem, negociem e defendam ideias, pontos de vista e tomem decisões que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

Cagkan Sayin/Shutterstock

Segundo o conhecimento e a apreciação dos **cuidados com a saúde mental e o autocuidado**, lidando com questões diversas e sua relação com as emoções e as mudanças no corpo, que são características dessa fase do crescimento, a **CG08** propõe que essas facetas devem ser trabalhadas com os estudantes. Por meio dessa competência, buscamos levar cada estudante a se conhecer, apreciar a si mesmo e cuidar da saúde física e emocional, compreender-se na diversidade humana e reconhecer as próprias emoções e as dos outros com autocrítica e capacidade para lidar com elas, tratando da conexão do "eu".

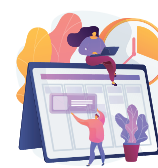
grmarc/Shutterstock

A **CG09** trata de **empatia e cooperação**, abrangendo valores imprescindíveis para viver com o outro. Os estudantes devem exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação entre os pares e com professores, a comunidade e a sociedade, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

Segundo Mattos[1], essa competência se divide em duas dimensões: empatia e diálogo. O desenvolvimento da empatia pressupõe "a valorização e o reconhecimento de grupos e contextos culturalmente diversos. Esta subdimensão também pressupõe o combate ao preconceito e engajamento de outros com a diversidade na valorização da alteridade. Ou seja, compreensão da emoção dos outros e do impacto de seu comportamento nos demais". Já a dimensão do diálogo compreende-se pela interação com o outro "na construção, negociação e respeito a regras de convivência (ética), na promoção de entendimento e melhoria do ambiente", bem como na "capacidade de se trabalhar em equipe, tomar decisões e agir em projetos de forma colaborativa", visando também à resolução de conflitos.

A coleção enfatiza em diversos momentos o trabalho com essa competência, sobretudo nas aberturas de Unidade e nas diferentes propostas de atividades. Um exemplo é ao propor a análise de textos que exploram questões relacionadas à valorização social e à inclusão de pessoas com deficiência em contextos esportivos, o que serve como instrumento de inclusão social, valorização e reconhecimento de atletas com necessidades especiais no esporte, sendo esses princípios necessários à construção da cidadania e ao convívio social. A competência também é mobilizada quando propomos aos estudantes o trabalho em duplas para favorecer o desenvolvimento do diálogo, a cooperação e a empatia.

Viktoria Kurpas/Shutterstock

E, por fim, a **CG10** é a chave para que os estudantes sejam incentivados a agir de modo responsável e cidadão, ou seja, atuar pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Visual Generation/Shutterstock

1 MATTOS, Pablo. *Empatia e cooperação*: competência geral 9 da BNCC. [Rio de Janeiro]: Futura, 2020. (Curso *on-line*). Disponível em: https://www.futura.org.br/cursos/empatia-e-cooperacao-competencia-geral-9-da-bncc. Acesso em: 3 jun. 2022.

As competências gerais e as culturas juvenis

Para melhor entender o conceito de culturas juvenis, é preciso assimilar que as maneiras de ser jovem são inúmeras e dependem de gênero, raça, cor, etnia, classe social, território, religião, geração, entre outros; do mesmo modo, há diferentes maneiras de ser estudante de acordo com as mesmas variáveis.

Diante desse contexto, cabe à escola proporcionar aos jovens a possibilidade de experimentar diferentes modos de vivenciar a juventude considerando, para tanto, as chamadas **culturas juvenis**. Entendemos como culturas juvenis as articulações que os jovens estabelecem com base na produção cultural de massa, no estilo de vida e nas práticas sociais em grupo ou em rede e que se expandem pelo espaço urbano.

Quando a escola dá oportunidade aos jovens de dizerem o que pensam e sentem e os envolve em atividades nas quais se sintam valorizados, é aberto um canal que proporciona novos modos de aprendizagem, sem cobranças prévias de qualificações, capacitismo ou juízos de valor.

Um exemplo é a exploração de atividades culturais envolvendo *rap*, grafite ou o próprio *funk*, que muitas vezes são subvalorizadas por fazerem parte da cultura dos jovens das camadas populares que já são marginalizados por sua origem socioeconômica. Ao permitir que os jovens se expressem por meio dessas manifestações artísticas, se assim desejarem, a escola oportuniza a expressão de sentimentos, que sejam reconhecidos, ganhem visibilidade e se autoafirmem. Oportunidades como essas e outras são abordadas no decorrer desta coleção e mobilizam também a **CG03**, ao explorar o repertório cultural e destacar o protagonismo dos produtores de diferentes artes.

Outro aspecto a ser considerado no trabalho com as culturas juvenis é o uso de tecnologias da informação, comunicação e entretenimento.

> O grande desafio de educadores, pesquisadores, é compreender de que forma as tecnologias da informação e comunicação podem funcionar como meio de auxílio para o desenvolvimento do ensino.
>
> Sabendo que os jovens são produtores de informação e não simplesmente passivos consumidores, é preciso criar estratégias de uso das redes sociais que servem como interatividade e aprendizagem de grupos, pois os relacionamentos e as trocas de experiência acontecem através destas redes.
>
> [...]
>
> O processo de aprendizado com a utilização das tecnologias da informação e comunicação é de colaboração, onde é possível o que temos de conhecimento contribuir com o aprendizado do outro.
>
> Aprender colaborativamente significa desenvolver habilidades como: analisar, refletir, selecionar, atribuir significado, devolver a informação de acordo com a sua interpretação e contribuir numa discussão para o aprendizado do outro.
>
> Essa característica de sociabilidade deve ser aproveitada para a estimulação dos novos conhecimentos. Diante das tecnologias da informação e comunicação é possível descortinar-se um mundo ainda mais ávido em busca da construção de conhecimentos que não somente serão escolares, mas também, outros tipos de conhecimento.
>
> Os meios de comunicação e informação são imprescindíveis para ocorrer à interação e se articulam para contribuir cada vez mais com as possibilidades de acesso, convergência de meios tecnológicos e de mídias, que permitem o acesso ao conhecimento de qualquer lugar e parte do mundo modificando substancialmente as várias formas de pensar, comunicar e educar. (MILANI, 2014, p. 123-124)

A escola não pode ignorar o espaço que a comunicação e as tecnologias ocupam na vida dos jovens na atualidade. No entanto, é preciso orientá-los no uso desses novos conteúdos e oferecer diferentes tipos de letramento para que eles possam elaborar com a escola e além da escola. Utilizamos aqui o conceito de letramento como prática social e leitura do mundo, mais do que como alfabetização, conforme proposto por Angela Kleiman (1995)[2].

Na coleção, oportunizamos aos estudantes o uso das tecnologias como meio de disseminação e produção de conhecimento, auxiliando-os a desenvolver boas práticas e consciência crítica em relação a elas, mobilizando com mais ênfase a **CG05**.

A Matemática na BNCC

A área de Matemática na BNCC para Ensino Fundamental abrange cinco Unidades temáticas: *Números*, *Álgebra*, *Geometria*, *Grandezas e medidas* e *Probabilidade e Estatística*.

Em cada Unidade temática há **objetos de conhecimento** (conteúdos, conceitos e processos) e **habilidades** (aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos estudantes) relacionados. Ao explorar os objetos de conhecimento e as habilidades, propicia-se o desenvolvimento das competências específicas da área.

2 KLEIMAN, A. Modelos de letramento e as práticas de alfabetização na escola. *In*: KLEIMAN, A. (org.). *Os significados do letramento*: uma nova perspectiva sobre a prática social da escrita. Campinas: Mercado de Letras, 1995.

As competências específicas de Matemática da BNCC para o Ensino Fundamental

A aprendizagem de Matemática na Educação Básica vai além da quantificação de fenômenos determinísticos ou aleatórios e das técnicas de cálculos com fenômenos e grandezas. Nessa perspectiva, em articulação com as dez competências gerais, o ensino da Matemática deve garantir aos estudantes o desenvolvimento das competências específicas para o Ensino Fundamental apresentadas a seguir.

Competências específicas de Matemática para o Ensino Fundamental

1. Reconhecer que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho.
2. Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
3. Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
4. Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
5. Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados.
6. Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
7. Desenvolver e/ou discutir projetos que abordem, sobretudo, questões de urgência social, com base em princípios éticos, democráticos, sustentáveis e solidários, valorizando a diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.
8. Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas para responder a questionamentos e na busca de soluções para problemas, de modo a identificar aspectos consensuais ou não na discussão de uma determinada questão, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles. (BRASIL, 2017, p. 267)

As competências específicas de Matemática da BNCC nesta coleção

Esta coleção privilegia o desenvolvimento da autonomia dos estudantes ao propor que façam observações empíricas do mundo real e as representem de diversas maneiras, seja por meio de tabelas, figuras, esquemas, entre outras, e as associem a uma atividade matemática, fazendo induções e conjecturas, mobilizando assim as oito competências específicas da Matemática.

Utilizaremos a sigla **CEMAT** para nos referir às competências específicas de Matemática da BNCC para o Ensino Fundamental. Desse modo, a primeira competência está nomeada como **CEMAT01**, a segunda como **CEMAT02**, e assim sucessivamente.

A **CEMAT01** aponta que os estudantes reconheçam que a Matemática é uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e é uma ciência viva, que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e alicerçar descobertas e construções, inclusive com impactos no mundo do trabalho. Assim, essa competência é explorada na coleção de modo que os estudantes são levados a compreender a construção dos conceitos matemáticos do início aos dias atuais.

Os estudantes devem, como parte da vida em sociedade, ser incentivados no ambiente escolar a desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo, o que está relacionado ao que propõe a **CEMAT02**. No trabalho com tal competência, ao manipular objetos, eles desenvolvem conceitos abstratos para relacionar os objetos a conhecimentos matemáticos.

Já de acordo com a **CEMAT03**, embora a área de Matemática esteja dividida em 5 Unidades temáticas, não significa que devam ser exploradas isoladamente, mas articuladas sempre que houver a possibilidade. Nesta coleção, essa competência é explorada nas relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática e de outras áreas do conhecimento. Espera-se que os estudantes desenvolvam segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos e desenvolvam autoestima e perspectiva na busca de soluções.

O contexto social em que cada estudante está inserido contribui para que ele entenda o próprio papel na sociedade e saiba se comunicar matematicamente em situações do cotidiano, com uma postura crítica. A **CEMAT04** propõe aos estudantes a elaboração de observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo que venham a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.

As tecnologias digitais são fortes aliadas no ensino da Matemática no mundo contemporâneo, uma vez que contribuem para o desenvolvimento de habilidades como comparação, verificação, seleção e criação de concepções. Esta coleção propõe explorar a **CEMAT05** na utilização de processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas do conhecimento, validando estratégias e resultados.

A **CEMAT06** indica que os estudantes devem enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo imaginários, não diretamente relacionados com o aspecto prático-utilitário; devem ainda expressar suas respostas e sintetizar conclusões utilizando diferentes registros e linguagens: gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito. Mobilizando essa competência no decorrer das Unidades desta coleção, é importante que esse trabalho seja bem orientado para que de fato haja um elo entre os componentes curriculares envolvidos e se apresente aos estudantes a função de cada texto utilizado nas aulas de Matemática.

A **CEMAT07** traz a importância de desenvolver projetos que permitam aos estudantes relacionar saberes matemáticos com outras áreas de conhecimento, além de lhes proporcionar aprendizado por meio de pesquisas de outras culturas, valorizando a diversidade de opiniões. Nesta coleção, propomos o trabalho com situações e atividades que abordam questões de urgência social, voltadas ao desenvolvimento da democracia e atreladas à valorização da diversidade de opiniões de indivíduos e de grupos sociais, sem preconceitos de qualquer natureza.

A interação entre os estudantes é abordada em diversas oportunidades nesta coleção, mobilizando com maior ênfase a **CEMAT08**, que tem o objetivo de proporcionar a interação entre pares de maneira cooperativa. Enfatizamos que, ao explorar a competência, seja incentivado o respeito ao modo de pensar dos colegas.

Ao longo deste Manual, você compreenderá como explorar as competências gerais e as competências específicas de Matemática da BNCC. No tópico a seguir, apresentamos alguns exemplos de trabalho com as competências em boxes e seções do Livro do Estudante. Outras situações também são esclarecidas, sobretudo nas *Orientações didáticas*, em relação ao trabalho com cada página do Livro do Estudante dos volumes da coleção.

Habilidades de Matemática da BNCC para os Anos Finais do Ensino Fundamental

As habilidades são as aptidões a serem desenvolvidas ao longo de cada etapa de ensino e que contribuem para o desenvolvimento das competências gerais e das competências específicas da BNCC. Esse documento indica que, para o desenvolvimento das habilidades de Matemática previstas para os Anos Finais do Ensino Fundamental, é necessário considerar as experiências prévias dos estudantes, propiciar situações de vivências do cotidiano e de contextos significativos, utilizar diferentes recursos didáticos, favorecer o desenvolvimento do raciocínio e da argumentação matemática, entre outros.

Destacamos a seguir alguns trechos da BNCC que indicam como desenvolver as habilidades de Matemática nos Anos Finais do Ensino Fundamental.

> É imprescindível levar em conta as experiências e os conhecimentos matemáticos já vivenciados pelos alunos, criando situações nas quais possam fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles e desenvolvendo ideias mais complexas. Essas situações precisam articular múltiplos aspectos dos diferentes conteúdos, visando ao desenvolvimento das ideias fundamentais da Matemática, como equivalência, ordem, proporcionalidade, variação e interdependência.
>
> [...] Nessa fase, precisa ser destacada a importância da comunicação em linguagem matemática com o uso da linguagem simbólica, da representação e da argumentação.
>
> [...]
>
> Cumpre também considerar que, para a aprendizagem de certo conceito ou procedimento, é fundamental haver um contexto significativo para os alunos, não necessariamente do cotidiano, mas também de outras áreas do conhecimento e da própria história da Matemática.
>
> [...]
>
> Além disso, nessa fase final do Ensino Fundamental, é importante iniciar os alunos, gradativamente, na compreensão, análise e avaliação da argumentação matemática. Isso envolve a leitura de textos matemáticos e o desenvolvimento do senso crítico em relação à argumentação neles utilizada. (BRASIL, 2017, p. 298-299)

As habilidades de Matemática da BNCC na coleção

Os quadros a seguir indicam cada Unidade temática e os respectivos objetos de conhecimento e habilidades previstos para cada volume dos Anos Finais do Ensino Fundamental, de acordo com a BNCC (BRASIL, 2017, p. 301-319).

Nesta coleção, as cinco unidades temáticas da BNCC são apresentadas de modo correlacionado, favorecendo o desenvolvimento das habilidades a serem exploradas ao longo dos Anos Finais do Ensino Fundamental.

Em cada volume, uma mesma habilidade pode ser trabalhada em diversos capítulos para que seja desenvolvida em sua totalidade. No boxe *Na BNCC*, junto às *Orientações didáticas* neste Manual, indicamos as habilidades trabalhadas com maior ênfase nos capítulos, tópicos e seções do Livro do Estudante, entendendo também que outras habilidades podem ser favorecidas simultaneamente de modo transversal.

6º ano do Ensino Fundamental

Unidade temática *Números*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Sistema de numeração decimal: características, leitura, escrita e comparação de números naturais e de números racionais representados na forma decimal	**(EF06MA01)** Comparar, ordenar, ler e escrever números naturais e números racionais cuja representação decimal é finita, fazendo uso da reta numérica. **(EF06MA02)** Reconhecer o sistema de numeração decimal, como o que prevaleceu no mundo ocidental, e destacar semelhanças e diferenças com outros sistemas, de modo a sistematizar suas principais características (base, valor posicional e função do zero), utilizando, inclusive, a composição e decomposição de números naturais e números racionais em sua representação decimal.
Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais Divisão euclidiana	**(EF06MA03)** Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos com e sem uso de calculadora.
Fluxograma para determinar a paridade de um número natural Múltiplos e divisores de um número natural Números primos e compostos	**(EF06MA04)** Construir algoritmo em linguagem natural e representá-lo por fluxograma que indique a resolução de um problema simples (por exemplo, se um número natural qualquer é par). **(EF06MA05)** Classificar números naturais em primos e compostos, estabelecer relações entre números, expressas pelos termos "é múltiplo de", "é divisor de", "é fator de", e estabelecer, por meio de investigações, critérios de divisibilidade por 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 100 e 1000. **(EF06MA06)** Resolver e elaborar problemas que envolvam as ideias de múltiplo e de divisor.
Frações: significados (parte/todo, quociente), equivalência, comparação, adição e subtração; cálculo da fração de um número natural; adição e subtração de frações	**(EF06MA07)** Compreender, comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros e resultado de divisão, identificando frações equivalentes. **(EF06MA08)** Reconhecer que os números racionais positivos podem ser expressos nas formas fracionária e decimal, estabelecer relações entre essas representações, passando de uma representação para outra, e relacioná-los a pontos na reta numérica. **(EF06MA09)** Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo da fração de uma quantidade e cujo resultado seja um número natural, com e sem uso de calculadora. **(EF06MA10)** Resolver e elaborar problemas que envolvam adição ou subtração com números racionais positivos na representação fracionária.
Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números racionais	**(EF06MA11)** Resolver e elaborar problemas com números racionais positivos na representação decimal, envolvendo as quatro operações fundamentais e a potenciação, por meio de estratégias diversas, utilizando estimativas e arredondamentos para verificar a razoabilidade de respostas, com e sem uso de calculadora.
Aproximação de números para múltiplos de potências de 10	**(EF06MA12)** Fazer estimativas de quantidades e aproximar números para múltiplos da potência de 10 mais próxima.
Cálculo de porcentagens por meio de estratégias diversas, sem fazer uso da "regra de três"	**(EF06MA13)** Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com base na ideia de proporcionalidade, sem fazer uso da "regra de três", utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, em contextos de educação financeira, entre outros.

Unidade temática *Álgebra*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Propriedades da igualdade	**(EF06MA14)** Reconhecer que a relação de igualdade matemática não se altera ao adicionar, subtrair, multiplicar ou dividir os seus dois membros por um mesmo número e utilizar essa noção para determinar valores desconhecidos na resolução de problemas.
Problemas que tratam da partição de um todo em duas partes desiguais, envolvendo razões entre as partes e entre uma das partes e o todo	**(EF06MA15)** Resolver e elaborar problemas que envolvam a partilha de uma quantidade em duas partes desiguais, envolvendo relações aditivas e multiplicativas, bem como a razão entre as partes e entre uma das partes e o todo.

Unidade temática *Geometria*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Plano cartesiano: associação dos vértices de um polígono a pares ordenados	**(EF06MA16)** Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono.
Prismas e pirâmides: planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas)	**(EF06MA17)** Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial.
Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados	**(EF06MA18)** Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros. **(EF06MA19)** Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos. **(EF06MA20)** Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles.
Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas	**(EF06MA21)** Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais.
Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e *softwares*	**(EF06MA22)** Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou *softwares* para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros. **(EF06MA23)** Construir algoritmo para resolver situações passo a passo (como na construção de dobraduras ou na indicação de deslocamento de um objeto no plano segundo pontos de referência e distâncias fornecidas etc.).

Unidade temática *Grandezas e medidas*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Problemas sobre medidas envolvendo grandezas como comprimento, massa, tempo, temperatura, área, capacidade e volume	**(EF06MA24)** Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.
Ângulos: noção, usos e medida	**(EF06MA25)** Reconhecer a abertura do ângulo como grandeza associada às figuras geométricas. **(EF06MA26)** Resolver problemas que envolvam a noção de ângulo em diferentes contextos e em situações reais, como ângulo de visão. **(EF06MA27)** Determinar medidas da abertura de ângulos por meio de transferidor e/ou tecnologias digitais.
Plantas baixas e vistas aéreas	**(EF06MA28)** Interpretar, descrever e desenhar plantas baixas simples de residências e vistas aéreas.
Perímetro de um quadrado como grandeza proporcional à medida do lado	**(EF06MA29)** Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área.

Unidade temática *Probabilidade e Estatística*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Cálculo de probabilidade como a razão entre o número de resultados favoráveis e o total de resultados possíveis em um espaço amostral equiprovável Cálculo de probabilidade por meio de muitas repetições de um experimento (frequências de ocorrências e probabilidade frequentista)	**(EF06MA30)** Calcular a probabilidade de um evento aleatório, expressando-a por número racional (forma fracionária, decimal e percentual) e comparar esse número com a probabilidade obtida por meio de experimentos sucessivos.
Leitura e interpretação de tabelas e gráficos (de colunas ou barras simples ou múltiplas) referentes a variáveis categóricas e variáveis numéricas	**(EF06MA31)** Identificar as variáveis e suas frequências e os elementos constitutivos (título, eixos, legendas, fontes e datas) em diferentes tipos de gráfico. **(EF06MA32)** Interpretar e resolver situações que envolvam dados de pesquisas sobre contextos ambientais, sustentabilidade, trânsito, consumo responsável, entre outros, apresentadas pela mídia em tabelas e em diferentes tipos de gráficos e redigir textos escritos com o objetivo de sintetizar conclusões.
Coleta de dados, organização e registro Construção de diferentes tipos de gráficos para representá-los e interpretação das informações	**(EF06MA33)** Planejar e coletar dados de pesquisa referente a práticas sociais escolhidas pelos alunos e fazer uso de planilhas eletrônicas para registro, representação e interpretação das informações, em tabelas, vários tipos de gráficos e texto.
Diferentes tipos de representação de informações: gráficos e fluxogramas	**(EF06MA34)** Interpretar e desenvolver fluxogramas simples, identificando as relações entre os objetos representados (por exemplo, posição de cidades considerando as estradas que as unem, hierarquia dos funcionários de uma empresa etc.).

7º ano do Ensino Fundamental

Unidade temática *Números*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Múltiplos e divisores de um número natural	**(EF07MA01)** Resolver e elaborar problemas com números naturais, envolvendo as noções de divisor e de múltiplo, podendo incluir máximo divisor comum ou mínimo múltiplo comum, por meio de estratégias diversas, sem a aplicação de algoritmos.
Cálculo de porcentagens e de acréscimos e decréscimos simples	**(EF07MA02)** Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, como os que lidam com acréscimos e decréscimos simples, utilizando estratégias pessoais, cálculo mental e calculadora, no contexto de educação financeira, entre outros.
Números inteiros: usos, história, ordenação, associação com pontos da reta numérica e operações	**(EF07MA03)** Comparar e ordenar números inteiros em diferentes contextos, incluindo o histórico, associá-los a pontos da reta numérica e utilizá-los em situações que envolvam adição e subtração. **(EF07MA04)** Resolver e elaborar problemas que envolvam operações com números inteiros.
Fração e seus significados: como parte de inteiros, resultado da divisão, razão e operador	**(EF07MA05)** Resolver um mesmo problema utilizando diferentes algoritmos. **(EF07MA06)** Reconhecer que as resoluções de um grupo de problemas que têm a mesma estrutura podem ser obtidas utilizando os mesmos procedimentos. **(EF07MA07)** Representar por meio de um fluxograma os passos utilizados para resolver um grupo de problemas. **(EF07MA08)** Comparar e ordenar frações associadas às ideias de partes de inteiros, resultado da divisão, razão e operador. **(EF07MA09)** Utilizar, na resolução de problemas, a associação entre razão e fração, como a fração 2/3 para expressar a razão de duas partes de uma grandeza para três partes da mesma ou três partes de outra grandeza.
Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações	**(EF07MA10)** Comparar e ordenar números racionais em diferentes contextos e associá-los a pontos da reta numérica. **(EF07MA11)** Compreender e utilizar a multiplicação e a divisão de números racionais, a relação entre elas e suas propriedades operatórias. **(EF07MA12)** Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais.

Unidade temática *Álgebra*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Linguagem algébrica: variável e incógnita	**(EF07MA13)** Compreender a ideia de variável, representada por letra ou símbolo, para expressar relação entre duas grandezas, diferenciando-a da ideia de incógnita. **(EF07MA14)** Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura. **(EF07MA15)** Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas.
Equivalência de expressões algébricas: identificação da regularidade de uma sequência numérica	**(EF07MA16)** Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes.
Problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais	**(EF07MA17)** Resolver e elaborar problemas que envolvam variação de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa entre duas grandezas, utilizando sentença algébrica para expressar a relação entre elas.
Equações polinomiais do 1º grau	**(EF07MA18)** Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.

Unidade temática *Geometria*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem	**(EF07MA19)** Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro. **(EF07MA20)** Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.
Simetrias de translação, rotação e reflexão	**(EF07MA21)** Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.
A circunferência como lugar geométrico	**(EF07MA22)** Construir circunferências utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes.
Relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal	**(EF07MA23)** Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de *softwares* de geometria dinâmica.
Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos	**(EF07MA24)** Construir triângulos usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°. **(EF07MA25)** Reconhecer a rigidez geométrica dos triângulos e suas aplicações, como na construção de estruturas arquitetônicas (telhados, estruturas metálicas e outras) ou nas artes plásticas. **(EF07MA26)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um triângulo qualquer, conhecidas as medidas dos três lados.
Polígonos regulares: quadrado e triângulo equilátero	**(EF07MA27)** Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos. **(EF07MA28)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular (como quadrado e triângulo equilátero), conhecida a medida de seu lado.

Unidade temática *Grandezas e medidas*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Problemas envolvendo medições	**(EF07MA29)** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de grandezas inseridos em contextos oriundos de situações cotidianas ou de outras áreas do conhecimento, reconhecendo que toda medida empírica é aproximada.
Cálculo de volume de blocos retangulares, utilizando unidades de medida convencionais mais usuais	**(EF07MA30)** Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida do volume de blocos retangulares, envolvendo as unidades usuais (metro cúbico, decímetro cúbico e centímetro cúbico).
Equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros	**(EF07MA31)** Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros. **(EF07MA32)** Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando a equivalência entre áreas.
Medida do comprimento da circunferência	**(EF07MA33)** Estabelecer o número π como a razão entre a medida de uma circunferência e seu diâmetro, para compreender e resolver problemas, inclusive os de natureza histórica.

Unidade temática *Probabilidade e Estatística*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Experimentos aleatórios: espaço amostral e estimativa de probabilidade por meio de frequência de ocorrências	**(EF07MA34)** Planejar e realizar experimentos aleatórios ou simulações que envolvem cálculo de probabilidades ou estimativas por meio de frequência de ocorrências.
Estatística: média e amplitude de um conjunto de dados	**(EF07MA35)** Compreender, em contextos significativos, o significado de média estatística como indicador da tendência de uma pesquisa, calcular seu valor e relacioná-lo, intuitivamente, com a amplitude do conjunto de dados.
Pesquisa amostral e pesquisa censitária Planejamento de pesquisa, coleta e organização dos dados, construção de tabelas e gráficos e interpretação das informações	**(EF07MA36)** Planejar e realizar pesquisa envolvendo tema da realidade social, identificando a necessidade de ser censitária ou de usar amostra, e interpretar os dados para comunicá-los por meio de relatório escrito, tabelas e gráficos, com o apoio de planilhas eletrônicas.
Gráficos de setores: interpretação, pertinência e construção para representar conjunto de dados	**(EF07MA37)** Interpretar e analisar dados apresentados em gráfico de setores divulgados pela mídia e compreender quando é possível ou conveniente sua utilização.

8º ano do Ensino Fundamental

Unidade temática *Números*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Notação científica	**(EF08MA01)** Efetuar cálculos com potências de expoentes inteiros e aplicar esse conhecimento na representação de números em notação científica.
Potenciação e radiciação	**(EF08MA02)** Resolver e elaborar problemas usando a relação entre potenciação e radiciação para representar uma raiz como potência de expoente fracionário.
O princípio multiplicativo da contagem	**(EF08MA03)** Resolver e elaborar problemas de contagem cuja resolução envolva a aplicação do princípio multiplicativo.
Porcentagens	**(EF08MA04)** Resolver e elaborar problemas envolvendo cálculo de porcentagens, incluindo o uso de tecnologias digitais.
Dízimas periódicas: fração geratriz	**(EF08MA05)** Reconhecer e utilizar procedimentos para a obtenção de uma fração geratriz para uma dízima periódica.

Unidade temática *Álgebra*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Valor numérico de expressões algébricas	**(EF08MA06)** Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.
Associação de uma equação linear de 1º grau a uma reta no plano cartesiano	**(EF08MA07)** Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.

Unidade temática *Álgebra*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica e representação no plano cartesiano	**(EF08MA08)** Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso.
Equação polinomial de 2º grau do tipo $ax^2 = b$	**(EF08MA09)** Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.
Sequências recursivas e não recursivas	**(EF08MA10)** Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes. **(EF08MA11)** Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.
Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais	**(EF08MA12)** Identificar a natureza da variação de duas grandezas diretamente, inversamente proporcionais ou não proporcionais, expressando a relação existente por meio de sentença algébrica e representá-la no plano cartesiano. **(EF08MA13)** Resolver e elaborar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas.

Unidade temática *Geometria*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Congruência de triângulos e demonstrações de propriedades de quadriláteros	**(EF08MA14)** Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos.
Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares	**(EF08MA15)** Construir, utilizando instrumentos de desenho ou *softwares* de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares. **(EF08MA16)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um hexágono regular de qualquer área, a partir da medida do ângulo central e da utilização de esquadros e compasso.
Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos: construção e problemas	**(EF08MA17)** Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.
Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação	**(EF08MA18)** Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de *softwares* de geometria dinâmica.

Unidade temática *Grandezas e medidas*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Área de figuras planas Área do círculo e comprimento de sua circunferência	**(EF08MA19)** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos.
Volume de bloco retangular Medidas de capacidade	**(EF08MA20)** Reconhecer a relação entre um litro e um decímetro cúbico e a relação entre litro e metro cúbico, para resolver problemas de cálculo de capacidade de recipientes. **(EF08MA21)** Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo do volume de recipiente cujo formato é o de um bloco retangular.

Unidade temática *Probabilidade e Estatística*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Princípio multiplicativo da contagem Soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral	**(EF08MA22)** Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.

Unidade temática *Probabilidade e Estatística*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Gráficos de barras, colunas, linhas ou setores e seus elementos constitutivos e adequação para determinado conjunto de dados	**(EF08MA23)** Avaliar a adequação de diferentes tipos de gráficos para representar um conjunto de dados de uma pesquisa.
Organização dos dados de uma variável contínua em classes	**(EF08MA24)** Classificar as frequências de uma variável contínua de uma pesquisa em classes, de modo que resumam os dados de maneira adequada para a tomada de decisões.
Medidas de tendência central e de dispersão	**(EF08MA25)** Obter os valores de medidas de tendência central de uma pesquisa estatística (média, moda e mediana) com a compreensão de seus significados e relacioná-los com a dispersão de dados, indicada pela amplitude.
Pesquisas censitária ou amostral Planejamento e execução de pesquisa amostral	**(EF08MA26)** Selecionar razões, de diferentes naturezas (física, ética ou econômica), que justificam a realização de pesquisas amostrais e não censitárias, e reconhecer que a seleção da amostra pode ser feita de diferentes maneiras (amostra casual simples, sistemática e estratificada). **(EF08MA27)** Planejar e executar pesquisa amostral, selecionando uma técnica de amostragem adequada, e escrever relatório que contenha os gráficos apropriados para representar os conjuntos de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central, a amplitude e as conclusões.

9º ano do Ensino Fundamental

Unidade temática *Números*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Necessidade dos números reais para medir qualquer segmento de reta Números irracionais: reconhecimento e localização de alguns na reta numérica	**(EF09MA01)** Reconhecer que, uma vez fixada uma unidade de comprimento, existem segmentos de reta cujo comprimento não é expresso por número racional (como as medidas de diagonais de um polígono e alturas de um triângulo, quando se toma a medida de cada lado como unidade). **(EF09MA02)** Reconhecer um número irracional como um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica, e estimar a localização de alguns deles na reta numérica.
Potências com expoentes negativos e fracionários	**(EF09MA03)** Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários.
Números reais: notação científica e problemas	**(EF09MA04)** Resolver e elaborar problemas com números reais, inclusive em notação científica, envolvendo diferentes operações.
Porcentagens: problemas que envolvem cálculo de percentuais sucessivos	**(EF09MA05)** Resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagens, com a ideia de aplicação de percentuais sucessivos e a determinação das taxas percentuais, preferencialmente com o uso de tecnologias digitais, no contexto da educação financeira.

Unidade temática *Álgebra*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Funções: representações numérica, algébrica e gráfica	**(EF09MA06)** Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.
Razão entre grandezas de espécies diferentes	**(EF09MA07)** Resolver problemas que envolvam a razão entre duas grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica.
Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais	**(EF09MA08)** Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.
Expressões algébricas: fatoração e produtos notáveis Resolução de equações polinomiais do 2º grau por meio de fatorações	**(EF09MA09)** Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau.

Unidade temática *Geometria*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Demonstrações de relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal	**(EF09MA10)** Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.
Relações entre arcos e ângulos na circunferência de um círculo	**(EF09MA11)** Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de *softwares* de geometria dinâmica.
Semelhança de triângulos	**(EF09MA12)** Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.
Relações métricas no triângulo retângulo Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais	**(EF09MA13)** Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos. **(EF09MA14)** Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.
Polígonos regulares	**(EF09MA15)** Descrever, por escrito e por meio de um fluxograma, um algoritmo para a construção de um polígono regular cuja medida do lado é conhecida, utilizando régua e compasso, como também *softwares*.
Distância entre pontos no plano cartesiano	**(EF09MA16)** Determinar o ponto médio de um segmento de reta e a distância entre dois pontos quaisquer, dadas as coordenadas desses pontos no plano cartesiano, sem o uso de fórmulas, e utilizar esse conhecimento para calcular, por exemplo, medidas de perímetros e áreas de figuras planas construídas no plano.
Vistas ortogonais de figuras espaciais	**(EF09MA17)** Reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.

Unidade temática *Grandezas e medidas*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Unidades de medida para medir distâncias muito grandes e muito pequenas Unidades de medida utilizadas na informática	**(EF09MA18)** Reconhecer e empregar unidades usadas para expressar medidas muito grandes ou muito pequenas, tais como distância entre planetas e sistemas solares, tamanho de vírus ou de células, capacidade de armazenamento de computadores, entre outros.
Volume de prismas e cilindros	**(EF09MA19)** Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas.

Unidade temática *Probabilidade e Estatística*	
Objetos de conhecimento	**Habilidades**
Análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes	**(EF09MA20)** Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.
Análise de gráficos divulgados pela mídia: elementos que podem induzir a erros de leitura ou de interpretação	**(EF09MA21)** Analisar e identificar, em gráficos divulgados pela mídia, os elementos que podem induzir, às vezes propositadamente, erros de leitura, como escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão de informações importantes (fontes e datas), entre outros.
Leitura, interpretação e representação de dados de pesquisa expressos em tabelas de dupla entrada, gráficos de colunas simples e agrupadas, gráficos de barras e de setores e gráficos pictóricos	**(EF09MA22)** Escolher e construir o gráfico mais adequado (colunas, setores, linhas), com ou sem uso de planilhas eletrônicas, para apresentar um determinado conjunto de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central.
Planejamento e execução de pesquisa amostral e apresentação de relatório	**(EF09MA23)** Planejar e executar pesquisa amostral envolvendo tema da realidade social e comunicar os resultados por meio de relatório contendo avaliação de medidas de tendência central e da amplitude, tabelas e gráficos adequados, construídos com o apoio de planilhas eletrônicas.

A estrutura do Livro do Estudante

A coleção é composta de quatro volumes para os Anos Finais do Ensino Fundamental, organizados em Unidades e capítulos. Os conteúdos são introduzidos tomando como base situações-problema ou textos contextualizados, seguidos pela formalização dos conceitos e boxes e/ou seções que complementam a teoria apresentada e têm como objetivos:

- contribuir para a inserção dos estudantes na sociedade em que vivem, proporcionando a eles conhecimentos básicos de teoria e prática de matemática;
- incentivar a curiosidade, o interesse e a criatividade dos estudantes para que explorem novas ideias e descubram caminhos para a aplicação dos conceitos adquiridos, auxiliando-os na resolução de problemas;
- desenvolver o senso crítico por meio da leitura e da interpretação matemática de fatos e dados publicados;
- desenvolver hábitos de estudo, rigor, precisão, ordem, clareza, concisão, iniciativa, raciocínio, perseverança, responsabilidade, cooperação, crítica, discussão e uso correto da linguagem;
- desenvolver a capacidade de classificar, seriar, relacionar, reunir, representar, analisar, sintetizar, conceituar, deduzir, provar e julgar;
- possibilitar o reconhecimento da inter-relação entre os vários campos da Matemática e desta com outras áreas do conhecimento;
- desenvolver o uso do pensamento e a capacidade de elaborar hipóteses, descobrir soluções, estabelecer relações e tirar conclusões;
- proporcionar atividades lúdicas e desafiadoras, incentivando o gosto pela Matemática e o desenvolvimento do raciocínio.

Cada Unidade do Livro do Estudante apresenta-se subdividida em capítulos distribuídos visando facilitar a aprendizagem. Se considerar oportuno, você pode inverter a ordem dos conteúdos, desde que a reorganização tenha sequência lógica e considere o nível de complexidade de cada um deles. Você pode, por exemplo, solicitar aos estudantes que façam uma atividade proposta em um boxe ou uma seção para avaliação de conhecimentos prévios ou como incentivo para estudos posteriores.

O texto da obra foi elaborado em linguagem acessível, que "conversa" com o leitor, em interação contínua, para possibilitar aos estudantes que compreendam as definições e as propriedades centrais da Matemática em nível elementar. Os conceitos são explorados com base em exemplos concretos, eventualmente por meio do boxe *Participe*, que os encoraja a pensar, investigar, explorar, conjecturar e aprender. Procuramos deduzir as propriedades em linguagem coloquial e enunciá-las posteriormente, levando os estudantes, gradativamente, à compreensão e ao uso do formalismo matemático.

As atividades e os problemas propostos visam conduzi-los à compreensão de conceitos e propriedades, sem, contudo, negligenciar o desenvolvimento das técnicas de cálculo. Estas, à medida que são abordadas, são aplicadas na resolução de problemas.

Diversos estudos na área da Educação Matemática sugerem que um caminho para a aprendizagem é propor diferentes atividades que estimulem os estudantes a buscar estratégias pessoais de resolução. Pensando nisso, esta coleção apresenta diferentes situações-problema com o objetivo de incentivar os estudantes a resolvê-las usando estratégias pessoais.

Esta coleção também pode ser utilizada para incentivar o gosto pela leitura. Para isso, os estudantes devem explorar as informações das seções *Na História* e *Na Mídia*, que promovem a leitura individual (silenciosa) ou coletiva (em voz alta) na sala de aula. A competência leitora deve ser desenvolvida em todos os componentes curriculares e particularmente na Matemática, pois é suporte essencial para a compreensão de textos e enunciados de problemas, além de propiciar a ampliação do repertório oral para comunicação e argumentação.

Indicamos, a seguir, como as Unidades do Livro do Estudante estão organizadas e detalhamos as funções das seções e dos boxes que compõem os volumes desta coleção.

Abertura de Unidade

A abertura da Unidade ocupa uma dupla de páginas com uma ou mais imagens e textos relacionados aos conteúdos que serão abordados e, na maioria das vezes, remete aos TCTs e aos temas interdisciplinares que despertam a curiosidade dos estudantes, são assuntos para debates e têm atividades que contribuem para a formação integral deles por promover o desenvolvimento das habilidades de interpretação e argumentação. O tema da abertura e os conteúdos matemáticos da Unidade são relacionados por atividades contextualizadas na própria abertura e em outros momentos ao longo dos capítulos correspondentes.

Apresentamos também, na abertura, os objetivos pedagógicos de cada Unidade. São descrições concisas que mostram o que os estudantes devem saber e compreender ao longo do trabalho com os conteúdos dos capítulos.

Nas *Orientações didáticas* deste Manual há indicações de como conduzir o trabalho com as aberturas; no entanto, os temas propostos possibilitam diversas abordagens envolvendo professores de outros componentes curriculares, a família e a comunidade escolar. Explore as aberturas de acordo com as características da turma.

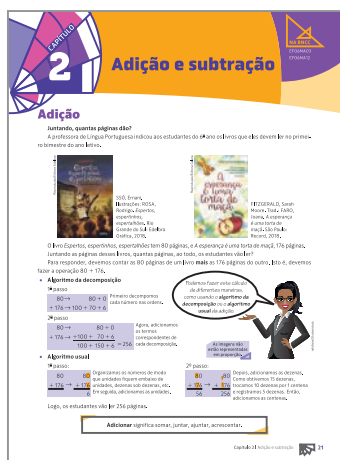
Na abertura reproduzida a seguir, por exemplo, é possível mobilizar com mais ênfase a **CG01**, a **CG07** e a **CEMAT07** propondo aos estudantes que analisem imagens e um texto que promove positivamente a imagem da mulher. Possibilita ainda o desenvolvimento do TCT *Educação em Direitos*

Humanos ao incentivar uma discussão acerca da necessidade de participação plena e efetiva das mulheres e igualdade de oportunidades em todos os níveis, bem como o TCT *Saúde*, ao explorar a importância da prática de atividades físicas. O contexto da abertura da Unidade facilita o trabalho interdisciplinar com os componentes curriculares **Educação Física**, **Ciências** e **História**.

Reprodução da abertura da Unidade 3, páginas 92 e 93, volume 7 do Livro do Estudante.

Capítulos

Cada capítulo contém a fundamentação teórica necessária para a compreensão de conceitos e propriedades e foi organizado de modo a facilitar a identificação das informações apresentadas. Os capítulos são introduzidos por situações-problema e textos que visam motivar o interesse dos estudantes pelo conteúdo que será exposto. Dois ou mais capítulos estão reunidos em uma mesma Unidade, divididos em assuntos seguidos por blocos de atividades.

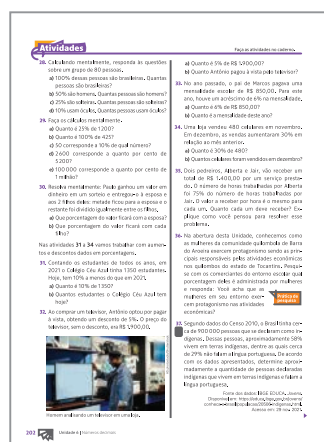
Por apresentarem contextos distintos, os capítulos exploram diversas competências e habilidades da BNCC e, muitas vezes, ampliam o trabalho ao envolver propostas interdisciplinares e TCTs, conforme exemplificamos a seguir. Próximo ao título de cada capítulo constam as principais habilidades mobilizadas e que se relacionam aos objetivos pedagógicos listados na abertura da respectiva Unidade.

Reprodução da página 21 do capítulo 2, volume 6 do Livro do Estudante.

O trabalho nesse capítulo favorece o desenvolvimento da habilidade **EF06MA03** ao propor a resolução e elaboração de problemas envolvendo a adição em diferentes contextos e também a habilidade **EF06MA12** ao proporcionar oportunidades para o cálculo de estimativas e aproximações. A **CG09** e a **CG10** são mobilizadas com maior ênfase com a proposta de leitura de livros paradidáticos que abordam temas complexos, como ética nas relações sociais, *bullying*, respeito ao outro e valorização da diversidade de indivíduos. Ao explorar esses temas também é possível desenvolver os TCTs *Saúde* e *Vida Familiar e Social*.

O contexto do problema apresentado no início desse capítulo convida à interdisciplinaridade com o componente curricular **Língua Portuguesa** e possibilita a abordagem de questões relacionadas a ética nas relações sociais, resolução de conflitos, saúde emocional dos estudantes, respeito ao outro, acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos.

Atividades

As atividades são variadas e apresentadas sequencialmente em cada capítulo, em gradação de dificuldade, para que os estudantes apliquem os conteúdos estudados. Ao longo das seções também são propostas atividades mais desafiadoras, bem como para resolução e elaboração de problemas.

Muitas atividades são contextualizadas e exploram situações do cotidiano dos estudantes. Elas os incentivam a utilizar diferentes estratégias de resolução, registro e materiais como instrumentos de medição, instrumentos de construção geométrica, calculadora e outros materiais manipulativos que os auxiliam a compreender conceitos e adquirir novos conhecimentos. Acompanhe um exemplo a seguir.

Reprodução da seção *Atividades*, página 202, volume 6 do Livro do Estudante.

Nesse exemplo da seção, os estudantes podem resolver problemas usando porcentagens e cálculo mental. Sugerimos que formem duplas para que debatam as situações apresentadas mobilizando com maior ênfase a **CG09** e a **CEMAT08**, além de explorar questões relacionadas ao consumo responsável, que favorece o desenvolvimento da habilidade de argumentação. Há ainda uma atividade que visa exercitar a metodologia de prática de pesquisa (cuja função será explicada oportunamente neste Manual).

Sugerimos encaminhar algumas atividades como tarefa de casa para que os estudantes possam revisar os conteúdos trabalhados em sala de aula e se habituem com uma rotina sistemática de estudos. Ao estudarem sozinhos, eles têm a oportunidade de praticar leitura e interpretação de textos, além de desenvolver habilidades de uso de estratégias pessoais nas resoluções.

As respostas de todas as atividades estão no final do Livro do Estudante, neste exemplar do professor. Elas também aparecem próximas aos exercícios, em outra cor. Além disso, ressaltamos que na seção *Resoluções* deste Manual são encontradas as resoluções completas e comentadas das atividades propostas.

Participe

Esse boxe traz propostas de atividades que incentivam os estudantes a agir de modo reflexivo privilegiando exploração, levantamento de hipóteses, identificação de padrões, elaboração de conjecturas, resoluções por meio de estratégias pessoais e compartilhamento de ideias. Podem ainda fazer uma breve retomada de conceitos apresentados em anos anteriores ou, ainda, reforçar conceitos que estão sendo aprendidos e estabelecer conexões com o conteúdo que está por vir.

Encoraje os estudantes a encontrar soluções para as questões apresentadas criando estratégias próprias de resolução, peça que justifiquem suas escolhas, discutam com os colegas as estratégias adotadas e validem as respostas desenvolvendo, assim, autonomia no processo de aprendizagem dos conteúdos matemáticos que serão formalizados na sequência.

Participe

Faça as atividades no caderno.

I. De acordo com a imagem, a balança está em equilíbrio.

a) Quantas ● são necessárias para equilibrar um ■?

b) Qual número o ■ representa na igualdade: 3 × ■ = 12?

c) Na igualdade 3 × ■ = 12, qual é o primeiro membro? E o segundo?

d) Dividindo por 3 ambos os membros da igualdade 3 × ■ = 12, qual igualdade obtemos?

e) O que acontece com a balança se dobramos a quantidade de objetos em ambos os pratos?

II. Agora, analise a balança representada a seguir, que também está em equilíbrio.

a) Quantas ● são necessárias para equilibrar um ▲?

b) Qual número o ▲ representa na igualdade 2 × ▲ + 1 = 5?

c) Escreva a igualdade obtida ao subtrair 1 de ambos os membros da igualdade 2 × ▲ + 1 = 5.

d) Escreva a igualdade obtida ao dividir por 2 ambos os membros da igualdade obtida no item anterior.

e) Qual número o ◆ representa na igualdade ◆ ÷ 5 = 3?

f) Qual igualdade obtemos ao multiplicar por 5 ambos os membros de ◆ ÷ 5 = 3?

Reprodução de boxe *Participe*, página 110, volume 6 do Livro do Estudante.

Na História

Esta seção explora as descobertas científicas e históricas dos conteúdos matemáticos ligados a assuntos tratados na Unidade. É útil especialmente para levar os estudantes a perceber que o conhecimento vem sendo construído ao longo dos séculos, por diferentes pessoas, contínua e colaborativamente, portanto, não é algo acabado, pode ser reformulado de acordo com as novas descobertas, o que exige das pessoas envolvidas nos estudos muita dedicação e empenho. É uma boa oportunidade para perceberem que a Matemática é uma descoberta humana fruto de diferentes pessoas, épocas e civilizações, mobilizando, sobretudo, a **CEMAT01**.

Nesse exemplo da seção, mobilizam-se com mais ênfase a **CG01** e a **CEMAT01** ao mostrar a Matemática como fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos.

Na História

A primeira crise no desenvolvimento da Matemática

Há cerca de 4 mil anos, os escribas da Mesopotâmia (região hoje ocupada por Iraque, Kuwait e parte da Síria) construíram tabelas de raízes quadradas. Usualmente, quando a resolução de um problema de Geometria ou Álgebra dependia da extração de uma raiz quadrada, os dados eram ajeitados de modo que essa raiz fosse dada por uma aproximação que estivesse em uma dessas tabelas. Isso significava tomar como resposta uma representação finita no sistema de numeração de base 60, que eles adotavam. Por exemplo, na base 60, a fração decimal que indicamos por 1,5 seria expressa por 1;30 (usando nossos algarismos e o ponto e vírgula como separatriz), porque 30 é a metade de 60, assim como 5 é a metade de 10. Por exemplo, o número $\sqrt{2}$ (notação moderna) era frequentemente aproximado pela fração sexagesimal 1;25 $\left(\text{que corresponde a } 1 + \frac{25}{60} \simeq 1{,}417\right)$, mas há um escrito babilônico em que aparece uma aproximação melhor: 1;24,51,10 $\left(1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \simeq 1{,}41421219\right)$.

Os babilônios, que só cultivavam a Matemática prática, possivelmente acreditavam que a representação sexagesimal de $\sqrt{2}$ era finita, bastando, para concluí-la, levar os cálculos um pouco mais à frente, mas não viam necessidade disso. Ou seja, acreditavam, talvez, que toda raiz quadrada de um inteiro positivo era um número racional.

Já com os gregos, que priorizavam sobretudo a teoria alicerçada no rigor lógico, a história foi outra. A Escola Pitagórica (corrente da filosofia grega fundada por Pitágoras) desenvolveu a Matemática por muito tempo considerando a seguinte premissa: os números inteiros positivos, e as razões entre eles, bastavam para quantificar tudo. No fundo, o universo numérico dos gregos se limitava, modernamente falando, ao conjunto dos números racionais positivos.

Acontece que, um dia, um membro da própria Escola Pitagórica descobriu, essencialmente, o seguinte (adaptando sua descoberta à linguagem matemática moderna): não há nenhum número racional cujo quadrado seja igual a 2. Geometricamente, esse resultado equivale ao seguinte: na figura a seguir, em que os lados do quadrado correspondem à unidade de medida e, portanto, o ponto I representa o número 1, não há nenhum número racional representado pelo ponto P, com $\overline{OP} \cong \overline{OK}$, contrariamente ao que suas teorias sustentavam. Ou seja, havia pelo menos uma lacuna no campo dos números racionais, entre 1,4 e 1,5: o número que hoje simbolizamos por $\sqrt{2}$. A descoberta de que haviam desenvolvido parte de sua matemática sobre um pressuposto equivocado abalou a viga mestra da filosofia pitagórica: "Tudo tem um número" (inteiro positivo).

Como os gregos não conseguiam conceber os números irracionais, substituíram os números reais (racionais e irracionais), em sua álgebra, por segmentos de reta – na figura anterior, $\overline{OP}$ representa $\sqrt{2}$, e $\overline{OI}$ representa 1. Na obra *Os Elementos*, de Euclides, por exemplo, as equações derivam de problemas geométricos, e suas raízes são segmentos de reta.

Após a invenção das frações decimais (difundidas no Ocidente a partir do século XVI), ficou mais fácil reconhecer os números irracionais: eles se caracterizam por ter uma representação decimal infinita **não periódica.**

22 Unidade 1 | Números e operações com raízes

Reprodução de seção *Na História*, página 22, volume 9 do Livro do Estudante.

Educação financeira

Se a principal função da escola é preparar para a vida, é essencial ensinar alguns princípios do planejamento financeiro, e a Matemática é a ciência por excelência para esse propósito. Nesta seção, procuramos apresentar situações próximas da realidade dos estudantes. Embora trabalhemos alguns conceitos de macroeconomia, a Educação financeira aqui não foi pensada como uma seção teórica, e sim um espaço para que cada estudante reflita sobre a realidade e utilize a Matemática como instrumento para melhorar a qualidade de vida – sua e da família. As atividades sobre consumo, por exemplo, têm o objetivo de ajudar os estudantes a analisar esse assunto com viés mais crítico. No fechamento da seção, é proposto um trabalho em grupo para auxiliá-los a compartilhar informações e estratégias, desenvolver senso crítico e espírito comunitário. Além de respeitar os pré-requisitos necessários para as atividades propostas nesta seção, a distribuição dos temas ao longo dos volumes da coleção considerou a maturidade dos estudantes.

Na seção mostrada como exemplo, além do trabalho com a temática, a proposta envolve o desenvolvimento de práticas de pesquisa, uso da internet e produção de um *podcast* com dicas de como poupar, favorecendo o desenvolvimento do TCT *Educação Financeira*, da comunicação e o uso de tecnologias variadas.

Educação financeira

Prática de pesquisa

Cuidado com dinheiro fácil

As *fake news* são notícias e informações falsas que são compartilhadas como se fossem reais e verdadeiras. As pessoas propagam informações falsas para aplicar golpes, muitas vezes com intuito de ganhar algum dinheiro. No mercado financeiro não é diferente, por isso desconfie de notícias apelativas, com senso de urgência ou bombásticas. Cuidado com promessas impossíveis, que garantem altos retornos com investimentos de baixos valores, em um curto tempo.

Poupar e investir são coisas parecidas, mas diferentes. Para auxiliar no entendimento do significado e das maneiras de poupar, precisamos pesquisar sobre esse tema. O tipo de pesquisa que faremos é a **pesquisa bibliográfica**, que é uma maneira de pesquisar na qual buscamos informações sobre o tema a ser investigado em textos, livros, artigos, *sites*, etc., que chamamos de **fontes de informação.** Essas devem ser confiáveis, ou seja, buscadas em instituições de estudo reconhecidas, como centros de pesquisa e universidades, podendo assim ser comparadas, observando a data de publicação, para se ter informações atuais sobre o assunto e não sermos enganados por *fake news*.

Para realizar a pesquisa bibliográfica, você deve seguir uma metodologia de pesquisa composta das etapas a seguir.

Introdução: texto curto com a definição do tema, a questão de pesquisa e o objetivo.

Desenvolvimento: busca das informações que se relacionam com o tema da pesquisa em fontes confiáveis (é importante anotar essas fontes consultadas), seguida da leitura e interpretação dos textos encontrados, destacando as ideias principais neles contidas e registrando, com as próprias palavras, as informações obtidas.

Conclusão: elaboração de uma conclusão argumentada e justificada e apresentação dos resultados da pesquisa por meio de texto, cartaz, infográfico, vídeo, história em quadrinhos, *podcast*, etc.

Referências bibliográficas: lista das fontes consultadas e utilizadas na pesquisa no seguinte padrão:

Para livro: [SOBRENOME DO AUTOR], [Nome do autor]. [*Título do livro*]. [edição, se houver]. [Cidade]: [Editora], [ano da publicação]. ([Nome da coleção, se houver]).

Para artigo de revista: [SOBRENOME DO AUTOR], [nome do autor]. [Título do artigo]. [*Nome da revista*], [Cidade]: [Editora], [ano da publicação]. [volume], [número da publicação], [número da(s) página(s)].

Para artigo de jornal: [SOBRENOME DO AUTOR], [Nome do autor]. [Título do artigo]. [*Nome do jornal*], [número da(s) página(s)], [dia mês e ano da publicação].

Para texto da internet (em geral): [SOBRENOME DO AUTOR], [Nome do autor]. [Título do artigo]. [*Nome do* site], [dia, mês e ano da publicação, se houver]. Disponível em: [URL]. Acesso em: [dia, mês e ano].

Não são raras propagandas que envolvem valores em dinheiro. Mas a promessa de grandes ganhos com pouco risco ou esforço pode ser, muitas vezes, *fake news*.

Para poupar, não tem idade! Algumas crianças ainda utilizam cofrinhos como meio de poupar mesada ou valores que ganham em alguma data especial.

As imagens não estão representadas em proporção.

84 Unidade 3 | Equações

Faça as atividades no caderno.

Agora, inicie seu projeto de pesquisa bibliográfica.

Tema da pesquisa: Modos de poupar.

Como este tema é amplo, propomos que você busque informações sobre as seguintes **questões específicas** para orientar a construção de uma pesquisa completa.

I. O que é poupar e quais as vantagens de se fazer isso?

II. Como funciona a poupança? Qual é o rendimento e o risco desse tipo de investimento?

III. Quais são os principais títulos públicos oferecidos (conhecidos também como Tesouro Direto), quais suas rentabilidades e qual é o risco desse tipo de aplicação financeira?

IV. Como podemos investir em imóveis por meio de fundos de imobiliários? Qual é a rentabilidade e o risco desses fundos?

V. O que significa uma ação de uma empresa? Como investir em ações? Qual é a rentabilidade e o risco desse tipo de investimento?

Lembre-se de que realizar um trabalho de pesquisa bibliográfica não significa "copiar e colar" textos da internet. Você deve compreender as ideias principais, interpretar e reescrever o texto e/ou responder às questões, utilizando as próprias palavras, sem perder o sentido original do texto.

Apresentação dos resultados

Agora que você já conhece alguns modos de poupar, reúna-se com 3 colegas para fazer o que se pede nas seguintes questões:

1. Debatam as respostas obtidas no item **I.**
2. Façam um comparativo de todos os tipos de investimento que vocês pesquisaram, com especial atenção às rentabilidades.
3. Já estudamos que o aumento percentual é dado pela expressão:

$$\text{aumento percentual} = \left(\frac{(\text{valor novo}) - (\text{valor antigo})}{(\text{valor antigo})} \times 100\right)\%$$

Calculem o aumento percentual das duas frases que apareceram no início desta seção e comparem com as rentabilidades da resposta da questão anterior.

4. Agora, avaliando os retornos prometidos pelos anúncios do início da seção, como vocês argumentariam que eles podem ser enganosos a uma pessoa que tem intenção de fazer esses "investimentos"?

Agora que você realizou a pesquisa e discutiu alguns conceitos sobre o tema com os colegas, ainda em grupo, apresentem os resultados da pesquisa por meio de um *podcast*.

De maneira aprofundada, o *podcast* deverá conter a orientação sobre o que é e como poupar. Por isso, vocês devem utilizar todas as informações que obtiveram com as questões específicas e, também, com as questões que foram discutidas no grupo. Ao final do *podcast*, não deixem de citar as fontes de informação consultadas, que são as referências bibliográficas.

Acompanhe algumas dicas para criar o *podcast*.

- Defina os participantes que irão falar na gravação.
- Escreva um roteiro para o *podcast*.
- Faça ensaios.
- Faça a gravação em um ambiente sem ruídos.
- Edite o *podcast*. Depois da edição, ele estará pronto para ser publicado.
- Alguns *softwares* gratuitos permitem a gravação e edição de *podcasts* (Audacity e Spreaker, por exemplo).

Capítulo 6 | Equações do 2º grau 85

Reprodução de seção *Educação financeira*, páginas 84 e 85, volume 9 do Livro do Estudante.

Prática de pesquisa

O ícone *Prática de pesquisa* indica momentos de trabalho com pesquisas relacionadas às atividades, a fatos históricos (como na seção *Na História*) e a situações da vida real (como na seção *Educação financeira*), por meio de atividades individuais ou coletivas elaboradas com esse fim. A questão da pesquisa estruturada é enfatizada na BNCC, sobretudo nos Anos Finais do Ensino Fundamental. Por meio das práticas de pesquisa, procuramos oportunizar situações em que os estudantes vivenciem as etapas de investigação e coleta, organização e tratamento de dados, até chegar a um resultado que deva ser representado e comunicado ao público de interesse. Neste Manual, dedicamos um tópico exclusivo para falar sobre práticas de pesquisa na seção *Abordagens teórico-metodológicas em Matemática*.

Na mídia

Por meio de textos de notícias e artigos publicados em jornais, revistas ou *sites*, nesta seção os estudantes são convidados a analisar criticamente a realidade comparando os dados e as situações apresentadas. Ela leva à ampliação dos conhecimentos gerais e possibilita a discussão sobre os TCTs de diversas áreas (educação, saúde, meio ambiente, entre outros). Portanto, constitui boa oportunidade para promover a construção da cidadania e o olhar crítico sobre a sociedade.

Na mídia

Faça as atividades no caderno.

Menino de 12 anos descobre regra de divisibilidade por 7

O jovem nigeriano Chika Ofili, de 12 anos, descobriu [em 2019] uma fórmula matemática que facilita o estudo da divisão. A descoberta permite mostrar rapidamente se um número [...] é divisível por sete. Para isso, basta pegar o último dígito de qualquer número, multiplicar por 5 e adicionar à parte restante, assim terá um novo número obtido. Se esse novo número é divisível por 7, o número original é divisível por 7.

[...]

A professora Miss Mary Ellis, também chefe do departamento de matemática da *Westminster Under School*, escola de Londres, em que Chika estuda, disse em um artigo no jornal educacional que o aluno descobriu a fórmula após um trabalho passado para as férias.

No trabalho, Chika teve que estudar o livro *First steps for problem solvers*, em tradução livre, Primeiros passos para resolvedores de problemas, publicado pela United Kingdom Mathematics Trust (UKMT). No livro, são apresentados testes de divisibilidade usados para solucionar rapidamente números divisíveis por 2, 3, 4, 5, 6, 8 e 9, mas o algarismo 7 não havia teste simples, assim Chika desenvolveu sua ideia.

[...]

Graças à descoberta, Chika Ofili ganhou o prêmio *TruLittle Hero Awards*, na cerimônia organizada pela Cause4Children Limited, que tem o objetivo de reconhecer, comemorar e recompensar realizações notáveis de crianças e jovens notáveis com menos de 17 anos no Reino Unido.

[...]

PESTANA, Lucas. Menino de 12 anos descobre fórmula matemática que ajuda o estudo da divisão. *Correio Braziliense*, 19 nov. 2019. Disponível em: https://www.correiobraziliense.com.br/app/noticia/mundo/2019/11/19/interna_mundo,807535/menino-de-12-anos-descobre-formula-matematica-que-ajuda-o-estudo-da-di.shtm. Acesso em: 2 dez. 2021.

Estudante Chika Ofili em 2019.

Westminster Under School, Londres/Arquivo da escola

Capítulo 9 | Divisibilidade 127

Reprodução de seção *Na mídia*, página 127, volume 6 do Livro do Estudante.

No exemplo apresentado, além de desenvolver habilidades específicas do 6º ano, a seção mobiliza com maior ênfase a **CG02** e a **CEMAT06** ao propor a resolução de situações-problema utilizando algoritmos e fluxogramas, além de contribuir para o desenvolvimento das habilidades de argumentação matemática e do pensamento computacional.

Matemática e tecnologias

As tecnologias fazem parte da vida de todos nós, e os jovens lidam com esses recursos na maior parte do tempo utilizando diversos aplicativos para comunicação, entretenimento, armazenagem de documentos, entre outros. A ambientação com as tecnologias deve adentrar as salas de aula e fazer parte do ensino e da aprendizagem em Matemática. Diante desse cenário, essa seção sugere a você e aos estudantes a exploração do uso de *softwares* e aplicativos para resolver e modelar problemas de Matemática e simular variações de parâmetros, tornando a aprendizagem mais dinâmica e interativa.

Matemática e tecnologias

Faça as atividades no caderno.

Construindo gráfico com apoio de planilha eletrônica

Utilizando um *software* de planilha eletrônica, o Calc, é possível construirmos gráficos partindo de uma tabela.

No exemplo a seguir, apresentamos em uma tabela o preço médio da gasolina comum em algumas cidades do estado de São Paulo no período de 27/03/2022 a 02/04/2022.

Média do preço da gasolina comum em algumas cidades do estado de São Paulo

Cidade	Preço médio da gasolina comum (em R$)
Araçatuba	6,81
Barueri	7,32
Rio Claro	6,63
Tupã	7,24

Fonte dos dados: BRASIL. *Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis*. Disponível em: https://preco.anp.gov.br/include/Resumo_Por_Estado_Index.asp. Acesso em: 5 abr. 2022.

Para construirmos um gráfico, primeiro devemos reproduzir a tabela em uma planilha eletrônica, como foi feito na seção *Matemática e tecnologias* no capítulo 12 desta Unidade.

Captura de tela do LibreOffice Calc indicando os dados da tabela.

Para construir o gráfico, siga estes passos:

1º) Selecione todas as células preenchidas nas colunas A e B. Clique com o botão esquerdo do *mouse* na primeira célula da coluna A e arraste até a última célula da coluna B.

Captura de tela do LibreOffice Calc indicando a seleção dos dados preenchidos na tabela. (1º passo)

Capítulo 13 | Pesquisa estatística e representações gráficas 171

Faça as atividades no caderno.

2º) Clique na função "Inserir", na barra superior, e depois em "Gráfico...".

3º) Selecione o gráfico "Coluna" e clique em "Finalizar".

Captura de tela do LibreOffice Calc indicando a seleção da função "Gráfico". (2º passo)

Captura de tela do LibreOffice Calc indicando a seleção do tipo de gráfico. (3º passo)

Ao final desse processo, você vai obter:

Captura de tela do LibreOffice Calc indicando a construção do gráfico.

- Agora, faça os mesmos procedimentos anteriores para construir um gráfico com as informações que você obteve na pesquisa feita na seção *Educação financeira* deste capítulo, utilizando apenas a descrição da despesa e o valor de cada uma delas. Resposta pessoal.

172 Unidade 5 | Estatística e Probabilidade

Reprodução da seção *Matemática e tecnologias*, páginas 171 e 172, volume 7 do Livro do Estudante.

Na seção exemplificada, explora-se a utilização de *software* específico para a construção de tabelas e gráficos, mobilizando com maior ênfase a **CG05** e a **CEMAT05**.

Na olimpíada

Neste boxe são reproduzidas questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (Obmep). Apesar do nome da prova, estudantes de instituições de Ensino Fundamental e Ensino Médio particulares também participam. O evento já é tradicional em nosso país e ocorre desde 2005. A abordagem das questões de avaliação pode propiciar aos estudantes a vivência de situações novas e desafiadoras que os levem a pensar e desenvolver estratégias pessoais de resolução.

Na olimpíada

Outro planeta. Oba!

(Obmep) No planeta Pemob as semanas têm 5 dias: Aba, Eba, Iba, Oba e Uba, nessa ordem. Os anos são divididos em 6 meses com 27 dias cada um. Se o primeiro dia de um certo ano foi Eba, qual foi o último dia desse ano?

a) Aba
b) Eba
c) Iba
d) Oba
e) Uba

Reprodução/Obmep, 2019.

Reprodução do boxe *Na olimpíada*, página 135, volume 6 do Livro do Estudante.

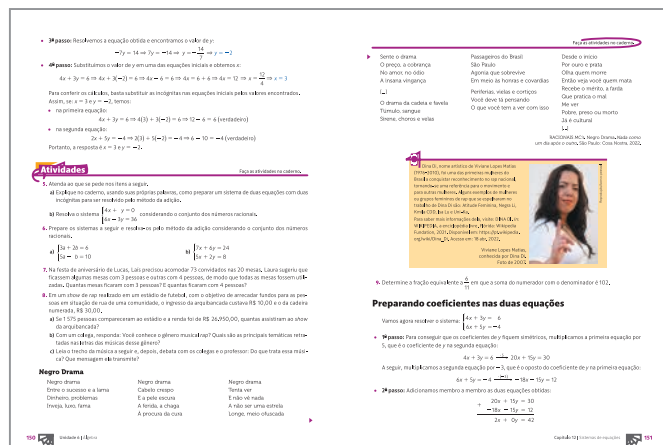
Boxes de sugestão

Os boxes de sugestão trazem dicas de *sites*, visitações, livros paradidáticos, vídeos, *podcasts*, entre outros que podem enriquecer o trabalho em sala de aula e mobilizar competências gerais e competências específicas da BNCC, além de variados TCTs.

O livro *74 dias para o fim*, de Angélica Lopes (Belo Horizonte: Lê, 2015), narra, em primeira pessoa, a violência psicológica e física sofrida por Valdir, um estudante de 16 anos do último ano do Ensino Médio. Trata-se de um trabalho que apresenta aos jovens as temáticas da cultura digital nos conflitos da adolescência, de modo a sensibilizar o leitor para os fatos vividos pelo personagem. A narrativa aborda questões diversas relacionadas, sobretudo, ao *bullying* no contexto escolar e nas redes sociais. Valdir rememora esses acontecimentos anos mais tarde, ao tentar compreender o que motivou um grupo de colegas de sala de aula a elegê-lo objeto de injúria, além das inúmeras agressões físicas sofridas por ele. O texto aborda de maneira sensível os conflitos e sentimentos vivenciados por Valdir nos últimos 74 dias que faltam para sua formatura no Ensino Médio. Esse relato coloca em evidência as relações sociais, afetivas e emocionais no espaço escolar e o modo como a escola lida com o *bullying* entre os estudantes. Os atos de *bullying*, muitas vezes vistos como mera brincadeira, ofendem a honra, a dignidade e a identidade daquele que os sofre, colocando-o diante de situações diversas de conflitos que podem ocorrer tanto no espaço físico escolar quanto no ciberespaço. Os colegas de Valdir se valem de tecnologias, como as redes sociais, *e-mails*, blogues e mensagens via celular, para praticar o *cyberbullying*.

Reprodução do boxe de sugestão, página 68, volume 9 do Livro do Estudante.

No exemplo apresentado, sugerimos a leitura de um livro paradidático que mobiliza com maior ênfase a **CG09** e os TCTs *Vida Familiar e Social* e *Saúde*, pela abordagem de um tema tão sensível como *bullying*.

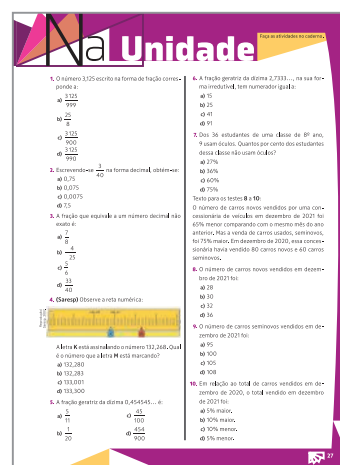
Nesse outro exemplo, apresentamos uma proposta de trabalho envolvendo o *rap*, que permite aos estudantes vivenciar e debater a letra de uma canção desse gênero abordando temas importantes como a pobreza e o preconceito racial. Mobiliza, ainda, a **CG03** ao explorar o repertório cultural e destaca o protagonismo de Dina Di como precursora do movimento *rapper* feminino.

Reprodução das páginas 150 e 151, volume 8 do Livro do Estudante.

Na Unidade

A seção de encerramento, *Na Unidade*, traz atividades sobre os principais conteúdos abordados e que se relacionam com os objetivos pedagógicos apresentados na abertura da Unidade. Essas atividades podem ser utilizadas como ferramentas de avaliação.

Nesta seção também podem ser encontradas atividades de outras avaliações oficiais, como o Saresp e mesmo questões de vestibulares adequadas à faixa etária dos estudantes. A intenção aqui não é trazer questões de mais complexidade, e sim oportunizar situações de verificação de aprendizagem em relação aos objetivos propostos em cada Unidade.

Sugerimos que as atividades sejam realizadas individualmente e que você acompanhe os estudantes durante a execução. É interessante também que seja feito o registro dos avanços e das dificuldades para, ao final, propor novas atividades para remediação coletiva ou individual de defasagens, conforme cada caso.

No exemplo apresentado, as atividades **1** a **4** exploram e permitem avaliar o objetivo pedagógico "retomar e aprofundar o estudo dos números naturais, números inteiros e números racionais"; as atividades **5** e **6** abordam o objetivo "utilizar métodos para obter uma fração geratriz para uma dízima periódica"; enquanto as atividades **7** a **10** trabalham o objetivo "resolver e elaborar problemas utilizando cálculo de porcentagens".

Reprodução de seção *Na Unidade*, página 27, volume 8 do Livro do Estudante.

Os conteúdos nos volumes do Livro do Estudante

Os quadros a seguir indicam os conteúdos explorados em cada capítulo nos quatro volumes do Livro do Estudante e as habilidades da BNCC favorecidas com mais ênfase.

O livro do 6º ano

Unidades	Capítulos	Conteúdos	Na BNCC (habilidades)
Unidade 1: Sistemas de numeração e operações com números naturais	Capítulo 1: Números e sistemas de numeração	A origem dos números Os números naturais	EF06MA01 EF06MA02
	Capítulo 2: Adição e subtração	Adição Subtração	EF06MA03 EF06MA12
Unidade 2: Noções iniciais de Geometria	Capítulo 3: Noções fundamentais de Geometria	Um pouco de história Objetos reais e figuras geométricas Ponto, reta e plano: as formas geométricas mais simples	EF06MA16 EF06MA17 EF06MA23
	Capítulo 4: Semirreta, segmento de reta e ângulo	Semirreta Segmento de reta Ângulo Medida de abertura de um ângulo Construção de ângulos Classificação de ângulos Ângulos formados por retas	EF06MA22 EF06MA23 EF06MA25 EF06MA26 EF06MA27
Unidade 3: Mais operações com números naturais	Capítulo 5: Multiplicação	Multiplicação Expressões aritméticas	EF06MA03 EF06MA12
	Capítulo 6: Divisão	Divisão Expressões numéricas com as 4 operações Divisão com resto	EF06MA03 EF06MA32
	Capítulo 7: Potenciação	Potência Potências e sistemas de numeração	EF06MA02 EF06MA03 EF06MA12
	Capítulo 8: Introdução à Álgebra	Calcular o número desconhecido em uma igualdade Problemas sobre partições	EF06MA03 EF06MA14 EF06MA15
Unidade 4: Múltiplos e divisores	Capítulo 9: Divisibilidade	Noção de divisibilidade Critérios de divisibilidade	EF06MA03 EF06MA04 EF06MA05 EF06MA34
	Capítulo 10: Números primos e fatoração	O que é número primo? Decomposição de um número em produto Fatoração de um número	EF06MA05
	Capítulo 11: Múltiplos e divisores de um número natural	Os múltiplos de um número Os divisores de um número	EF06MA05 EF06MA06
Unidade 5: Frações	Capítulo 12: O que é fração?	Fração da unidade Frações de um conjunto Frações de uma quantidade Leitura de fração Tipos de fração	EF06MA01 EF06MA07 EF06MA08 EF06MA09 EF06MA15
	Capítulo 13: Frações equivalentes e comparação de frações	Conceito de frações equivalentes Simplificação de fração Comparação de frações	EF06MA04 EF06MA07 EF06MA34
	Capítulo 14: Operações com frações	Adição e subtração de frações Multiplicação Divisão	EF06MA01 EF06MA07 EF06MA09 EF06MA10

Unidades	Capítulos	Conteúdos	Na BNCC (habilidades)
Unidade 6: Números decimais	Capítulo 15: Fração decimal e número decimal	Fração decimal Número decimal Taxa percentual Propriedades dos números decimais Comparando números decimais	EF06MA01 EF06MA02 EF06MA07 EF06MA08 EF06MA13
	Capítulo 16: Operações com números decimais	Adição e subtração com números decimais Multiplicação com números decimais Potenciação com número decimal na base Divisão envolvendo números decimais	EF06MA01 EF06MA08 EF06MA11 EF06MA13
Unidade 7: Comprimento, perímetro e área	Capítulo 17: Comprimento	Medindo comprimentos Unidades de medida padronizadas de comprimento	EF06MA11 EF06MA24
	Capítulo 18: Curvas, poligonais, polígonos e perímetro	Curvas Poligonais Polígonos Triângulos Quadriláteros Medindo perímetros Polígonos regulares	EF06MA18 EF06MA19 EF06MA20 EF06MA22 EF06MA24 EF06MA28
	Capítulo 19: Área, ampliação e redução	Medindo áreas Unidades de medida padronizada de área Medida de área de alguns polígonos Ampliação e redução de figuras planas	EF06MA21 EF06MA24 EF06MA29
Unidade 8: Massa, volume, capacidade, tempo e temperatura	Capítulo 20: Massa	Medindo massas Unidades de medida padronizadas de massa	EF06MA11 EF06MA13 EF06MA24
	Capítulo 21: Volume e capacidade	Medindo volumes Unidades de medida padronizadas de volume Medida de volume do bloco retangular Medida de volume do cubo Medindo capacidades	EF06MA11 EF06MA13 EF06MA24
	Capítulo 22: Tempo e temperatura	Medidas de tempo Operações com medidas de tempo Medidas de temperatura	EF06MA03 EF06MA11 EF06MA24
Unidade 9: Noções e Estatística e Probabilidade	Capítulo 23: Noções de Estatística	Revendo porcentagens Etapas de uma pesquisa estatística	EF06MA13 EF06MA31 EF06MA32 EF06MA33
	Capítulo 24: Possibilidades e Probabilidade	Problemas de contagem Cálculo de probabilidade	EF06MA13 EF06MA30 EF06MA34

O livro do 7º ano

Unidades	Capítulos	Conteúdos	Na BNCC (habilidades)
Unidade 1: mmc, mdc, frações e porcentagem	Capítulo 1: Múltiplos e divisores de um número natural	Números naturais Sequência numérica A sequência dos múltiplos de um número natural Os divisores de um número natural Como descobrir o mínimo múltiplo comum Como descobrir o máximo divisor comum	EF07MA01 EF07MA07
	Capítulo 2: Operações com frações e decimais	Recordando frações Transformação de número decimal em fração e de fração em número decimal Adição e subtração de frações decimais Multiplicação e divisão de frações e decimais Fração como quociente	EF07MA05 EF07MA06 EF07MA07 EF07MA08 EF07MA11 EF07MA12
	Capítulo 3: Cálculo de porcentagens	Porcentagem Fração como operador Recordando o cálculo mental Uma porcentagem especial: aumentos e reduções	EF07MA02 EF07MA06
Unidade 2: Números inteiros e operações	Capítulo 4: Números positivos e números negativos	Medida de temperatura Números negativos e números positivos Mais sobre números negativos	EF07MA03
	Capítulo 5: Números inteiros	O que é um número inteiro? Valor absoluto Números opostos ou simétricos	EF07MA03
	Capítulo 6: Adição e subtração de números inteiros	Adição de números inteiros Propriedades da adição Subtração de números inteiros	EF07MA03 EF07MA04
	Capítulo 7: Multiplicação, divisão e potenciação de números inteiros	Multiplicação de números inteiros positivos Multiplicação de números inteiros de sinais contrários Multiplicação de números inteiros negativos Propriedades da multiplicação Divisão de números inteiros Potenciação de números inteiros	EF07MA03 EF07MA04
Unidade 3: Ângulos e retas	Capítulo 8: Ângulo	O que é um ângulo? Ângulos congruentes Medida de um ângulo Adição de medidas dos ângulos Subtração de medidas dos ângulos Multiplicação de medidas dos ângulos por um número natural Divisão de medidas dos ângulos por um número natural Ângulos adjacentes Bissetriz de um ângulo Classificação de ângulos Ângulos complementares Ângulos suplementares	–[3]
	Capítulo 9: Retas e ângulos	Posições relativas de duas retas Ângulos de duas retas concorrentes Ângulos de duas retas com uma transversal	EF07MA23

3 Apesar de não ser explorada, neste capítulo, nenhuma habilidade específica do 7º ano do Ensino Fundamental, entendemos que o conteúdo proposto é um importante pré-requisito para a continuidade dos estudos em *Geometria*, sobretudo para o capítulo **9**.

Unidades	Capítulos	Conteúdos	Na BNCC (habilidades)
Unidade 4: Números racionais	Capítulo 10: Os números racionais	Razão Vamos conhecer os números racionais Os números racionais e a reta numérica Comparação de números racionais	EF07MA02 EF07MA08 EF07MA09 EF07MA10
	Capítulo 11: Operações com racionais	Adição Subtração Adição algébrica Multiplicação Divisão Potenciação Potências de base 10 Quadrados perfeitos Raiz quadrada	EF07MA09 EF07MA11 EF07MA12
Unidade 5: Estatística e Probabilidade	Capítulo 12: Média e amplitude de um conjunto de dados	Média aritmética Amplitude	EF07MA12 EF07MA35
	Capítulo 13: Pesquisa estatística e representações gráficas	Pesquisa estatística Construção de gráfico Comparando dois tipos de gráfico	EF07MA02 EF07MA12 EF07MA36 EF07MA37
	Capítulo 14: Frequência relativa e Probabilidade	Experimento aleatório Frequência Probabilidade	EF07MA34
Unidade 6: Noções de Álgebra	Capítulo 15: Noções iniciais de Álgebra	Expressões contendo letras Sucessões numéricas e expressões algébricas O que são monômios? O que são polinômios? Expressões algébricas equivalentes Sequências	EF07MA13 EF07MA14 EF07MA15 EF07MA16
	Capítulo 16: Equações	O que são equações? Raiz de uma equação	EF07MA11 EF07MA13 EF07MA18
	Capítulo 17: Resolução de problemas	Empregando equações	EF07MA18
Unidade 7: Distâncias, circunferências e polígonos	Capítulo 18: Distância e circunferências	Distância entre dois pontos Distância entre um ponto e uma reta O traçado da paralela Distância entre duas retas paralelas Circunferência Construção de uma circunferência O número π	EF07MA12 EF07MA22 EF07MA29 EF07MA33
	Capítulo 19: Polígonos	Recordando triângulos Desigualdade triangular Propriedade da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo Rigidez geométrica do triângulo Propriedade do ângulo externo de um triângulo Polígonos Construindo polígonos regulares	EF07MA07 EF07MA24 EF07MA25 EF07MA26 EF07MA27 EF07MA28
Unidade 8: Área, volume e transformações no plano	Capítulo 20: Área e volume	Recordando áreas Calculando a medida de área de polígonos Volume do paralelepípedo	EF07MA30 EF07MA31 EF07MA32
	Capítulo 21: Transformações geométricas no plano	Sistema de coordenadas Simetrias Reflexões Translações Rotações	EF07MA19 EF07MA20 EF07MA21

Unidades	Capítulos	Conteúdos	Na BNCC (habilidades)
Unidade 9: Aritmética aplicada	Capítulo 22: Razões e proporções	Razões Comparando sequências de números Números diretamente proporcionais Proporção Números inversamente proporcionais Divisão proporcional	EF07MA09 EF07MA15 EF07MA17
	Capítulo 23: Grandezas proporcionais	Correspondências entre grandezas Grandezas diretamente proporcionais Grandezas inversamente proporcionais Regra de três simples Escrevendo sentenças algébricas Porcentagem e regra de três	EF07MA13 EF07MA17 EF07MA29

O livro do 8º ano

Unidades	Capítulos	Conteúdos	Na BNCC (habilidades)
Unidade 1: Números	Capítulo 1: Números naturais, inteiros e racionais	Números Números naturais Números inteiros Números racionais	EF08MA05
	Capítulo 2: Porcentagens	Taxa percentual Fração e porcentagem	EF08MA04
Unidade 2: Potenciação e radiciação	Capítulo 3: Potenciação	Potências Potências de 10 e notação científica Propriedades das potências	EF08MA01 EF08MA03 EF08MA04
	Capítulo 4: Radiciação	Raiz quadrada Raiz quadrada como potência Equações quadráticas simples	EF08MA02 EF08MA09
Unidade 3: Triângulos	Capítulo 5: Congruência de triângulos	A ideia de congruência de triângulos Conceito matemático de congruência de triângulos Casos de congruência	EF08MA14
	Capítulo 6: Pontos notáveis do triângulo e propriedades	Ponto médio de um segmento de reta Bissetriz de um ângulo Bissetrizes e incentro Propriedades dos triângulos isósceles Propriedades dos triângulos equiláteros	EF08MA15 EF08MA17
Unidade 4: Cálculo algébrico	Capítulo 7: Expressões algébricas	Expressões matemáticas que contêm letras Sequências numéricas Valor numérico Diagonal de um polígono Polinômios	EF08MA06 EF08MA10 EF08MA11
	Capítulo 8: Operações com polinômios	Adição de polinômios Subtração de polinômios Multiplicação de polinômios Divisão de polinômios	—[4]
Unidade 5: Quadriláteros	Capítulo 9: Quadriláteros: noções gerais	Reconhecendo quadriláteros Perímetro Quadrilátero convexo e quadrilátero côncavo Soma das medidas dos ângulos de um quadrilátero Quadriláteros notáveis	EF08MA14

4 Ainda que neste capítulo não seja explorada nenhuma habilidade específica do 8º ano, consideramos que o conteúdo proposto é importante para a continuidade dos estudos no campo da *Álgebra*.

Unidades	Capítulos	Conteúdos	Na BNCC (habilidades)
Unidade 5: Quadriláteros	Capítulo 10: Propriedades dos quadriláteros notáveis	Quadriláteros Paralelogramos Retângulos Losangos Quadrados Trapézios isósceles Base média do triângulo Base média nos trapézios	EF08MA14
Unidade 6: Álgebra	Capítulo 11: Equações	Um pouco de história Resolução de problemas Equações impossíveis e equações indeterminadas Equações do 1º grau	EF08MA06
	Capítulo 12: Sistema de equações	Problemas com 2 incógnitas Método da adição Método da substituição Método da comparação Interpretação geométrica Sistemas impossíveis e sistemas indeterminados	EF08MA07 EF08MA08
Unidade 7: Circunferência e transformações geométricas	Capítulo 13: Circunferência e círculo	Distância entre dois pontos Circunferência e círculo Posições relativas entre ponto e circunferência Distância de um ponto a uma reta Posições relativas entre reta e circunferência Posições relativas de duas circunferências Arcos de circunferência Semicircunferência Ângulo central Arcos congruentes Medida angular de um arco Construção de polígonos regulares	EF08MA15 EF08MA16 EF08MA17
	Capítulo 14: Transformações geométricas	Recordando transformações Construção geométrica da reflexão Construção geométrica da translação Construção geométrica da rotação	EF08MA18
Unidade 8: Área, volume e variação de grandezas	Capítulo 15: Área e volume	Área Medida de área do retângulo Medida de área do paralelogramo Medida de área do triângulo Medida de área do losango Medida de área do trapézio Medida de área de um polígono regular Medida de área do círculo Volume e capacidade	EF08MA19 EF08MA20 EF08MA21
	Capítulo 16: Proporcionalidade	Variação de grandezas Grandezas diretamente proporcionais Grandezas inversamente proporcionais Grandezas não proporcionais	EF08MA12 EF08MA13
Unidade 9: Estatística e Probabilidade	Capítulo 17:Medidas estatísticas	Média aritmética Média ponderada Média geométrica Cálculo da média em uma tabela de frequências Medidas de tendência central Medidas de dispersão	EF08MA04 EF08MA25
	Capítulo 18: Pesquisas e gráficos	Pesquisa estatística Classificação de variáveis quantitativas Distribuição de frequências por classes	EF08MA23 EF08MA24 EF08MA26 EF08MA27
	Capítulo 19: Contagem e Probabilidade	Princípio fundamental da contagem Probabilidade: de quanto é a chance?	EF08MA03 EF08MA22

O livro do 9º ano

Unidades	Capítulos	Conteúdos	Na BNCC (habilidades)
Unidade 1: Números e operações com raízes	Capítulo 1: Números reais	Os números reais Reta numérica Números irracionais Representação dos conjuntos numéricos Arredondamentos	EF09MA01 EF09MA02 EF09MA03
	Capítulo 2: Potências e raízes	Potência de expoente inteiro Raiz quadrada Raiz cúbica Quarta potência e raiz quarta Raiz *n*-ésima Equação binomial $x^n = a$, com n inteiro positivo Potência de expoente racional Transformando raízes em potências Adição e subtração com raízes Multiplicação e divisão com raízes Potenciação e radiciação	EF09MA01 EF09MA02 EF09MA03 EF09MA04 EF09MA18
Unidade 2: Cálculo algébrico	Capítulo 3: Produtos notáveis	Quadrado da soma de dois termos Quadrado da diferença de dois termos Produto da soma pela diferença de dois termos Identidades Racionalização de denominadores	EF09MA03 EF09MA04
	Capítulo 4: Fatoração de polinômios	Fração algébrica e simplificação Fatoração Quadrados perfeitos Trinômio quadrado perfeito	EF09MA09
Unidade 3: Equações	Capítulo 5: Resolução de equações por meio de fatoração	Produto igual a zero Fatoração e resolução de equações Trinômio do 2º grau	EF09MA03 EF09MA04 EF09MA09
	Capítulo 6: Equações do 2º grau	O que são equações do 2º grau? Completando quadrados A fórmula de Bhaskara Soma e produto das raízes	EF09MA03 EF09MA04 EF09MA09
Unidade 4: Proporcionalidade e Matemática financeira	Capítulo 7: Relações entre grandezas	Razão e proporção Divisão proporcional Grandezas diretamente proporcionais Grandezas inversamente proporcionais Grandezas não proporcionais Comparando mais de 2 grandezas Regra de três composta	EF09MA07 EF09MA08
	Capítulo 8: Porcentuais sucessivos	Taxa de juro e montante Cálculo com porcentuais sucessivos	EF09MA05

Unidades	Capítulos	Conteúdos	Na BNCC (habilidades)
Unidade 5: Semelhança e aplicações	Capítulo 9: Teorema de Tales	Comparação de grandezas Razão de segmento de reta Feixe de retas paralelas Teorema de Tales Ângulos formados por duas retas paralelas e uma transversal	EF09MA10 EF09MA14
	Capítulo 10: Semelhança de triângulos	Semelhança Semelhança de triângulos Teorema de semelhança de triângulos I Teorema de semelhança de triângulos II Casos de semelhança	EF09MA12
	Capítulo 11: Relações métricas no triângulo retângulo	O triângulo retângulo Aplicações notáveis do teorema de Pitágoras	EF09MA13 EF09MA14
Unidade 6: Estatística e Probabilidade	Capítulo 12: Noções de Estatística	Estatística Variáveis discretas Variáveis contínuas Histograma Classificação das variáveis Amostra Gráfico de linha Outros tipos de gráfico Média, mediana e moda Dispersão de dados: amplitude	EF09MA05 EF09MA21 EF09MA22 EF09MA23
	Capítulo 13: Contagem e Probabilidade	Princípios da contagem Probabilidade Noções de probabilidade condicional e de independência	EF09MA20
Unidade 7: Áreas e polígonos	Capítulo 14:Diagonais e áreas	Equivalência de figuras Segmento de retas notáveis e cálculos de medidas de área	EF09MA13
	Capítulo 15: Polígonos regulares	Polígonos simples e polígonos não simples Polígonos convexos e polígonos côncavos Polígono regular Lado e apótema de polígonos regulares Construção de polígonos regulares	EF09MA15
Unidade 8: Círculo, cilindro e vistas	Capítulo 16: Círculo e cilindro	A circunferência Comprimento de um arco Ângulo inscrito na circunferência Volume de um prisma e de um cilindro	EF09MA11 EF09MA19
	Capítulo 17: Projeções ortogonais, vistas e perspectivas	Projeção ortogonal Vistas ortogonais e perspectivas	EF09MA17
Unidade 9: Funções	Capítulo 18: Sistema cartesiano ortogonal	Sistema cartesiano	EF09MA16
	Capítulo 19: Funções e suas representações	Noção de função Gráfico de uma função Função afim Função crescente e função decrescente Proporcionalidade Proporcionalidade inversa	EF09MA06

Abordagens teórico-metodológicas em Matemática

A BNCC preconiza que o ensino de Matemática deve se pautar no contexto do qual os estudantes fazem parte e, sobretudo, no protagonismo de cada um deles no processo de ensino e aprendizagem. Para que isso realmente ocorra em sala de aula, é essencial que as práticas pedagógicas possibilitem a participação e a ação dos estudantes. Conforme Lorenzato (2008), na Matemática é necessário que o discente manipule, experimente e compreenda o motivo das relações incluídas na abordagem de um conteúdo.

Com base nesse contexto, é importante ressaltar que a aula tradicional não deve ser descartada, pois também possibilita um tipo de aprendizagem que contempla especificidades de determinados conteúdos e para certos públicos. Entretanto, outras práticas pedagógicas podem e devem ser utilizadas trazendo diferentes tipos de significações para os estudantes.

A BNCC sugere que sejam exploradas a resolução de problemas, o raciocínio lógico-matemático, a modelagem matemática, o pensamento computacional e as investigações em sala de aula. Essas práticas, bem como todo o conteúdo que compõe a BNCC, são resultado de pesquisas em educação, Educação Matemática, letramento matemático, estudos sobre culturas, mercado de trabalho, desenvolvimento tecnológico, entre outros temas.

Discorreremos, neste Manual, sobre abordagens teórico-metodológicas e práticas pedagógicas a respeito de argumentação, História da Matemática e Etnomatemática, metodologias ativas, pensamento computacional, resolução e elaboração de problemas, modelagem matemática, raciocínio lógico-matemático, práticas de pesquisa, bem como uso dos recursos apoiados nas Tecnologias da Informação e Comunicação.

A BNCC destaca que os processos matemáticos de resolução de problemas, investigação, desenvolvimento de projetos e modelagem podem ser citados como modos privilegiados da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia de aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais ao letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e do pensamento computacional.

Argumentação

A **argumentação** e a **comunicação de ideias** em Matemática, assim como a investigação científica, são práticas que perpassam todas as outras áreas do conhecimento.

A BNCC destaca na **CG07** a capacidade de argumentação como uma das dez competências gerais propostas para a Educação Básica.

A leitura e os tipos de argumentação como ferramentas para o desenvolvimento de raciocínio

O processo de **leitura inferencial** favorece a organização das relações de significado dentro do texto e determina os significados que o leitor é capaz de estabelecer considerando todas as possibilidades de interpretação que um texto pode oferecer. A produção de sentidos de um texto está conectada ao contexto e à interação entre o autor e o leitor.

O hábito de leitura pode interferir positivamente nas habilidades dos estudantes para entender e interpretar questões do dia a dia, principalmente na Matemática (ROCK; SABIÃO, 2018).

Kato (1990) considera que, ao oferecer aos estudantes atividades de leitura orientada, pelo estímulo compreensivo e motivador e com situações-problema, favorecemos o desenvolvimento de estratégias cognitivas e metacognitivas. No trabalho em sala de aula, é possível ver quão desafiador é o ensino-aprendizagem e a produção de textos argumentativos. Para que os estudantes construam o próprio conhecimento, cabe propor atividades contextualizadas e que favoreçam o desenvolvimento da criticidade e do protagonismo cidadão.

De acordo com Vinhal (2019), ao produzir um texto argumentativo, seja em Matemática ou em outra área de conhecimento, os estudantes podem utilizar alguns tipos de **raciocínio-lógico**: o **indutivo** (parte de fatos particulares para uma conclusão geral), o **dedutivo** (parte do enunciado geral para provar um fato particular), a **analogia** (provas de acordo com semelhanças entre os casos) e a **dedução** (parte de uma regra para obter a conclusão). Saraiva (2019) cita também a **abdução** (conclusões com base em premissas).

Em Matemática, ao incentivar e trabalhar com orientações e roteiros de estudo e pesquisa, mobilizamos as habilidades de leitura, escrita, oralidade e escuta reflexiva dos estudantes, ampliando as estruturas que compõem o letramento matemático nos sujeitos e permitindo, também, o desenvolvimento desses tipos de raciocínio-lógico.

Os estudantes, ao falarem e ouvirem os pares em sala de aula, aprendem e ressignificam saberes. Comunicar-se durante as aulas de Matemática é um processo complexo, pois o indivíduo precisa se apoiar em duas linguagens para tanto: a materna, para comunicação universal, e a linguagem matemática, com símbolos e características próprias.

Nesta coleção, incentivamos o processo de leitura inferencial e o desenvolvimento do raciocínio argumentativo em diversas oportunidades, sobretudo nas aberturas de Unidades – nas quais os estudantes devem ler um texto, interpretá-lo e tirar as próprias conclusões – com atividades envolvendo a elaboração e a resolução de problemas e ao solicitar que argumentem de que maneira chegaram às respostas encontradas.

A argumentação e as falácias

A velocidade com que as informações circulam na atualidade é impressionante. Todos nós, e principalmente os jovens, têm acesso às informações de maneira quase instantânea pela comunicação em rede, o que nos coloca diante de um grande desafio: Como distinguir a verdade de uma falácia no meio desse emaranhado de informações?

Falácia é um tipo de raciocínio equivocado que, apesar de simular a verdade, é logicamente incoerente. Os argumentos falaciosos são particularmente perigosos, uma vez que, geralmente, estão amparados no senso comum, fazendo com que se tornem bastante persuasivos.

A expressão *fake news* tem feito parte do vocabulário da população e passou a ser usada com mais frequência sobretudo durante a pandemia de covid-19, período no qual muitas informações circularam num contexto com poucas informações dos órgãos competentes sobre o assunto. O número de notícias falsas era tão grande que levou algumas instituições a criarem materiais específicos com dicas para verificar a veracidade das informações.

A escola exerce um papel importante no trabalho contra a circulação de desinformações. Para tanto, professores de todas as áreas de conhecimento devem assumir o papel de formadores de cidadãos com senso crítico e capazes de identificar uma notícia ou texto falso ou malicioso.

Nesta coleção, apresentamos algumas oportunidades de exploração desse tema, sempre com orientações para que os estudantes possam se certificar da autenticidade das informações.

Governo do Estado de São Paulo/Instituto Butantan

Reprodução de fôlder orientativo de combate às *fake news* elaborado pelo Instituto Butantan, São Paulo (SP), durante a pandemia de covid-19.

Investigação científica e raciocínio lógico

Saber pensar matematicamente é relacionar situações de contextos diferentes para descobrir novas estratégias e soluções e interpretá-las utilizando, para tanto, diversos tipos de raciocínios argumentativos como ferramenta.

A investigação em Matemática apresenta-se como uma metodologia que:

> tem por objetivo oferecer oportunidade para os alunos vivenciarem uma experiência semelhante ao do investigador matemático e, assim, motivá-los a estudarem Matemática, por meio do desafio de descobrir relações matemáticas apresentadas em situações matemáticas específicas. Desta forma, levar o aluno a ter uma visão do que é fazer Matemática, bem como sentir prazer no fazer Matemática. (MAGALHÃES, 2016)

Nesta coleção, apresentamos algumas possibilidades para você introduzir, na sala de aula, atividades que potencializem o desenvolvimento desses modos de raciocinar, sobretudo a dedução, a indução e a abdução.

Dedução

Dedução é o modo de inferência mais simples e se caracteriza pela inferência que mostra de que maneira, seguindo determinada regra geral, se estabelece um caso particular.

> No método dedutivo consideramos a forma mais certa para nós, ou seja, caminhos verdadeiros, concluintes e resultados. Exemplo: "Hoje está calor e o asfalto está quente". Esse método é comum para testar hipóteses já existentes, dada por axiomas, para comprovar teorias, nomeada de teoremas. (LASCANE, 2019, p. 122)

Indução

Na indução, ao contrário da dedução, parte-se da premissa menor e busca-se a generalização. A verificação da teoria é feita por experimentação. Enquanto processo lógico-analítico, a indução é passível de ser experimentada e, consequentemente, comprovada.

Por trás do raciocínio indutivo está um passo essencial: a "atitude indutiva" à qual é submetido o pesquisador. Ter uma atitude indutiva requer saber observar detalhes em sua experiência e formular hipóteses que podem ou não ser verdadeiras.

Abdução

Na abdução se dá o processo de formação de hipóteses explicativas que ajudam na compreensão de certos fenômenos. Consideramos ponto de partida do raciocínio indutivo.

> Na Matemática, como nas ciências em geral, a abdução é um processo de procura por princípios, explicações ou hipóteses. Ao contrário da dedução, que parte das hipóteses para verificar que as conclusões são verdadeiras, a abdução parte de uma suposta verdade para encontrar algumas hipóteses das quais ela possa ser deduzida. A criação de hipóteses favoráveis nos leva a investigar a situação e assim podemos descobrir coisas novas. (KOVALSKI, 2016, p. 21)

Prática de pesquisa

A prática de pesquisa pode ser incentivada e adotada na abordagem de todos os conteúdos matemáticos. O ato de investigar caminha com os jovens desde a infância. Todo jovem é curioso e tende a explorar e buscar mais informações sobre algo que lhe chama atenção. Nessa perspectiva, é importante que o ensino de Matemática também busque possibilidades para despertar o interesse dos indivíduos. A sala de aula pode proporcionar curiosidade, descoberta e surpresa, desde que as práticas pedagógicas contemplem a participação efetiva deles no processo de aprender.

A prática de pesquisa também serve de aporte interessante por envolver saberes prévios, questionamentos, levantamento e teste de hipóteses, verificações de resultados, elaboração de modelos matemáticos, entre outros.

Pesquisar significa informar-se a respeito de algo, investigar, examinar minuciosamente determinado tema ou problema. É uma ação em busca de conhecimento. Isso quer dizer que não significa apenas a busca simples de algum tema na internet, como muitos estudantes podem pensar.

Andrew Krasovitckii/Shutterstock

É importante os estudantes compreenderem que a pesquisa é resultado de uma ação iniciada pela curiosidade ou inquietação de uma ou mais pessoas acerca de determinado assunto ou problema. Uma pesquisa é uma investigação.

Nesta coleção, o tipo de pesquisa proposto é o que chamamos de **pesquisa bibliográfica**, cujas propostas se tornam mais complexas à medida que os estudantes avançam nos Anos Finais do Ensino Fundamental. Esse tipo de pesquisa consiste na coleta de informações sobre o tema em textos, livros, artigos, *sites*, entre outros: **as fontes de informação**.

Sempre que explorar o trabalho com as fontes de informação, retome com os estudantes a necessidade de avaliar as fontes utilizadas. Consulte o tópico "A argumentação e as falácias" deste Manual para exemplificar e debater com os estudantes o que são falácias e como evitá-las.

Nas propostas desta coleção indicadas com o selo *Prática de pesquisa*, procuramos enfatizar as etapas de uma pesquisa bibliográfica: introdução, desenvolvimento, conclusão e referências. Ao compreender a função de cada etapa da pesquisa bibliográfica, os estudantes têm a oportunidade de vivenciar o método científico, que será ampliado no Ensino Médio.

ankudi/Shutterstock

No volume 7 da coleção, por exemplo, requer-se dos estudantes que respondam à seguinte questão de pesquisa: “Por que a volta completa de uma circunferência foi dividida em 360°?”. Ao pesquisarem a informação, eles mobilizam a **CG01**, a **CG02**, a **CEMAT01** e a **CEMAT02**, exercitando a curiosidade intelectual e recorrendo à abordagem própria das ciências no trabalho de investigação.

Na História

Pesquisa e história do ângulo de 1 volta

Prática de pesquisa

Provavelmente, você já aprendeu que **pesquisar** significa investigar, examinar minuciosamente determinado tema ou encontrar respostas para um problema. Para fazer uma **pesquisa bibliográfica**, buscamos fontes de informação, como livros, artigos, *sites*, etc. Mas, como nem todas as fontes de informação que podemos consultar são confiáveis, precisamos estar atentos às escolhas. Anote algumas dicas de perguntas que você pode fazer a si mesmo durante uma pesquisa.

Uma fonte de informação confiável é aquela que traz conteúdos fundamentados em estudos aprofundados, com explicações que não são duvidosas.

Onde essa informação foi encontrada?
Informações encontradas na internet facilitam o trabalho de pesquisa, mas o conteúdo pode ser modificado a qualquer momento, o que não ocorre com livros e artigos de instituições de estudo reconhecidas, de centros de pesquisa e de universidades.

O autor ou a instituição tem conhecimento sobre o tema?
Verifique se o autor está apenas expressando a opinião dele sobre o assunto ou se está repetindo algo que outro autor escreveu. Se possível, busque a fonte original, do autor citado nas pesquisas feitas, que é o especialista da área.

Onde mais essa informação pode ser encontrada?
Não acredite na primeira fonte consultada, pois existem as chamadas *fake news* (notícias falsas). Busque outras fontes para comparar os textos que trazem a informação procurada. A data da publicação também é muito importante para a informação ser a mais atualizada possível.

Uma pesquisa bibliográfica comumente é apresentada como um texto e deve seguir uma metodologia de pesquisa, que é um passo a passo de como executá-la dentro das etapas: **introdução**, **desenvolvimento**, **conclusão** e **referências bibliográficas**. Acompanhe:

Definição do tema e do objetivo → **Busca das informações** → **Leitura e registro das informações** → **Apresentação das informações**

É o tema da pesquisa ou a pergunta que precisa ser respondida (questão da pesquisa) e a justificativa do objetivo da pesquisa. Faz parte da etapa de **introdução**.

É o levantamento inicial das informações que se relacionam com o tema de pesquisa, em fontes confiáveis. Faz parte da etapa de **desenvolvimento**.

É a leitura e o registro por escrito das informações que são importantes para responder à pergunta da pesquisa. Você deve ler as informações pesquisadas, destacar as ideias principais do texto, compreender, interpretar e registrar da maneira como entendeu, com as próprias palavras; isso pode ser organizado em tópicos. Faz parte da etapa de **desenvolvimento**.

É a exposição do trabalho de pesquisa, que pode ser feito de diversas maneiras: texto, cartaz, vídeo, *podcast*, infográfico, história em quadrinhos, etc. Você deve incluir na apresentação as referências bibliográficas, que são as fontes consultadas e utilizadas. Faz parte das etapas de **conclusão** e referências **bibliográficas**.

234 Unidade 7 | Distâncias, circunferências e polígonos

Faça as atividades no caderno.

Mas tem um jeito de citar as fontes, como anotei no papiro!

Para livro: [SOBRENOME DO AUTOR], [Nome do autor]. [*Título do livro*]. [edição, se houver]. [Cidade]: [Editora], [ano da publicação]. ([nome da coleção, se houver]).
Para artigo de revista: [SOBRENOME DO AUTOR], [nome do autor]. [Título do artigo]. [*Nome da revista*], [Cidade]: [Editora], [ano da publicação]. [volume], [número da publicação], [número da(s) página(s)].
Para artigo de jornal: [SOBRENOME DO AUTOR], [Nome do autor]. [Título do artigo]. [*Nome do jornal*], [número da(s) página(s)], [dia mês e ano da publicação].
Para texto da internet (em geral): [SOBRENOME DO AUTOR], [Nome do autor]. [Título do artigo]. [*nome do site*], [dia, mês e ano da publicação, se houver]. Disponível em: URL. Acesso em: [dia, mês e ano].

Agora que você conhece as etapas de uma pesquisa bibliográfica, que tal elaborar uma?

Definição do tema e do objetivo

Tema da pesquisa: História do ângulo de 1 volta.
Questão da pesquisa: Por que a volta completa de uma circunferência foi dividida em 360°?
Na **introdução**, escreva um texto curto informando o tema da pesquisa e o objetivo, que é conhecer o motivo de a circunferência ter sido dividida em 360°.

Busca das informações

O tema definido faz parte da História da Matemática, então, você pode localizar e selecionar as informações sobre a origem da circunferência em textos de livros, em artigos de revistas e na internet; nesta última, digite palavras-chave como "história ângulo uma volta" ou "história circunferência graus".
Confira novamente as dicas sobre a busca de informações em fontes confiáveis de consulta e anote as informações que você pesquisou.
As questões a seguir servem de guia para auxiliá-lo a escrever esse passo do **desenvolvimento** da pesquisa, mas elas não devem aparecer no texto.

- Quando surgiu a ideia de circunferência?
- Quem ou qual civilização apresentou essas ideias?
- Qual era o contexto vivido por esse povo?
- Por que a circunferência foi dividida em graus?
- Por que 360?

Seguem algumas referências bibliográficas que podem contribuir com sua pesquisa:

- GUELLI, Oscar. *Contando a história da matemática*: dando corda na trigonometria. São Paulo: Ática, 2008.
- SILVA, Circe M. S.; ARAÚJO, Cláudia A. C. Conhecendo e usando a história da matemática. *Educação e Matemática*, Vitória: Ufes, jan./fev., 2001. n. 61. Disponível em: https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/964/1013. Acesso em: 4 maio 2022.
- VIANA, Giovana K. A. M.; TOFFOLI, Sônia F. L.; SODRÉ, Ulysses. Geometria. *Matemática Essencial*. Londrina: UEL, 29 jul. 2020. Disponível em: http://www.uel.br/projetos/matessencial/basico/fundamental/angulos.html. Acesso em 20 abr. 2022.

Leitura e registro das informações

Leia os textos selecionados e defina os trechos mais significativos. Destaque (com caneta marca-texto ou anotando partes desses trechos como tópicos) as informações relacionadas com o tema da pesquisa e reescreva com as próprias palavras explicando o que entendeu.

Apresentação dos resultados

Na **conclusão**, você pode responder à questão de pesquisa, copiando e completando a frase:
A circunferência foi dividida em 360 graus porque .
Por fim, escolha como a conclusão da sua pesquisa será apresentada e convide os colegas a conhecer seu trabalho!

Capítulo 18 | Distâncias e circunferências 235

Reprodução da seção *Na História* do Livro do Estudante, páginas 234 e 235, volume 7, com destaque para o ícone *Prática de pesquisa*.

Proposta para o professor

O texto sugerido a seguir, em linguagem bastante acessível, mostra que os *podcasts* são ferramentas importantes no processo de ensino-aprendizagem. São um rico recurso que pode ser utilizado na divulgação dos resultados de projetos de pesquisa.

KARLA, Ana. Como transformar o *podcast* em recurso pedagógico na sala de aula? *Instituto Singularidades*, São Paulo, 2019. Disponível em: https://blog.institutosingularidades.edu.br/como-transformar-o-podcast-em-recurso-pedagogico-na-sala-de-aula/. Acesso em: 19 jun. 2022.

Metodologias ativas

Uma das tendências pedagógicas em voga atualmente é conhecida como “metodologias ativas”. Nesse tipo de metodologia, o conhecimento não se origina exclusivamente da escola, do professor. Ele é proveniente também do que o estudante sabe sobre determinado assunto. Segundo o professor José Moran (2015), da Universidade de São Paulo (USP), as metodologias ativas podem ser um ponto de partida de avanço para processos mais profundos de reflexão, integração cognitiva, generalização e reelaboração de novas práticas. Ele afirma que estudantes se tornam mais proativos quando se envolvem em atividades que mobilizam ações desafiadoras e quando podem argumentar, testar hipóteses e experimentar novas situações.

No artigo “Mudando a educação com metodologias ativas”, Moran traz apontamentos importantes que ajudam a compreender o que são as metodologias ativas e quais são o impacto do uso delas na aprendizagem dos estudantes. Sintetizamos a seguir os principais itens abordados no artigo.

1º) As relações de ensino e aprendizagem são processos interligados que constituem relação simbiótica, profunda, constante entre o que chamamos mundo físico e mundo digital. Não são dois mundos ou espaços, mas um espaço estendido, uma sala de aula ampliada, que se mescla. Nesse sentido, a educação formal é cada vez mais *blended*, misturada, híbrida, porque não acontece só no espaço físico da sala de aula, mas nos múltiplos espaços do cotidiano, que inclui os digitais.

2º) O professor deve compreender que as tecnologias também são modos de comunicação com os estudantes, sujeitos nascidos em uma era de pleno desenvolvimento tecnológico. A interligação entre sala de aula e ambientes virtuais é fundamental para abrir a escola para o mundo e trazer o mundo para dentro da escola.

3º) Desafios são importantes, por isso, junto com outras atividades, quando bem planejados, acompanhados e mediados podem mobilizar as competências desejadas, sejam intelectuais, emocionais, pessoais ou comunicacionais. Exigem pesquisas, avaliação de situações, observação de pontos de vista diferentes, assumir alguns riscos, aprender pela descoberta e caminhar do simples para o complexo. Nas etapas de formação na Educação Básica, os estudantes precisam de acompanhamento de profissionais mais experientes para ajudá-los a conscientizar-se de alguns processos, estabelecer conexões não percebidas, superar etapas mais rapidamente e confrontá-los com novas possibilidades.

4º) Uma proposta interessante é a prática de jogos colaborativos, visto que a geração atual é acostumada a jogar e a se comunicar, muitas vezes, na linguagem própria dos *games*. Assim, ao utilizá-los é possível gerar além de um ambiente de competição, um ambiente colaborativo, de estratégia, com etapas e habilidades bem definidas.

5º) O professor tem papel importante no trabalho com as metodologias ativas, pois é o articulador de etapas, processos, resultados, lacunas e necessidades, seguindo percursos dos estudantes individualmente ou em grupos, pois é ele quem conduz o desenvolvimento da aula ou de um projeto.

6º) O trabalho com projetos é uma boa oportunidade de inserir metodologias ativas de aprendizagem na escola, sempre atentando-se que o aprendizado ocorre com base em problemas e situações reais. Nesse sentido, trabalhar com projetos de vida pode ser um bom início para conquistar e aproximar os estudantes, além de fazê-los sentir-se responsáveis pela própria aprendizagem. Os projetos das escolas Summit da Califórnia (Summit Schools) são inspiradores e é interessante pensarmos em sua implantação nas unidades escolares brasileiras.

Proposta para o professor

A Summit Public Schools da Califórnia é uma rede de escolas que mescla educação baseada em projetos, ensino híbrido (tecnologias, currículo e personalização) e o projeto de vida de cada estudante. No vídeo sugerido aqui (em inglês com legenda em português), a diretora da rede de escolas Diane Tavenner explica como funciona na prática.

PROJETO de vida como articulador da escola (Summit School): transformar 2013. [São Paulo]: Fundação Lemann, 2014. 1 vídeo (21 min 40 s). Publicado pelo canal Fundação Lemann. Disponível em: https://youtu.be/FIF7jNZwFcw. Acesso em: 19 jun. 2022.

Caso tenha interesse por esse tema, acesse o artigo que foi sintetizado neste Manual: MORAN, José. Mudando a educação com metodologias ativas. *In*: SOUZA, Carlos Alberto; MORALES, Ofelia Elisa Torres (org.). *Convergências midiáticas, educação e Cidadania*: aproximações jovens. v. II. Ponta Grossa: Foca Foto-PROEX/UEPG, 2015. (Coleção Mídias Contemporâneas). Disponível em: http://www2.eca.usp.br/moran/wp-content/uploads/2013/12/mudando_moran.pdf. Acesso em: 3 jun. 2022.

Um exemplo de aplicação: sala de aula invertida

Ainda segundo José Moran, ao trabalhar com a sala de aula invertida, geralmente é possível destacar três momentos pedagógicos.

1º momento: Após a definição do tema ou conteúdo a ser trabalhado, é preciso oferecer aos estudantes material para pesquisa, como apostilas e indicações de *sites* e de outros materiais disponíveis na internet, para que estudem antes da aula presencial.

Pode-se ainda apresentar-lhes um roteiro de estudos ou questionário para auxiliar na investigação e verificar seus saberes prévios sobre o tema. Por fim, é necessário sanar dúvidas e reforçar com a turma os pontos que achar necessário.

2º momento: Nessa etapa, os estudantes, preferencialmente em grupos, desenvolvem projetos e atividades enquanto seguem sua organização e orientação. Esse momento é rico e deve ser explorado pelo docente, pois quando reunidos em pares e apoiando-se em linguagem própria juvenil para acessar os saberes prévios, argumentar e comunicar ideias, os conteúdos são apreendidos e ressignificados.

3º momento: Já na terceira e última parte, você deve auxiliar os estudantes motivando-os e fazendo com que se sintam agentes do processo de formação. Incentive todos a compartilharem ideias, apoiando-se, mais uma vez, na comunicação e na argumentação matemática para formalizarem resultados e discussões teóricas.

Proposta para o professor

O professor José Moran tem vasta produção que versa sobre inovação em sala de aula. Este texto pode ser um bom início para estudo.

MORAN, José. Novos modelos de sala de aula. *Revista Educatrix*, São Paulo: Moderna, n. 7, 2014. Disponível em: https://pt.calameo.com/read/0028993271fb4d724b1cb. Acesso em: 3 jun. 2022.

Um exemplo interessante de uso da metodologia de sala de aula invertida (e que pode ser aplicado em diversos momentos desta coleção, em particular nos capítulos de Geometria espacial) é uma aula prática com conteúdos visuais e manuais para a construção de modelos de sólidos geométricos e exploração dos principais conceitos, podendo apoiar-se no roteiro a seguir.

1º momento: Apresentação de materiais, vídeos e *sites* que tratem do tema. Elabore um roteiro de pesquisa e investigação sobre sólidos geométricos e apresente-o à turma.

2º momento: Organização da turma em trios e distribuição de tarefas para a construção de modelos dos sólidos geométricos (pode ser um tipo de sólido por grupo), seguido da exploração dos modelos de sólidos geométricos e investigação de suas propriedades e características. Fomente a discussão e o registro dela em um relatório ou painel para ser comunicado à turma em formato de minisseminário.

3º momento: Apresentação dos produtos finais (modelos dos sólidos geométricos montados e painéis/relatórios) à turma e defesa das ideias.

Perceba que, nesse exemplo de aula prática de construção de modelos de sólidos geométricos, são mobilizadas habilidades que envolvem argumentação e comunicação de ideias, assim como as práticas de investigação, sempre com sua mediação.

Pensamento computacional

Podemos compreender o pensamento computacional como uma competência associada à resolução de problemas, apoiando-se, para tanto, na computação.

Utilizar recursos do pensamento computacional em sala de aula não significa necessariamente fazer programas de computador ou outro tipo de *software*. Esse conceito significa o desenvolvimento de uma representação de raciocínio lógico e por etapas, compreendendo a presença de padrões, a elaboração de passos, testes e validações de resultados, além da generalização pela abstração. Portanto, o uso dos algoritmos, de fluxogramas, de esquemas ou mesmo de roteiros com etapas passo a passo a serem cumpridas pode ser compreendido como pensamento computacional. E esses são importantes recursos que podem auxiliar os estudantes a identificar relações entre os objetos representados, como na organização das etapas de uma tarefa, representação de árvore de possibilidades, entre outras situações.

Ao propor com frequência o uso desses recursos, é possível incentivar o raciocínio analítico dos estudantes, chamando a atenção para a aprendizagem de programação e de robótica.

Reprodução de passo a passo de fluxograma para cálculo do termo de uma sequência numérica, página 92, volume 8 do Livro do Estudante.

É importante destacar que as pesquisas, os estudos e as aplicações envolvendo o pensamento computacional na educação já existem há quase 20 anos e, de acordo com a BNCC, esse tipo de raciocínio pode ser mobilizado em todas as etapas da Educação Básica.

A estadunidense Jeannette M. Wing é engenheira, pesquisadora e cientista computacional, além de professora de Ciência da Computação na Universidade de Columbia (EUA). Ela é a principal defensora do pensamento computacional aplicado em várias áreas do conhecimento. O ensaio "Pensamento computacional" foi publicado há mais de 15 anos e considera-se que ajudou a estabelecer a centralidade da Ciência da Computação na resolução de problemas em todas as áreas do conhecimento. (Fonte dos dados: COLUMBIA UNIVERSITY Data Science Institute. *Jeannette M. Wing*. Nova York: DSI, [20--]. Disponível em: https://datascience.columbia.edu/people/jeannette-m-wing/. Acesso em: 3 jun. 2022.)

Jeannette M. Wing. Foto de 2009.

Reprodução/Nadja Meister/TU Wien Informatics

Ao longo desta coleção, você encontra indicações de atividades que exploram o uso do pensamento computacional, como no excerto a seguir. Para concluir esta atividade, o estudante deve cumprir etapas e regras. O pensamento computacional é mobilizado na organização da sequência lógica e na validação dos resultados obtidos ao longo do processo.

21. O algoritmo apresentado a seguir pode ser utilizado para saber se um número natural é divisível por 3. Leia-o e depois faça o que se pede.

1º) Adicionar os algarismos do número.

2º) Decidir se a soma calculada é ou não é divisível por 3.

3º) Concluir se o número é divisível por 3.

Represente esse algoritmo no caderno por meio de um fluxograma.

Reprodução de atividade que envolve pensamento computacional, página 124, volume 6 do Livro do Estudante.

Recursos apoiados nas tecnologias

Em um mundo globalizado e em constante desenvolvimento científico e tecnológico, é importante que a escola se integre a práticas que propiciem aos estudantes vivenciar essa realidade com aplicação ao ensino. Para tanto, é preciso que você tenha acesso a equipamentos e informações e realize atividades com eles tendo como suporte recursos tecnológicos para auxiliá-lo na sala de aula.

Nesta coleção, sugerimos explorar com os estudantes recursos tecnológicos em diversas oportunidades, como ao propor a utilização do GeoGebra e de planilhas eletrônicas na seção *Matemática e tecnologias*, presente em todos os volumes.

Matemática e tecnologias

Construindo gráficos com auxílio de uma ferramenta digital

Reprodução de seção *Matemática e tecnologias*, páginas 254 e 255, volume 8 do Livro do Estudante.

O GeoGebra é um *software* gratuito e multiplataforma de Geometria dinâmica para todos os níveis de ensino, que combina Geometria, Álgebra, tabelas, gráficos, Estatística e cálculo em uma única aplicação. Para acessá-lo *on-line*, visite: https://www.geogebra.org/ (acesso em: 3 jun. 2022). Ele também pode ser baixado em *smartphones*, na loja oficial de aplicativos do sistema operacional, ou em computadores.

Com o GeoGebra, é possível fazer, por exemplo:

- construções geométricas de ângulos medindo 90°, 60°, 45° e 30° e de polígonos regulares;
- transformações geométricas (simetrias de translação, reflexão e rotação);
- cálculos da medida de área de figuras planas.

Há diversos aplicativos de planilhas eletrônicas para computador e *smartphone* ou *on-line*. O uso e as funcionalidades dessas planilhas são similares e muitas estão disponíveis em português.

Com as planilhas eletrônicas, sugerimos propor aos estudantes:

- cálculos usando as fórmulas disponíveis;
- construção de tabelas e gráficos, a partir de exemplos;
- simulações de orçamentos.

A calculadora é um recurso bastante utilizado em situações cotidianas por boa parte das pessoas; no entanto, muitas não sabem se beneficiar de todos os recursos que ela disponibiliza. Além disso, a calculadora é uma ferramenta eficiente para correção de erros, averiguação de respostas e teste de hipóteses, e é possível utilizá-la como instrumento de autoavaliação ou investigação.

Nesta coleção oportunizamos situações de uso da calculadora, seja para verificação de cálculos ou de natureza investigativa. Acompanhe a seguir um exemplo em que apresentamos a calculadora e propomos sua utilização em uma situação do cotidiano.

Matemática e tecnologias

Faça as atividades no caderno.

Vamos usar a calculadora

Um instrumento que facilita, e muito, o trabalho de operar com números naturais é a calculadora. Vamos conhecer algumas teclas de uma calculadora comum.

Calculadora comum.

Agora que já sabemos quais são as principais teclas de uma calculadora, vamos começar a utilizá-la para efetuar uma adição. Acompanhe como calcular 15 + 37.

Primeiro, ligue a calculadora utilizando a tecla ON/C; em seguida, digite os algarismos 1 e 5 (nessa ordem). Vai aparecer o número 15 na tela: 15

Agora, pressione a tecla + e, em seguida, os algarismos 3 e 7. Você pode observar que o número 15 foi substituído na tela pelo número 37: 37

Finalmente, pressione a tecla =. Vai aparecer o resultado 52 na tela: 52

Ao seguirmos esses passos, efetuamos a operação 15 + 37 = 52.

Agora é a sua vez! Efetue a adição 45 + 138 e anote no caderno o resultado para comparar com o dos colegas.

Mudando a operação, efetue a subtração 1365 − 1267, utilizando a tecla −. Não se esqueça de anotar o resultado no caderno.

Uma das aplicações possíveis da calculadora no cotidiano é a utilização durante as compras em um supermercado, pois temos de adquirir diversos produtos com valores diferentes e em muitas quantidades. Acompanhe e resolva as atividades.

1. Se o litro de leite custa R$ 4,00, quanto custam 6 litros de leite?
   Para resolver esse problema, podemos fazer adições sucessivas do valor de 1 litro (R$ 4,00), ou seja, digitar: 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 =. Anote no caderno o resultado obtido.
2. Se você usar 1 nota de R$ 200,00 para pagar uma conta de R$ 174,00, quanto vai receber de troco?
   Para responder a essa pergunta, devemos calcular 200 − 174. Efetue essa operação na calculadora e anote o resultado no caderno.
3. Você deseja comprar alguns produtos para o preparo de um almoço em família.
   a) Utilizando uma calculadora, indique no caderno qual será o valor gasto para comprar 2 pacotes de macarrão, 3 latas de molho de tomate, 1 vidro de palmito, 1 vidro de azeitona e 1 garrafa de azeite, de acordo com os preços apresentados no supermercado *A*.

Capítulo 2 | Adição e subtração 35

Faça as atividades no caderno.

Para ajudá-lo na organização das informações, copie a tabela a seguir no caderno e complete-a com os valores que estão faltando.

Gastos no Supermercado *A*

Produto	Quantidade	Valor unitário (em reais)	Valor total (em reais)
Macarrão			
Molho de tomate			
Palmito			
Azeitona			
Azeite			
Total da compra			

Dados elaborados para fins didáticos.

b) Você acha que é possível economizar com essa compra, de alguma maneira, sem deixar de comprar nenhum item?

c) De acordo com o Procon da Paraíba, antes de comprar qualquer produto, uma boa atitude é fazer uma pesquisa de preços.
Então, junte-se com 2 colegas e pesquisem os valores desses produtos em panfletos, *sites* ou supermercados da região (com a supervisão de um adulto), em pelo menos 3 estabelecimentos. Em seguida, respondam no caderno: Se vocês comprarem todos os produtos no mesmo local, gastarão o mesmo valor final? Há uma maneira de economizar considerando os preços desses 3 estabelecimentos?

Procon é a sigla do órgão de Proteção e Defesa do Consumidor que defende os consumidores e fiscaliza as práticas no mercado de consumo, verificando as possíveis irregularidades e promovendo ações de educação para o consumo.
No *site* do Procon da Paraíba há uma série de dicas de economia doméstica. Visite: GOVERNO DO ESTADO DA PARAÍBA. *Procon-PB oferece dicas para a economia doméstica do consumidor paraibano*. Disponível em: https://procon.pb.gov.br/noticias/procon-pb-oferece-dicas-para-a-economia-domestica-do-consumidor-paraibano. Acesso em: 18 fev. 2022.

36 Unidade 1 | Sistemas de numeração e operações com números naturais

Reprodução de seção *Matemática e tecnologias*, páginas 35 e 36, volume 6 do Livro do Estudante.

Há ainda a possibilidade de aproveitamento de outras tecnologias em sala de aula, como o computador para aquisição de dados usando *softwares* apropriados, simuladores, recursos multimídia e interativos (textos, vídeos, imagens, etc.) e pesquisas na internet. Damos algumas sugestões na coleção, no entanto você pode recorrer a outras ferramentas, de acordo com a realidade escolar.

Proposta para o professor

Além das tecnologias citadas, é possível usar, ainda, aplicativos de localização espacial como suporte para as aulas. O artigo indicado a seguir explora o trabalho com esse tipo de aplicativo.

BAIRRAL, Marcelo A.; MAIA, Rafael C. O. O uso do Google Earth em aulas de Matemática. *Linhas Críticas*, Brasília, DF: Universidade de Brasília, v. 19, n. 39, p. 373-390, maio-agosto 2013. Disponível em: https://periodicos.unb.br/index.php/linhascriticas/article/view/4145/3800. Acesso em: 3 jun. 2022.

Resolução e elaboração de problemas

Na área de Matemática, a BNCC ressalta que os professores devem incentivar os estudantes apresentando problemas da vida real que sejam usados como ponto de partida para situações didáticas em que se desenvolvam a criatividade, o pensamento crítico e a colaboração. Sua responsabilidade não é apenas ensinar a calcular, mas levá-los a compreender que, além das operações, existem outras relações numéricas.

Por meio da elaboração e resolução de problemas nas aulas de Matemática, os jovens aprendem a justificar, explicar como e por que chegaram a uma resposta, mostrar seu raciocínio aos colegas e professores. Elaborar e resolver problemas exige um ambiente de comunicação e escuta, além de cooperação e argumentação. É importante destacar que os estudantes devem perceber que resolver problemas não está relacionado somente às aulas de Matemática, mas é uma habilidade mobilizada ao longo de toda a vida, em diversas situações do cotidiano.

O precursor das ideias acerca da resolução de problemas foi o matemático e professor húngaro George Polya (1887-1985), que estabeleceu passos a serem seguidos na resolução de um problema, descritos a seguir, sinteticamente, de acordo com Polya (1978).

- **Compreender o problema**: o que se pede; quais são os dados.
- **Elaborar um plano**: estratégias para resolver o problema; como organizar os dados.
- **Executar o plano**: executar as estratégias; fazer os cálculos.
- **Fazer a verificação ou o retrospecto**: verificar se a solução está correta; se há outras maneiras de resolver o problema.

De acordo com Dante (1989), podemos alcançar os objetivos a seguir ao trabalhar com a resolução de problemas.

- Pensar produtivamente sobre uma atividade.
- Desenvolver o raciocínio do estudante.
- Contribuir para que o estudante se envolva com aplicações da Matemática.
- Tornar as aulas de Matemática mais desafiadoras e interessantes.

Além dos objetivos citados, a resolução e a elaboração de problemas contribuem para investigação, levantamento e teste de hipóteses, elaboração de argumentos e de ideias matemáticas e para o compartilhamento de diferentes saberes.

Ao longo desta coleção há diversas e variadas possibilidades de se trabalhar com resolução de problemas e temas da realidade ou em contextos didáticos. Aproveite a oportunidade e crie um ambiente de investigação e construção de saberes com os estudantes.

Participe

Faça as atividades no caderno.

I. Leonardo é dono de um sítio e cercou uma região retangular cujas dimensões medem 25 m por 20 m para plantar hortaliças.

a) Que operação você deve fazer para calcular a medida de área dessa região?

b) Qual é a medida de área dessa região?

Plantação de hortaliças no sítio de Leonardo.

II. Joaquim, amigo de Leonardo, também cercou uma região do terreno para plantar hortaliças. Verifique a imagem a seguir, da vista de cima da plantação.

a) O que diferencia uma região da outra?

b) Você acha possível calcular a medida de área da região cercada por Joaquim usando o mesmo procedimento utilizado para calcular a medida de área da região cercada por Leonardo? Justifique sua resposta.

Plantação de hortaliças no sítio de Joaquim.

Ilustrações: Estúdio Mil/Arquivo da editora

Reprodução do boxe *Participe*, página 258, volume 7 do Livro do Estudante.

Modelagem matemática

A modelagem matemática é mais uma tendência pedagógica que pode envolver e despertar o interesse dos estudantes pela Matemática. Assim como a resolução de problemas, essa proposta possibilita a você criar um ambiente de investigação, levantamento e testes de hipótese, argumentação e comunicação em sala de aula.

Usando a modelagem matemática é possível propiciar oportunidades de identificação e análise de situações-problema reais, fazendo os estudantes se interessarem mais pelo conteúdo explorado. Isso é mais bem compreendido com a explanação de estudos como o dos pesquisadores brasileiros Nelson Hein e Maria Salett Biembengut, publicado na obra *Modelagem matemática no ensino* (2000). Segundo esses pesquisadores:

1º) A modelagem é um processo que envolve a obtenção de um modelo e, para isso, além de conhecer o conteúdo matemático, é preciso também ter criatividade para interpretar o contexto.

2º) A elaboração de um modelo matemático depende do conhecimento sobre o conteúdo em questão.

3º) A modelagem pode ser considerada até uma arte, ao formular, resolver e elaborar expressões que servem não apenas para solução em particular, mas que possam ser generalizadas.

É importante saber que a modelagem matemática possibilita várias situações de interdisciplinaridade e transversalidade. Apresentamos a seguir um exemplo da coleção, no volume 7, em que os estudantes têm a oportunidade de determinar o valor aproximado de π experimentalmente.

Participe

Faça as atividades no caderno.

Vamos determinar experimentalmente o valor aproximado de π. Para isso, vamos precisar de objetos redondos, como moedas, anéis, rodas, fundo de copos, jarras ou garrafas, transferidor circular e outros que conseguir. Também serão necessárias linha de costura ou barbante, tesoura com pontas arredondadas, régua ou fita métrica.

Procedimento:

1ª) Posicione cada objeto redondo sobre uma folha de papel e contorne a base de cada um deles, de modo a obter circunferências.

2ª) Meça o diâmetro, em centímetros, de cada circunferência obtida.

3ª) Registre, no caderno, as medidas de cada diâmetro em um quadro como o apresentado a seguir.

4ª) Coloque a linha ou o barbante em torno dos objetos, formando circunferências.

5ª) Corte a linha ou o barbante do tamanho do contorno de cada objeto e meça o comprimento do fio com a régua ou fita métrica.

6ª) Na coluna correta do quadro, anote a medida desse comprimento, em centímetros, para cada objeto.

7ª) Para completar o quadro, com uma calculadora, divida a medida de comprimento do fio pela medida do diâmetro do respectivo objeto.

Objeto	Medida do diâmetro d (em cm)	Medida c da linha ou do barbante (em cm)	Razão $\frac{c}{d}$
Moeda			
Lata de milho			
⋮			

- Compare as razões obtidas. Qual é a conclusão que você pode tirar do experimento realizado?

Reprodução do boxe *Participe*, página 231, volume 7 do Livro do Estudante.

Outras possibilidades de trabalho interessantes são as abordagens de temas que exploram o TCT *Educação Financeira*, por exemplo, pela investigação de modelos usados para calcular a tarifa da conta de energia elétrica ou de telefonia celular.

Proposta para o professor

No artigo intitulado "Um estudo sobre o uso da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem" você conhecerá uma experiência de modelagem matemática aplicada ao ensino e baseada na análise de como ocorre o crescimento de um formigueiro da saúva-limão. Essa experiência pode servir de inspiração para uma prática interdisciplinar com Ciências. Vale a pena a leitura desse artigo publicado na *Revista Boletim de Educação Matemática* (Bolema), da Unesp.

ALMEIDA, Lourdes M. W.; DIAS, Michele R. Um estudo sobre o uso da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. *Bolema*, Rio Claro: Unesp, v. 17, n. 22, p. 19-35, 2004. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10529. Acesso em: 3 jun. 2022.

História da Matemática e Etnomatemática

A BNCC ressalta a importância do trabalho com os diferentes saberes e culturas e com a produção do conhecimento produzido pela humanidade ao longo do tempo e do espaço. Para tanto, há duas tendências metodológicas, também destacadas nesse documento oficial, que podem servir de aporte para esse trabalho: a História da Matemática e a Etnomatemática.

Em relação à História da Matemática, a BNCC traz vários destaques. Reproduzimos a seguir um exemplo.

> A Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras. A equivalência de áreas, por exemplo, já praticada há milhares de anos pelos mesopotâmios e gregos antigos sem utilizar fórmulas, permite transformar qualquer região poligonal plana em um quadrado com mesma área (é o que os gregos chamavam "fazer a quadratura de uma figura"). Isso permite, inclusive, resolver geometricamente problemas que podem ser traduzidos por uma equação do 2º grau. (BRASIL, 2017, p. 272-273)

O livro *História nas aulas de Matemática: fundamentos e sugestões didáticas para professores*, escrito pelos professores brasileiros Iran Abreu Mendes (Universidade Federal da Paraíba) e Miguel Chaquiam (Universidade Federal do Rio Grande do Norte), traz um panorama explicitador e incentivador da abordagem de conteúdos a partir da História da Matemática. A seguir, alguns pontos essenciais abordados por eles (MENDES; CHAQUIAM, 2016).

1. Ao explorar a história da Matemática, é necessário compreender que, na verdade, trata-se de histórias no plural, pois estão conectadas, integradas ou mesmo tecidas em meio a outras histórias das mais diversas qualidades. São histórias sobre a produção de ideias matemáticas e as materializações em múltiplas linguagens representativas e, talvez, também seja dessa multiplicidade que surge a característica plural dessas histórias. Esquecer ou desprezar essa pluralidade é empobrecer qualquer abordagem dita ou concebida como transversal, integrada ou até mesmo contextualizada para a Matemática que se ensina.
2. As histórias consideradas importantes para o desenvolvimento da aprendizagem matemática dos estudantes em sala de aula são aquelas que têm a vocação de explicar a organização conceitual das matemáticas produzidas no tempo e no espaço.
3. Uma das justificativas mais comum sobre a indicação do uso didático ou pedagógico das informações históricas nas atividades de ensino de Matemática é que ela amplia a compreensão dos estudantes acerca das dimensões conceituais dessa área, representando uma contribuição didática para o trabalho do professor e fortalecendo as competências formativas para o exercício de ensino.
4. O uso da história nas aulas de Matemática amplia a visão sobre os aspectos formativos, informativos e utilitários, conduzindo os estudantes ao acervo cultural dessa ciência com a finalidade de desenvolver o interesse pelo assunto e estimular a preservação da memória intelectual humana.
5. É necessário que o professor redirecione o uso das histórias e promova um exercício de investigação mais ampliado, possibilitando que se crie um cenário no qual as histórias do desenvolvimento conceitual sejam agregadas às informações existentes. É preciso explicar que o conhecimento a ser aprendido contribuirá para a ampliação das estratégias de pensamento e, consequentemente, ajudará os estudantes na produção de conhecimento. Outro fator importante é a possibilidade de extrair das informações históricas aspectos epistemológicos que favoreçam a explicação de porquês matemáticos; por exemplo: como determinados teoremas foram provados, entre outros. É fundamental que o professor tente se colocar no lugar do criador desses conceitos para que incorpore, da melhor maneira possível, as justificativas e as argumentações, de modo que a solução seja compreendida e aceita pelos estudantes. Além disso, esse posicionamento dá a possibilidade de diálogos criativos que subsidiem novos elementos agregadores à reformulação das teorias matemáticas que foram complementadas ao longo do desenvolvimento histórico da Matemática.
6. Podem ser desenvolvidos alguns projetos de investigação sobre as histórias dos seguintes tópicos matemáticos: números de Fibonacci; problema das quatro cores; fractais; razão áurea; retângulo de ouro; números imaginários; números complexos; números irracionais;

fórmula de Euler; Matemática e arquitetura; Matemática e arte islâmica; Matemática e música; barras de Napier; triângulo de Pascal; Trigonometria e polígonos regulares; sólidos de Platão; simetria em diversas culturas; transformações geométricas no plano; desenvolvimento das ideias sobre funções; entre outros.

Ao se apoiar nas concepções do uso da história da Matemática em sala de aula, você deve adotar uma postura de escuta reflexiva e conduzir as discussões a partir dos questionamentos que os estudantes farão sobre as informações e histórias às quais terão acesso. É importante fomentar discussões sobre os diferentes contextos nos quais os conceitos surgirem e levantar os possíveis saberes que os estudantes trazem sobre eles. O uso de literatura pode ser um caminho bastante interessante para isso.

No exemplo apresentado, é dado um breve histórico de como foram inseridas, na sociedade brasileira, as relações do sistema métrico de medidas e toda dificuldade da época. As questões de interpretação do texto culminam com o apontamento das diferentes maneiras de expressar medidas em outras culturas, como Estados Unidos, por exemplo (unidades jarda, pé e milha), e em quais contextos culturais os estudantes já se depararam com tais unidades. A jarda, por exemplo, é comum no contexto dos jogos da *National Football League* (NFL, a liga de futebol americano), algo em voga com os jovens. Outras unidades comentadas são perceptíveis em jogos eletrônicos.

Na História

O sistema métrico decimal

Palavras como **arrátel** e **côvado**, que soam estranhas para nós hoje em dia, foram tão familiares a nossos antepassados como, guardadas as proporções, as palavras "quilograma" e "centímetro" atualmente. Arrátel e côvado designavam, respectivamente, uma unidade de medida de massa e uma unidade de medida de comprimento do sistema de pesos e medidas brasileiro que vigorava antes da adoção do **sistema métrico decimal.** Esse sistema antigo tinha diversos problemas e não era consistente por vários motivos, entre os quais o fato de não adotar a escala decimal.

No mundo daquela época – antes do século XVIII – havia uma diversidade muito grande de unidades de medida, o que dificultava o comércio entre as nações. Porém já se pensava na possibilidade de um sistema único, universal, decimal. Não foi fácil conseguir essa uniformização, mas, no século XVIII, a Academia de Ciências da França nomeou uma comissão de grandes cientistas – como os matemáticos francês Laplace (1749-1827), italiano Joseph Louis Lagrange (1736-1813) e francês Gaspard Monge (1746-1818) – para fazer um projeto com essa finalidade.

Dos trabalhos dessa comissão, encerrados em 1799, nasceu o sistema métrico decimal, atualmente praticamente universalizado. O metro – a unidade-padrão de medida de comprimento – foi definido como a décima milionésima parte da distância do equador ao polo norte. (Hoje é possível definir o metro de uma maneira mais precisa.)

O sistema métrico decimal só começou a se tornar realidade em 1837, quando seu uso passou a ser obrigatório na França.

Reprodução/Museu Carnavalet, Paris, França.

Gravura francesa do século XVIII, de J. P. Delion, representando o uso de unidades de medida. Encontra-se no Museu Carnavalet, em Paris, França.

No Brasil, ele foi introduzido por uma lei em 26 de junho de 1862. Essa lei era bastante prudente, pois estabelecia um prazo de 10 anos para que cessasse por completo o uso das antigas unidades de medida. Nesse meio-tempo, a mudança foi gradualmente organizada, com a vinda dos novos padrões da França e a inclusão do ensino do sistema métrico decimal nas escolas. A partir de 1º de julho de 1873, o uso do sistema antigo implicaria multas e até prisão.

Capítulo 22 | Tempo e temperatura 287

Faça as atividades no caderno.

Ocorreu então, no Brasil, um fato que entrou para a história. Talvez porque a vigência do novo sistema de medidas tivesse coincidido com um aumento de impostos, algumas províncias do Nordeste tentaram resistir à adoção e desencadearam uma insurreição, que ficou conhecida como Revolta do Quebra-Quilos.

Acervo Images/Alamy/Fotoarena

Cartaz da Revolta do Quebra-Quilos.

Atualmente pode nos parecer absurdo que uma mudança como essa, tão importante para o comércio internacional, pudesse ter acarretado tantas discussões e desentendimentos. Mas, mesmo que não houvesse outros motivos, a tradição enraizada é uma barreira difícil de transpor. Por exemplo, nos Estados Unidos, a maior economia do mundo, o sistema métrico decimal ainda não substituiu o sistema inglês de pesos e medidas, tradicional do país. Esse sistema inclui unidades como o pé e a milha (unidades de medida de comprimento) e a libra (de massa), e ainda está em pleno uso.

Fonte dos dados: MAGALHÃES JÚNIOR, Raimundo. *O império em chinelos*. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1957; SMITH, David E. *History of Mathematics*. New York: Dover, 1953. v. 2.

1. No caderno, escreva com algarismos "um décimo milionésimo", valor de referência na constituição da unidade de medida metro no século XVIII.
2. O texto fala em "províncias" do Nordeste. Como passaram a se chamar as províncias no Brasil, com o regime republicano?
3. Responda às perguntas.
   a) Qual era o regime político do Brasil em 1873?
   b) Quem era o mandatário supremo?
   c) Qual era o papel do chefe do Gabinete nesse regime?
4. Temos que 1 libra equivale a 453,6 g. Qual é a medida de massa aproximada, em libras, de uma pessoa com 72 kg?
5. Em inglês, como são chamadas as unidades de medida pé e libra? Pesquise para descobrir.

As imagens não estão representadas em proporção.

35 M.P.H. FOR 3 MI.

Placas que indicam medida de velocidade máxima (35 milhas por hora, ou 35 M.P.H., correspondem a aproximadamente 56 quilômetros por hora) e medida de distância (3 milhas, ou 3 MI., correspondem a aproximadamente 4,8 quilômetros).

288 Unidade 8 | Massa, volume, capacidade, tempo e temperatura

Reprodução de seção *Na História*, páginas 287 e 288, volume 6 do Livro do Estudante.

O trabalho com essa seção mobiliza com mais ênfase a **CG01** e a **CEMAT01** ao promover a valorização e utilização dos conhecimentos historicamente construídos para compreender a realidade, assim como o reconhecimento da Matemática como uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos.

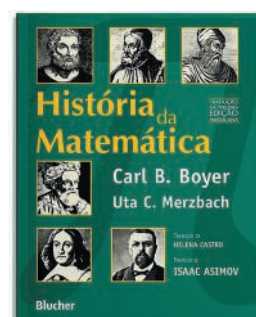
Proposta para o professor

O livro indicado a seguir é o primeiro escrito por uma mulher brasileira sobre a História da Matemática. A linguagem é acessível e apresenta diversas reflexões sobre conceitos já arraigados que podem e devem ser questionados. É interessante destacar alguns trechos ou histórias para promover um debate com os estudantes.

ROQUE, Tatiana. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 1. ed. São Paulo: Zahar, 2012.

Reprodução/Zahar

Indicamos a seguir outra sugestão a respeito da História da Matemática que serve de referência para estudos e consultas. A obra traz a história dos conceitos, biografias de diferentes matemáticos e contribuições das principais civilizações para a criação da Matemática como concebida atualmente.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

Reprodução/Blucher

Sugerimos, ainda, o livro do pesquisador grego Georges Ifrah, que faz um "passeio" pela História da Matemática, acompanhando a evolução do raciocínio de nossos ancestrais desde a Pré-História, passando por civilizações como a dos egípcios, babilônios, fenícios, gregos, romanos, hebreus, maias, chineses, hindus e árabes.

IFRAH, Georges. *Os números*: a história de uma grande invenção. Rio de Janeiro: Globo, 1992.

Há mais de duas décadas, o termo Etnomatemática saiu dos meios acadêmicos e adentrou os documentos oficiais, currículos, programas de ensino e materiais didáticos das escolas. O célebre professor Ubiratan D'Ambrosio (1932-2021) foi o precursor e principal cientista brasileiro a se dedicar ao tema. Em razão de suas ideias e produções acadêmicas, que contemplam todos os níveis de ensino da Matemática, ele tornou-se um profissional reconhecido, respeitado e referenciado mundialmente.

Reprodução/Antonio Scarpinetti/SEC/Unicamp

Ubiratan D'Ambrosio. Foto de 2007.

Na obra *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*, o professor Ubiratan esclarece como nasceu a palavra Etnomatemática:

> Para compor a palavra Etnomatemática utilizei as raízes *tica*, *matema* e *etno* para significar que há várias maneiras, técnicas, habilidades (*ticas*) de explicar, de entender, de lidar e de conviver com (*matema*) distintos contextos naturais e socioeconômicos da realidade (*etnos*). (D'AMBROSIO, 2011, p. 70)

Nessa mesma obra, ele define o conceito: Etnomatemática é a Matemática praticada por grupos culturais, como comunidades urbanas e comunidades rurais, grupos de trabalhadores, classes profissionais, crianças de uma faixa etária específica, sociedades indígenas e tantos outros grupos que se identificam por objetivos e tradições comuns.

A Etnomatemática tem o objetivo de preservar e estudar as particularidades de cada indivíduo e as culturas e os conhecimentos matemáticos adquiridos, pois compreende que o ser humano se desenvolve continuamente e, por isso, ressignifica as técnicas e adota novas, compondo a própria maneira de explicar a realidade. Tais conhecimentos são transmitidos pela interação e a comunicação em ambientes distintos, nos quais os sujeitos circulam, incluindo a escola, o trabalho, a comunidade ou o bairro em que residem, entre outros.

É importante lembrar que, assim como a História da Matemática, a Etnomatemática se apoia nos contextos culturais, mas não apenas neles: também envolve a localização temporal e o espaço no qual o indivíduo circula.

Apoiar-se nos pressupostos da Etnomatemática é um caminho promissor para trabalhar com o contexto dos estudantes, pois considera e valoriza os saberes que trazem, constituídos pelas vivências deles. Há várias possibilidades de mobilizar tais saberes ao longo das aulas de Matemática, por exemplo: ao discutir o orçamento doméstico de uma família, é possível identificar práticas culturais para lidar com o consumo e com o alimento.

No exemplo a seguir, do volume 9 da coleção, os estudantes são levados a entender o conceito de inflação e de que maneira ela pode afetar as relações de consumo. Além disso, são convidados a compartilhar, em grupos, informações de como driblar a alta dos preços usando um material de divulgação – o que potencializa o processo de aprendizagem e o espírito de cooperação entre pares.

Educação financeira

Faça as atividades no caderno.

Inflação

Inflação: Veja cinco dicas de educação financeira para jovens driblarem a alta dos preços no orçamento

Investigação das despesas e revisão dos hábitos de consumo ajudam na organização das finanças

Os jovens entre 20 e 30 anos experimentam pela primeira vez o cenário de inflação alta, prolongada e dispersa entre os preços de vários produtos e serviços do cotidiano, dos transportes aos alimentos. [...]

Veja a seguir as principais dicas dos economistas para quem está começando a vida adulta em meio à inflação elevada:

1. Investigue despesas e elimine os gargalos

O primeiro passo recomendado por especialistas é identificar para onde vai o dinheiro. Vale usar a tecnologia e registrar gastos num *app* de finanças para acompanhar a evolução dos gastos. "É preciso saber quanto se gasta com cada coisa para identificar os gargalos e eliminá-los rapidamente. Às vezes a pessoa paga muita coisa no cartão de crédito ou no débito automático e não presta atenção na fatura. [...]"

2. Estabeleça suas prioridades

Depois de investigar seu orçamento, reveja seus hábitos de consumo e estabeleça prioridades para a alocação do seu dinheiro. "Coloque em ordem aquilo que é importante: alimentação, moradia, transporte e lazer. Para quem tem filhos, inclua a educação deles logo depois de alimentação e moradia." [...]

3. Pesquise em diferentes estabelecimentos

Pesquisar preços é a chave para o consumidor, principalmente em tempos de remarcações. "Não fica pensando que cinco reais a mais no preço do arroz é pouco porque é o somatório desse pouco que impacta no fim do mês. E se precisar comprar um remédio ou outro item que não estava previsto, nunca compre no primeiro lugar que encontrou." [...]

4. Invista em qualificação

Mesmo com o poder de compra reduzido, economistas reforçam que o investimento em educação é fundamental para o jovem aumentar a sua produtividade, conseguir melhores posições no mercado e aumentar sua renda. "É bom ficar de olho nas oportunidades de emprego que estão despontando no mercado e ver que tipo de curso é preciso fazer para se colocar melhor. A qualificação deve ser uma prioridade mesmo com a renda mais curta, porque é uma forma de o jovem crescer mais rapidamente." [...]

5. Planeje o seu futuro

É preciso deixar de lado a mentalidade imediatista e pensar no longo prazo. Economistas explicam que é importante que os jovens invistam parte do que ganham de olho no futuro, inclusive para complementar a aposentadoria. "Não deixe seu dinheiro parado, mesmo que seja pouco. [...]"

NALIN, Carolina. Inflação: Veja cinco dicas de educação financeira para jovens driblarem a alta dos preços no orçamento. *O Globo* [s. l.], 17 abr. 2022. Disponível em: https://oglobo.globo.com/economia/macroeconomia/inflacao-veja-cinco-dicas-de-educacao-financeira-para-jovens-driblarem-alta-dos-precos-no-orcamento-25477776. Acesso em: 18 abr. 2022.

A alta dos preços dos alimentos contribui para o aumento da inflação.

1. Após a leitura do texto, junte-se a um colega e responda no caderno.
   a) Você se lembra o que pesquisou sobre inflação e como medi-la? Explique com suas palavras.
   b) Quais são as consequências da inflação?
2. Você já ouviu falar sobre deflação? Pesquise o significado do termo e, depois, com os colegas e o professor, respondam: A deflação pode ser um problema para a economia? Por quê?
3. Com base nos dados do texto, elabore, em grupo com mais 4 estudantes, um material de divulgação que possa ser disponibilizado em sua comunidade escolar com as dicas para driblar a alta dos preços; para tanto podem ser elaborados cartazes, *posts* em redes sociais, vídeos em *softwares* gratuitos, entre outros.

100 Unidade 4 | Cálculo algébrico

Reprodução da seção *Educação financeira*, página 100, volume 8 do Livro do Estudante.

Outra proposta interessante é, ao trabalhar em comunidades rurais, suscitar discussões sobre como se faz a medição de terras e das respectivas áreas. Mobilizar saberes matemáticos não escolares dos estudantes é uma ótima solução para o aprofundamento de temas, pois incentiva e instiga o interesse deles pela Matemática.

Proposta para o professor

No *site* Mentalidades Matemáticas é possível saber mais sobre a Etnomatemática na visão de D'Ambrosio:

AS LIÇÕES DE UBIRATAN D'AMBROSIO. *Mentalidades Matemáticas.* Cotia, 17 maio 2021. Disponível em: https://mentalidadesmatematicas.org.br/as-eternas-licoes-de-ubiratan-dambrosio/.

Sugerimos também o vídeo no qual o professor descreve como as bases da Etnomatemática foram sendo estruturadas:

UBIRATAN D'AMBROSIO: ETNOMATEMÁTICA. São Paulo, 1 jun. 2020. 1 vídeo (12 min 10 s). Publicado pelo canal History of Science. Disponível em: https://youtu.be/kUCNDK7DeKs. Acesso em: 3 jun. 2022.

Avaliações em Matemática

Conceituamos avaliação não como uma etapa isolada, mas como parte do processo educativo, no qual você, professor, os estudantes, outros profissionais da escola e os pais ou responsáveis legais dos estudantes participem ativamente.

Uma das possibilidades que podem contemplar esse conglomerado de sujeitos no processo avaliativo é adotar práticas que realmente incluam a todos na dinâmica, ofertando, por exemplo, autoavaliações, avaliações realizadas pelos estudantes sobre a instituição de ensino, organização da turma em grupos de conversa com responsáveis sobre questões relacionadas à aprendizagem direta e indireta, entre outras. Nesse tipo de processo avaliativo, os estudantes podem assumir um compromisso maior com a própria aprendizagem – como preza a educação integral – e compreender que não basta apenas a obtenção de notas, conceitos ou média para aprovação. Com sua mediação, eles devem entender que são partes ativas do processo e devem refletir sobre os avanços individuais ou a necessidade de aprofundamento nos estudos. Com essa perspectiva, as avaliações podem constituir instrumentos de diagnóstico e de acompanhamento contínuo do processo educativo.

Os vários tipos de avaliações fornecem dados sobre o desempenho dos estudantes. Cada um deles tem características e objetivos pedagógicos distintos, por isso é importante conhecer e aplicar o tipo adequado de avaliação em cada momento do processo educacional. Citaremos aqui alguns exemplos para que você os utilize em momento oportuno: **avaliação diagnóstica**, **avaliação de processo** ou **avaliação formativa**, **avaliação comparativa** e **avaliação somativa**.

Cabe destacar também que as avaliações devem servir de diagnóstico e acompanhamento contínuo do processo de ensino e aprendizagem, para o levantamento de pontos de orientação que deem continuidade ao trabalho escolar e incentivem o aprimoramento dos conhecimentos.

É preciso considerar que a pandemia de covid-19 obrigou os professores a buscar novos caminhos para promover a avaliação dos conteúdos que foram ensinados durante o ensino remoto, cujos reflexos continuam reverberando mesmo em um contexto pós-pandêmico. As maneiras de ensinar e demonstrar a aquisição de conhecimento mudaram, portanto, os meios de avaliar também sofreram adaptações condizentes com essa nova realidade.

Nesse contexto, o processo avaliativo deve ser considerado fonte de informações e de reflexão para o professor e o estudante, que devem juntos trilhar caminhos para a reorganização da prática e de posturas frente ao processo de ensino e aprendizagem. As avaliações devem ser conhecidas pelo estudante que foi avaliado, assim como os resultados do que alcançou, contribuindo para que sejam um instrumento de medição da evolução no processo de aquisição de conhecimentos.

É importante compreendermos que o processo de avaliação não é um ato persecutório aos educadores, mas indicador e balizador de atitudes para possíveis mudanças e ressignificações de práticas de aprendizagem na escola e, mais especificamente, na sala de aula de Matemática. Quando implantamos um ambiente de reflexão, conseguimos atingir um planejamento colaborativo, desenvolver a capacidade de aceitar críticas e reordenar o processo, quando for o caso, e, com base nas avaliações, tomar decisões mais acertadas juntos e em prol da comunidade escolar.

Independentemente do tipo de avaliação escolhido, ele deve servir como instrumento de redimensionamento do trabalho desenvolvido. Registre suas observações nos trabalhos, nas provas e atividades dos estudantes para auxiliá-los a perceber por que ainda não alcançaram os objetivos de aprendizagem para o tema tratado e, se já o atingiram, faça um comentário como incentivo.

De acordo com os resultados das avaliações e após as reflexões acerca das metodologias usadas em sala de aula, é possível construir e planejar os caminhos para a recuperação de conteúdos com eficácia real. É também necessário identificar o que precisa ser mudado dali em diante, para favorecer o cumprimento dos objetivos previstos e assumidos pelo coletivo da escola.

Nesta coleção, como citamos, a seção *Na Unidade* traz atividades sobre os principais conteúdos abordados na Unidade e podem ser utilizadas como ferramentas de avaliação. Sugerimos que os estudantes resolvam as atividades individualmente e você os acompanhe durante a execução registrando avanços e dificuldades para, ao final, propor novas atividades de remediação coletiva ou individual de defasagens, conforme cada caso. Nas *Orientações didáticas* deste Manual, apresentamos direcionamentos para o trabalho com as atividades da seção, com algumas sugestões de remediação. No entanto, podem surgir outras dificuldades diferentes das listadas nessas orientações, por isso é importante o monitoramento individual e contínuo dos estudantes.

Na Unidade

Faça as atividades no caderno.

1. Um jogo de futebol teve uma arrecadação de R$ 2.376.541,00. Nesse número, o algarismo da ordem das dezenas de milhar é:
a) 3. b) 4. c) 6. d) 7.

2. **(Enem)** O medidor de energia elétrica de uma residência, conhecido por "relógio de luz", é constituído de quatro pequenos relógios, cujos sentidos de rotação estão indicados conforme a figura:

Disponível em: http://www.enersul.com.br. Acesso em: 26 abr. 2010.

A medida é expressa em kWh. O número obtido na leitura é composto por 4 algarismos. Cada posição do número é formada pelo último algarismo ultrapassado pelo ponteiro.
O número obtido pela leitura em kWh, na imagem, é:
a) 2 614. c) 2 715.
b) 3 624. d) 3 725.

3. Sílvia, Raul e Setsuko terminaram um trabalho escrito, redigido em muitas páginas. As páginas foram numeradas de I a XXIV, todas com símbolos romanos. Quantas vezes eles empregaram o símbolo **V** nas paginações?
a) 5 vezes. c) 9 vezes.
b) 7 vezes. d) 11 vezes.

4. **(Enem)** O quadro apresenta a ordem de colocação dos seis primeiros países em um dia de disputa nas Olimpíadas. A ordenação é feita de acordo com as quantidades de medalhas de ouro, prata e bronze, respectivamente.

País	Ouro	Prata	Bronze	Total
1º China	9	5	3	17
2º EUA	5	7	4	16
3º França	3	1	3	7
4º Argentina	3	2	2	7
5º Itália	2	6	2	10
6º Brasil	2	5	3	10

Se as medalhas obtidas por Brasil e Argentina fossem reunidas para formar um único país hipotético, qual a posição ocupada por esse país?
a) 1º c) 3º e) 5º
b) 2º d) 4º

5. **(Obmep)** Joãozinho subtraiu o menor número de três algarismos diferentes do maior número de três algarismos diferentes. Que resultado ele obteve?
a) 882 c) 885 e) 888
b) 883 d) 886

6. Um produtor colocou no caminhão certa quantidade de caixas de frutas para distribuir nos mercados da cidade. Ele entregou 24 caixas de frutas no mercado *A* e 24 caixas no mercado *B*, ficando com 121 caixas de frutas para distribuir entre outros estabelecimentos.
a) Qual era a quantidade inicial de caixas de frutas que havia no caminhão?
b) Nos dias seguintes, o produtor entregou 25 e 31 caixas no mercado *A*, e 20 e 38 caixas no mercado *B*. Qual mercado recebeu mais caixas ao longo dos 3 dias? Quantas a mais?

7. Das alternativas dadas, qual é a melhor aproximação do resultado da adição 99 + 999?
a) 100 c) 1 100
b) 110 d) 10 100

8. Um número diminuído de 24 unidades resulta em 121. Se for acrescido de 24 unidades resultará em:
a) 97. c) 145.
b) 101. d) 169.

9. **(Obmep)** Em uma mesa há nove cartões numerados de 1 a 9. Ana e Beto pegaram três cartões cada um. A soma dos números dos cartões de Ana é 7 e a soma dos números dos cartões de Beto é 23.
Qual é a diferença entre o maior e o menor dos números dos três cartões deixados sobre a mesa?
a) 3 c) 5 e) 7
b) 4 d) 6

10. **(PUCC-SP)** A soma dos algarismos que compõem a idade de Pedro é 8. Invertendo-se a posição de tais algarismos, obtém-se a idade de seu filho João, que é 36 anos mais novo que ele. A soma das idades de Pedro e João, em anos, é:
a) 82. b) 88. c) 94. d) 96.

37

Reprodução de seção *Na Unidade*, página 37, volume 6 do Livro do Estudante.

Avaliação diagnóstica

Na avaliação diagnóstica, busca-se identificar os conhecimentos prévios dos estudantes e verificar as habilidades ou dificuldades de aprendizagem.

Sugerimos que esse tipo de avaliação seja realizado no início do ano letivo e ao iniciar o trabalho com determinado conteúdo. O objetivo é conhecer melhor os estudantes para identificar e compreender suas necessidades e adaptar as aulas de acordo com a realidade da turma.

Os boxes *Participe* desta coleção podem, de modo geral, ser utilizados como instrumento de avaliação diagnóstica. Além disso, você pode propor aos estudantes que façam testes escritos ou orais, simulados, elaborem pequenos trabalhos ou respondam a um questionário.

Avaliação de processo ou formativa

Na avaliação de processo, o objetivo é averiguar o progresso e as dificuldades de aprendizagem dos estudantes em determinado período. Nesse tipo de avaliação, visa-se aferir o desempenho escolar ao longo do processo de ensino-aprendizagem em um prazo definido, de maneira contínua e sistemática.

Esse modelo pretende acompanhar a evolução da aquisição de conhecimento dos estudantes e dispensa a atribuição de notas. Ele permite que você avalie o desempenho individual dos estudantes e adéque sua prática docente às necessidade de cada educando.

O foco desse tipo de avaliação é a formação; pretende-se verificar se os estudantes alcançaram os objetivos pedagógicos, desenvolveram as competências e habilidades pretendidas. Sugerimos o uso de recursos como produções diversas, atividades em sala de aula, autoavaliação, elaborações audiovisuais, estudos de caso, entre outras.

Avaliação comparativa

Na avaliação comparativa, objetiva-se qualificar o ensino e constituir uma oportunidade de reflexão acerca do que foi aprendido e do que precisa ser ensinado. Sugerimos usar trabalhos simples durante ou ao término das aulas, elaboração de resumos, observação de desempenho, atividades para casa, autoavaliação e avaliação entre pares.

Aqui destaca-se o papel da autoavaliação, que deve ser feita por ambos os envolvidos na aprendizagem em sala de aula: o professor e o estudante. Por meio dela, você é levado a refletir sobre sua prática, reformulá-la e buscar formação específica para melhorá-la visando cada realidade escolar coletiva e particular.

Avaliação somativa

A avaliação somativa, em geral, é aplicada no final de um processo educacional – definido como ano, semestre, trimestre, bimestre ou ciclo. A principal característica no processo de aprendizagem é a assimilação dos conteúdos pelos estudantes pela associação com notas ou conceitos, e tem caráter classificatório. Nesse tipo de avaliação, em geral, utilizam-se exames avaliativos, de múltipla escolha ou dissertativos.

Enfatizamos que as avaliações escolares devem acontecer de maneira contínua e fazer parte de um ciclo avaliativo. Os resultados são essenciais para fundamentar decisões e possibilitar a atuação estratégica dos educadores. O objetivo principal de um ciclo avaliativo não deve ser a classificação, mas a possibilidade de replanejamento e a proposição de uso de novos recursos para transmitir o conteúdo aos estudantes com base em outras abordagens metodológicas de transmissão de conhecimentos.

Avaliações externas

As **avaliações externas de desempenho**, também conhecidas como **avaliações em larga escala**, visam aferir a qualidade do ensino e servem como instrumento de monitoramento e para elaboração de políticas públicas.

No Ensino Fundamental temos o Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), que é um conjunto de avaliações externas em larga escala com o qual o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep) elabora um diagnóstico da Educação Básica brasileira e de fatores que podem interferir no desempenho do estudante.

> Por meio de testes e questionários, aplicados a cada dois anos na rede pública e em uma amostra da rede privada, o Saeb reflete os níveis de aprendizagem demonstrados pelos estudantes avaliados, explicando esses resultados a partir de uma série de informações contextuais.
>
> O Saeb permite que as escolas e as redes municipais e estaduais de ensino avaliem a qualidade da educação oferecida aos estudantes. O resultado da avaliação é um indicativo da qualidade do ensino brasileiro e oferece subsídios para a elaboração, o monitoramento e o aprimoramento de políticas educacionais com base em evidências.
>
> As médias de desempenho dos estudantes, apuradas no Saeb, juntamente com as taxas de aprovação, reprovação e abandono, apuradas no Censo Escolar, compõem o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (Ideb).
>
> Realizado desde 1990, o Saeb passou por uma série de aprimoramentos teórico-metodológicos ao longo das edições. A edição de 2019 marca o início de um período de transição entre as matrizes de referência utilizadas desde 2001 e as novas matrizes elaboradas em conformidade com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

BRASIL. Ministério da Educação. *Sistema de Avaliação da Educação Básica* (Saeb). Brasília, DF: Inep, [20--]. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/saeb. Acesso em: 13 jun. 2022.

O Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (Pisa) tradução de *Programme for International Student Assessment*, é um estudo comparativo internacional realizado a cada três anos pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE). O Pisa para Escolas é específico para estudantes de 15 anos e 3 meses a 16 anos e 2 meses, independentemente do ano escolar em que estejam, desde que matriculados a partir do 7º ano do Ensino Fundamental. Nos países mais desenvolvidos, em que não há repetência ou ela é apenas residual, os estudantes elegíveis para o Pisa para Escolas devem estar cursando o equivalente no Brasil ao início do Ensino Médio.

> Os resultados do Pisa permitem que cada país avalie os conhecimentos e as habilidades de seus estudantes em comparação com os de outros países, aprenda com as políticas e práticas aplicadas em outros lugares e formule suas políticas e programas educacionais visando à melhora da qualidade e da equidade dos resultados de aprendizagem.
>
> O Inep é o órgão responsável pelo planejamento e a operacionalização da avaliação no país, o que envolve representar o Brasil perante a OCDE, coordenar a tradução dos instrumentos de avaliação, coordenar a aplicação desses instrumentos nas escolas amostradas e a coleta das respostas dos participantes, coordenar a codificação dessas respostas, analisar os resultados e elaborar o relatório nacional.
>
> O Pisa avalia três domínios – leitura, matemática e ciências – em todas as edições ou ciclos. A cada edição é avaliado um domínio principal, o que significa que os estudantes respondem a um maior número de itens no teste dessa área do conhecimento e que os questionários se concentram na coleta de informações relacionadas à aprendizagem nesse domínio. A pesquisa também avalia domínios chamados inovadores, como resolução de problemas, letramento financeiro e competência global.
>
> Desde sua primeira edição, em 2000, o número de países e economias participantes tem aumentado a cada ciclo. Em 2018, 79 países participaram do Pisa, sendo 37 deles membros da OCDE e 42 países/economias parceiras. O Brasil participa do Pisa desde o início da pesquisa.
>
> BRASIL. Ministério da Educação. *Programa Internacional de Avaliação de Estudantes* (Pisa). Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/avaliacao-e-exames-educacionais/pisa. Acesso em: 13 jun. 2022.

Formação continuada

O professor de Matemática precisa estar sempre em busca de aprimorar o que sabe sobre essa ciência e área do conhecimento, além de obter informações sobre os mecanismos de aprendizagem. Para coordenar um curso de Matemática é preciso conhecer não apenas o programa curricular, mas de informações sobre a história das descobertas matemáticas, curiosidades, leituras recomendadas, brincadeiras e jogos lógico-matemáticos, bons livros paradidáticos para incentivar o interesse, etc. Pensando nisso, tomamos a liberdade de sugerir livros, revistas e *sites* que podem contribuir para o aprimoramento da formação dos colegas que trabalham como professores de Matemática no Ensino Fundamental. (Todos os *sites* foram acessados em 3 jun. 2022.).

Aprofundamento em Matemática

1. *Coleção Matemática: aprendendo e ensinando*, de vários autores (São Paulo: Atual/Mir, 1995).
Essa coleção é composta de traduções de uma coleção russa publicada pela editora Mir e complementada por obras de autores nacionais. Cada volume aborda um tema de Matemática, em linguagem acessível. Os volumes a seguir podem ser úteis para a formação voltada ao Ensino Fundamental: *Sistemas de numeração*; *A demonstração em Geometria*; *Curvas notáveis*; *Figuras equivalentes e equicompostas*; *Método de indução matemática*; *Erros nas demonstrações geométricas*; *Equações algébricas de grau qualquer*; *Atividades em Geometria*; *Construindo gráficos*.

2. *A Matemática do Ensino Médio*, v. 1, de Elon Lages Lima e outros (Rio de Janeiro: SBM, 2016).
Essa obra apresenta noções de conjuntos, um estudo das diferentes categorias numéricas e a ideia geral das funções.

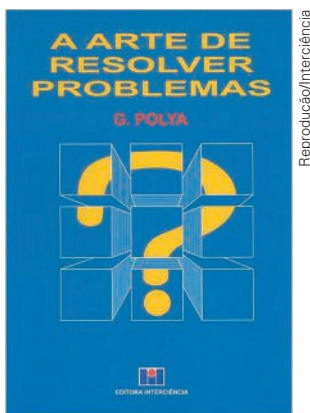
3. *Estatística básica*, de Wilton de O. Bussab e Pedro A. Morettin (São Paulo: Saraiva, 2017).
A obra aborda a análise de dados unidimensionais e bidimensionais, com atenção especial para métodos gráficos, conceitos básicos de Probabilidade e variáveis aleatórias, tópicos principais da interferência estatística, além de alguns temas especiais, como regressão linear simples.

4. *Probabilidade e Estatística*, v. 1, de William Mendenhall (Rio de Janeiro: Campus, 1985).
No capítulo 1, o autor procura identificar a natureza da Estatística, os objetivos e o modo que exerce importante função nas ciências, na indústria e particularmente em nossa vida diária. Os exercícios são classificados por assunto: meio ambiente, engenharia/tecnologia, economia/negócios, política, agricultura, educação, etc.

Ensino-aprendizagem em Matemática

1. *A arte de resolver problemas*, de George Polya (Rio de Janeiro: Interciência, 1978).

Analisa métodos criativos de resolução de problemas, revela as quatro etapas básicas para solução de qualquer problema e sugere modos de trabalhar os problemas em sala de aula.

Reprodução/Interciência

2. *Didática da resolução de problemas de Matemática*, de Luiz Roberto Dante (São Paulo: Ática, 1999).

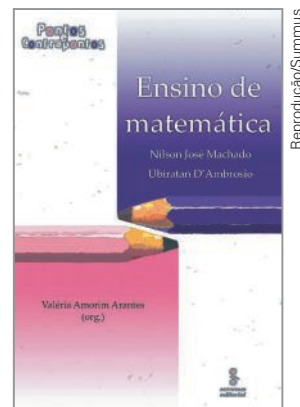
A obra mostra os objetivos da resolução de problemas, os vários tipos de problemas, as etapas da resolução e o encaminhamento da solução de um problema em sala de aula. Sugere, ainda, maneiras de propor enunciados e como conduzir os problemas em sala de aula. Os exemplos têm em vista especialmente o Ensino Fundamental.

3. *Anuários do Conselho Nacional de Professores de Matemática dos EUA*, NCTM (São Paulo: Atual, 1995).

A coleção é formada por traduções de livros-anuários do Conselho Nacional de Professores de Matemática (a sigla em inglês é NCTM) dos Estados Unidos. Cada livro aborda um tema sob a ótica do ensino-aprendizagem da Matemática, à luz da experiência de professores estadunidenses. Sugerimos os seguintes volumes para o aprofundamento dos estudos dedicados à prática no Ensino Fundamental: *Aprendendo e ensinando Geometria*; *Aplicações da Matemática escolar*; *As ideias da Álgebra*; *A resolução de problemas na Matemática escolar*.

4. *Ensino de Matemática: pontos e contrapontos*, de Nílson José Machado, Ubiratan D'Ambrosio e Valéria Amorim Arantes (org.) (São Paulo: Summus, 2014).

Nesse livro, os autores tratam de diferentes aspectos do ensino da Matemática e analisam questões históricas, epistemológicas, sociais e políticas.

Reprodução/Summus

5. *O raciocínio na criança*, de Jean Piaget (São Paulo: Record, 1967).

Piaget – importante pensador do século XX e defensor da abordagem interdisciplinar para a investigação epistemológica – discorre sobre o desenvolvimento do raciocínio na criança a partir da lógica. Mostra também como o raciocínio da criança, a princípio egocêntrico, à medida que a socialização se instaura, vai, de etapa em etapa, adquirindo a lógica do pensamento adulto.

6. *As seis etapas do processo de aprendizagem em Matemática*, de Zoltán Pál Dienes (São Paulo: EPU, 1986).

Nessa obra, o autor descreve estudos detalhados sobre as etapas de aprendizagem das crianças ao longo do desenvolvimento cognitivo. É uma obra interessante para o professor que deseja compreender o que o célebre cientista conceitua sobre a aquisição da aprendizagem.

7. *Da realidade à ação*: reflexões sobre educação e Matemática, de Ubiratan D'Ambrosio (São Paulo: Summus, 1986).

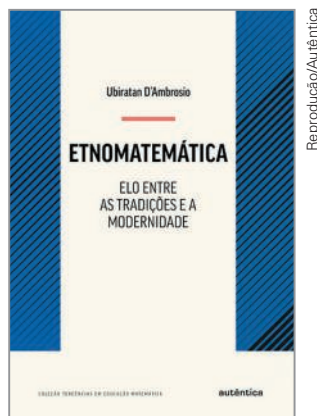
Nesse importante livro da Educação Matemática, Ubiratan D'Ambrosio chama a atenção dos leitores para a importância da educação e da Matemática como modos de emancipação e de crítica social.

8. *Matemática e língua materna*, de Nilson José Machado (São Paulo: Cortez, 2011).

O professor Nilson conduz o leitor por um importante caminho: o de interligar as relações da língua materna com a aprendizagem da Matemática. Discorre sobre a importância da leitura e da literatura nas aulas de Matemática como método para ampliação dos conceitos pelos estudantes que estão em processo de formação da competência leitora.

9. *Etnomatemática* – Elo entre as tradições e a modernidade, de Ubiratan D'Ambrosio (Belo Horizonte: Autêntica, 2016), Coleção Tendências em Educação Matemática.

   Livro clássico da Educação Matemática, no qual o professor Ubiratan apresenta as ideias centrais da Etnomatemática.

Reprodução/Autêntica

10. *Na vida dez*, *na escola zero*, de David Carraher e outros (São Paulo: Cortez, 2011).

    Livro que é referencial teórico com diversos estudos e pesquisas que abordam o uso de práticas não escolares para a formação e a compreensão de conteúdos matemáticos.

11. *O que a Matemática tem a ver com isso? Como professores e pais podem transformar a aprendizagem da Matemática e inspirar sucesso*, de Jô Boaler (Porto Alegre: Penso, 2019).

    Apresenta reflexões atuais e incentiva a escola e os pais a oferecerem práticas desafiadoras e atividades realmente interessantes aos jovens para que aprendam Matemática de maneira curiosa e real.

12. *Por que e para que aprender Matemática?* de Veleida Anahí da Silva (São Paulo, Cortez, 2009).

    Essa obra contribui para estudos sobre o olhar atribuído socialmente à Matemática e como esse fato está relacionado ao sucesso ou fracasso na aprendizagem dessa ciência.

13. *Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula*, de John A. Van de Walle (Porto Alegre: Artmed, 2009).

    Manual descritivo e detalhado com diversas atividades para serem aplicadas no Ensino Fundamental. Traz reflexões e discussões de conceitos para o professor de Matemática.

Revistas e *sites*

Revistas

1. *Revista do Professor de Matemática* (São Paulo: SBM).

   Revista quadrimestral com artigos variados e interessantes para o professor de Matemática. São abordados temas controversos, problemas desafiadores, comentários sobre livros, questões de olimpíadas, experiências pedagógicas inovadoras, etc. Para mais informações sobre a publicação, acesse: http://rpm.org.br.

2. *Nova Escola* (São Paulo: Associação Nova Escola).

   A revista é destinada a professores e gestores e aborda temas como gestão da sala de aula, mudanças de políticas educacionais e muitos outros. Encontra-se disponível nas formas impressa e digital. Para mais informações, acesse: https://novaescola.org.br.

3. *Educação Matemática em Revista* (São Paulo: Sbem).

   Periódico semestral que apresenta temas de interesse dos professores de Matemática. Informações sobre a revista podem ser encontradas em: www.sbembrasil.org.br.

Sites

1. www.bussolaescolar.com.br

   Com *links* para todas as disciplinas escolares, traz uma seção de jogos variados. Clicando em "Matemática", há temas classificados em Ensino Fundamental, Ensino Médio, Geometria e História da Matemática.

2. www.cabri.com (em inglês)

   Cabri-geometre é um *software* educacional desenvolvido especialmente para o ensino de Geometria. No *site* é possível encontrar versões demo para baixar e testar, além dos manuais para utilização.

3. www.geogebra.org (em inglês)

   Disponibiliza o *software* GeoGebra, especialmente desenvolvido para o ensino de Álgebra e Geometria.

4. www.gregosetroianos.mat.br

   Apresenta informações matemáticas diversificadas em linguagem acessível com gráficos animados, artigos, exercícios resolvidos e uma seção sobre erros mais comuns em Matemática.

5. www.matematica.br

   Desenvolvido por professores do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP), o *site* traz informações classificadas por temas matemáticos, informações históricas e indicações de programas e cursos.

6. www.obm.org.br

Traz todas as provas realizadas nas edições da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), com os exercícios resolvidos.

7. www.obmep.org.br

Você encontra todas as provas das edições da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (Obmep), com as questões resolvidas. Além disso, publica bancos de atividades com questões aplicadas em olimpíadas nacionais e internacionais.

8. www.somatematica.com.br

Portal com dicas, curiosidades e material de apoio, incluindo jogos, indicações de livros, DVDs e outros materiais. Conta com uma comunidade virtual, um fórum e um espaço para contato entre professores e estudantes.

9. www2.mat.ufrgs.br/edumatec

Além de artigos e orientações sobre o uso de tecnologias, o *site* disponibiliza *softwares* especialmente desenvolvidos para o ensino de Matemática.

10. https://mentalidadesmatematicas.org.br/

O Mentalidades Matemáticas é uma cocriação do Instituto Sidarta e do Centro de Pesquisas YouCubed, da Universidade de Stanford, cujo objetivo é discorrer sobre os desafios atuais de equidade e letramento matemático.

Uso de tecnologias no ensino

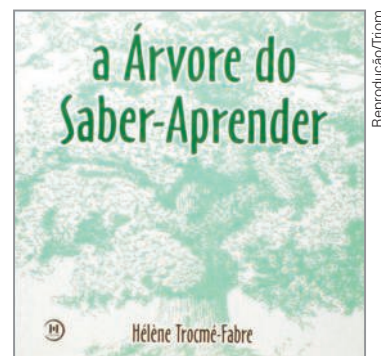
Livros

1. *Escritos sobre tecnologia educacional e educação profissional*, de Jarbas Novelino Barato (São Paulo: Senac, 2002).

O autor analisa questões que considera fundamentais da educação atual, como o uso do computador nos espaços educacionais, a sociedade do conhecimento, os novos meios de comunicação, a natureza do saber técnico, o ensino de técnicas e competências no âmbito da educação profissional e a avaliação do "saber fazer" dos trabalhadores.

2. *A árvore do saber-aprender*, de Hélène Trocmé-Fabre (São Paulo: Triom, 2004).

Essa obra pode conduzir a uma reflexão filosófica sobre a modernidade por abordar questões vitais transdisciplinares. Apresenta uma história e uma modelização para a criação do conhecimento e de saberes.

Reprodução/Triom

3. *Integração das tecnologias na educação*, organizado por Maria Elizabeth Bianconcini Almeida e José Manuel Moran (Brasília, DF: Ministério da Educação/Seed, 2005; disponível em: http://portal.mec.gov.br/seed/arquivos/pdf/iniciaissf.pdf; acesso em: 21 jun. 2022).

Esse material, de acesso livre, é um fascículo com artigos sobre o uso das tecnologias na Educação Básica. Traz ainda discussões sobre o trabalho com projetos e o uso de mídias na escola.

4. *Novas tecnologias e mediação pedagógica*, de José Manuel Moran, Marcos Tarciso Masetto e Marilda Aparecida Behrens (São Paulo: Papirus, 2017).

Os autores apresentam discussões importantes sobre o papel do professor no uso de tecnologias na educação, com a perspectiva de construir novas propostas.

Reprodução/Papirus

5. *A educação que desejamos: novos desafios e como chegar lá*, de José Manuel Moran (São Paulo: Papirus, 2011).

A obra trata das mudanças que as tecnologias trazem para a educação presencial e à distância, em todos os níveis de ensino, abordando o papel de professores e gestores ao desempenhar ações nesse cenário de inovação.

6. *Redes de aprendizagem: um guia para ensino e aprendizagem on-line*, de Linda Harasim, Murray Turoff, Lucio Teles e Starr Roxanne Hiltz (São Paulo: Senac, 2005).

   O livro discorre sobre o uso das tecnologias de informação e comunicação mediadas por computador – correio eletrônico, *bulletin boards system*, sistemas de conferência por computador e a própria internet – e como podem ser utilizadas no Ensino Fundamental, no Ensino Médio, na universidade e na educação de adultos.

Sites

1. http://portaldoprofessor.mec.gov.br

   Disponibiliza recursos como vídeos, imagens e animações para auxiliar o professor em sala de aula.

2. http://tecedu.pro.br/

   Revista eletrônica semestral com artigos e relatos de professores sobre o uso de tecnologias na aula.

3. http://webeduc.mec.gov.br/codigo_aberto

   Oferece *softwares* para uso gratuito em diversas disciplinas como ferramenta de apoio ao processo de ensino e aprendizagem.

4. http://www2.eca.usp.br/moran/

   Disponibiliza textos sobre educação e tecnologias aplicadas ao contexto educacional.

5. https://aedmoodle.ufpa.br/pluginfile.php/292702/mod_resource/content/1/Manual%20de%20Ferramentas%20Web%2020%20p%C2%AA%20Profs.pdf

   Esse manual, disponível no *site* do Ministério da Educação de Portugal, apresenta explicações sobre ferramentas disponíveis na web 2.0 e orientações de como utilizá-las no contexto educacional.

6. https://www.youcubed.org/pt-br/

   A plataforma YouCubed disponibiliza atividades, jogos, aplicativos e videoaulas que podem ser acessados *on-line* e gratuitamente. Foi criada pelo grupo de pesquisa da pesquisadora Jô Boaler, da Universidade de Stanford.

7. TV Escola. Oficina de produção de vídeos. *TV Escola*. Disponível em: https://midiasstoragesec.blob.core.windows.net/001/2017/02/dicas_producao_videos.pdf.

   O material, em formato de oficina, tem o objetivo de motivar estudantes e professores a produzir vídeos.

Referências bibliográficas comentadas

ALMEIDA, Lourdes M. W.; DIAS, Michele R. Um estudo sobre o uso da modelagem matemática como estratégia de ensino e aprendizagem. *Bolema*, Rio Claro, v. 17, n. 22, p. 19-35, 2004. Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10529. Acesso em: 3 jun. 2022.

> O trabalho aborda a modelagem matemática – conceito explanado neste Manual e desenvolvido na coleção – como alternativa pedagógica em cursos regulares. Descreve, em particular, uma atividade de modelagem matemática cujo problema investigado é o crescimento de uma colônia de formigas.

BAGNO, Marcos. *Pesquisa na escola*: o que é, como se faz. São Paulo: Edições Loyola, 2007.

> Por meio de uma abordagem reflexiva que inspirou o trabalho com o tema nesta coleção, o autor apresenta sugestões para prática de pesquisa em sala de aula como fonte de aquisição de conhecimento.

BIEMBENGUT, Maria S.; HEIN, Nelson. *Modelagem matemática no ensino*. São Paulo: Contexto, 2000.

> Nesse livro, a modelagem matemática é levada para o dia a dia da sala de aula, com apresentação de várias possibilidades de trabalho que podem ser aplicadas com apoio dos volumes desta coleção.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*: versão final. Brasília, DF: MEC, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 3 jun. 2022.

> Documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica. As concepções desta coleção, dissertadas neste Manual, estão fundamentadas nas premissas desse documento, assim como as propostas de distribuição de competências, habilidades e objetos de conhecimento ao longo dos volumes.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 3 jun. 2022.

> Documento que explica o contexto histórico e os pressupostos pedagógicos utilizados na construção dos Temas Contemporâneos Transversais. Mostra que a proposição de trabalho com eles visa ao desenvolvimento de uma educação voltada para a cidadania, como explanado neste Manual e praticado nas propostas apresentadas nos volumes da coleção.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: Proposta de Práticas de Implementação. Brasília, DF: MEC, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 3 jun. 2022.

> Documento que traz os TCTs e explicita a ligação deles com os diferentes componentes curriculares, conforme preconizado pela BNCC e presente nas propostas desta coleção.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Etnomatemática*: elo entre as tradições e a modernidade. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

> O livro analisa o papel da Matemática na cultura ocidental e a noção de que Matemática é apenas uma maneira da Etno-Matemática. O autor faz um apanhado de diversos trabalhos dessa área, já desenvolvidos no país e no exterior, que usamos como referência para a elaboração de propostas desta coleção.

DANTE, Luiz R. *Didática da resolução de problemas de Matemática*. São Paulo: Ática, 1989.

> O autor explora a elaboração e a resolução de problemas em sala de aula e apresenta objetivos a serem alcançados nesse trabalho, conforme referenciado neste Manual.

DEMO, Pedro. *Educar pela pesquisa*. 4. ed. Campinas: Autores Associados, 2000.

> O artigo traz reflexões acerca das características necessárias para os professores no mundo contemporâneo e que foram consideradas na elaboração deste Manual.

DISTRITO FEDERAL. Secretaria de Estado de Educação. *Convivência escolar e Cultura de Paz*. Brasília, DF, 2020. Disponível em: https://www.educacao.df.gov.br/wp-conteudo/uploads/2018/02/Caderno-Conviv%C3%AAncia-Escolar-e-Cultura-de-Paz.pdf. Acesso em: 3 jun. 2022.

> Caderno orientador elaborado pela Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal cujo objetivo é mostrar ações para a materialização da Cultura de Paz e conscientização, prevenção e combate a todos os tipos de violência no ambiente escolar. Esse documento foi referencial para concepções explanadas neste Manual a respeito desse importante e urgente tema.

KATO, Mary A. *O aprendizado da leitura*. São Paulo: Martins Fontes, 1990.

A obra faz um apanhado de como ocorrem os mecanismos para o aprendizado da leitura. As reflexões, que foram referência para concepções desta coleção, revelam as preocupações centrais da autora sobre a leitura, seus processos e sua aquisição.

KLEIMAN, Angela B. Modelos de letramento e as práticas de alfabetização na escola. *In*: KLEIMAN, Angela B. (org.). *Os significados do letramento*: uma nova perspectiva sobre a prática social da escrita. Campinas: Mercado de Letras, 1995.

O objetivo dessa obra é informar fatos e mitos sobre o letramento. Os trabalhos apresentados, resultado de pesquisas realizadas no Brasil, percorrem diversas concepções do fenômeno do letramento e serviram de referência para a elaboração desta coleção.

KOVALSKI, Larissa. *O pensamento analógico na Matemática e suas implicações na modelagem matemática para o ensino*. 2016. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2016. Disponível em: https://acervodigital.ufpr.br/bitstream/handle/1884/56193/R%20-%20D%20-%20LARISSA%20KOVALSKI.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 3 jun. 2022.

Esse trabalho insere-se na área de modelagem da Educação Matemática, voltado para a formação conceitual dos professores da disciplina. É uma pesquisa teórica de caráter qualitativo que foi referência para concepções pedagógicas desta coleção. Entendemos ser necessário, para a formação de um professor de Matemática, não apenas o desenvolvimento da parte lógica do pensamento matemático, ligada principalmente a demonstrações e utilização de técnicas dedutivas, mas o estudo dos modos de pensar e conceber a Matemática relacionados a outros tipos de raciocínio argumentativo, como indução, abdução e analogia.

KRULIK, Stephen; REYS, Robert E. (org.) *A resolução de problemas na Matemática escolar*. Trad. de Hygino H. Domingues e Olga Corbo. São Paulo: Atual, 1998.

Coletânea de 22 artigos do National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) elaborados por especialistas em Educação Matemática. Com foco na resolução de problemas, há diversas orientações para ajudar professores tanto na sala de aula quanto na preparação de atividades adequadas aos estudantes do Ensino Fundamental. Foi uma fonte de consulta usada na elaboração de problemas desta coleção.

LASCANE, Mariana M.; HOMSY, Nathalia P. B.; MONTEIRO, Ana Fátima B. Construção do raciocínio lógico matemático. *Unisanta Humanitas*, Santos, v. 8, n. 2, p. 117-127, 2019. Disponível em: https://periodicos.unisanta.br/index.php/hum/article/view/2243. Acesso em: 3 jun. 2022.

A proposta desse trabalho é abordar a construção do raciocínio lógico e as maneiras de trabalhá-lo em sala de aula, e ele serviu de referencial para conceitos e propostas deste Manual.

LORENZATO, Sergio. *Para aprender Matemática*. Campinas: Autores Associados, 2008.

O livro é voltado tanto aos professores de Matemática como aos cursos de formação de professores para o Ensino Fundamental e o Ensino Médio de outras disciplinas. Aborda 25 princípios educacionais cuja aplicação favorece o ensino de qualidade. Apresenta diversos exemplos de situações reais, atividades já testadas em sala de aula e materiais didáticos facilmente reproduzíveis por estudantes e docentes.

MAGALHÃES, Ana Paula de A. S. *et al. A investigação matemática como estratégia de ensino e aprendizagem da Matemática. In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2016, São Paulo. *Anais* [...]. São Paulo: SBEM, 2016. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/4873_3348_ID.pdf. Acesso em: 3 jun. 2022.

O artigo mostra a investigação matemática como estratégia de ensino para o desenvolvimento do pensamento matemático criativo, concepção presente nesta coleção. Propõe sugestões de atividades investigativas e como elas podem ser exploradas em sala de aula na Educação Básica.

MARCONI, Marina de A.; LAKATOS, Eva M. *Fundamentos de metodologia científica*. 9. ed. São Paulo: Atlas, 2021.

A obra traz conteúdos objetivos para auxiliar o desenvolvimento de trabalhos científicos, apresentando procedimentos e variados exemplos que foram consultados na elaboração das propostas desta coleção.

MATTOS, Pablo. *Empatia e cooperação*: competência geral 9 da BNCC. 2020. [Rio de Janeiro]: Futura, 2020. (Curso *on-line*). Disponível em: https://www.futura.org.br/cursos/empatia-e-cooperacao-competencia-geral-9-da-bncc. Acesso em: 3 jun. 2022.

Curso *on-line*, gratuito, para conhecer mais profundamente a competência geral 9 da BNCC e como tal competência deve cumprir seu papel de indução curricular. Traz ainda elementos que podem ser usados no desenvolvimento, planejamento e implementação de práticas pedagógicas úteis ao desenvolvimento da competência geral 9.

MENDES, Iran A.; Chaquiam, Miguel. *História nas aulas de Matemática*: fundamentos e sugestões didáticas para professores. Belém: SBHMat, 2016.

O livro propõe uma maneira de abordar a Matemática da Educação Básica pelo desenvolvimento histórico das ideias matemáticas em sala de aula, o que vai ao encontro da linha pedagógica de algumas seções desta coleção.

MILANI, Débora R. da C. Culturas juvenis, tecnologias da informação e comunicação e contemporaneidade. *Revista Labor*, v. 1, n. 11, p. 123-124, 2014. Disponível em: https://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/23452/1/2014_art_drcmilani.pdf. Acesso em: 3 jun. 2022.

O artigo analisa a contemporaneidade e possíveis impasses diante das culturas juvenis e considera, sobretudo, o uso das Tecnologias da Informação e Comunicação.

MORAN, José. Mudando a educação com metodologias ativas. *In*: SOUZA, Carlos Alberto; MORALES, Ofelia Elisa Torres (org.). *Convergências midiáticas, educação e cidadania*: aproximações jovens. v. II. (Coleção Mídias Contemporâneas). Ponta Grossa: Foca Foto-PROEX/UEPG, 2015. Disponível em: http://www2.eca.usp.br/moran/wp-content/uploads/2013/12/mudando_moran.pdf. Acesso em: 3 jun. 2022.

> Nesse texto, o autor explora o trabalho com metodologias ativas em diversos contextos, além de apresentar alguns modelos escolares inovadores.

NOVAES, Regina. Os jovens de hoje: contextos, diferenças e trajetórias. *In*: ALMEIDA, Maria Isabel M.; EUGENIO, Fernanda (org.). *Culturas jovens*: novos mapas do afeto. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2006.

> Na obra, retrata-se a multiplicidade dos jovens sem nenhum viés preconceituoso, o que também é um preceito defendido por esta coleção. O livro reúne artigos de cientistas sociais que se dedicam a entender os problemas enfrentados atualmente pelas juventudes urbanas no Brasil.

PAVANELO, Elisangela; LIMA, Renan. Sala de aula invertida: a análise de uma experiência na disciplina de Cálculo I. *Bolema*, Rio Claro, v. 31, n. 58, p. 739-759, 2017. Disponível em: https://www.scielo.br/j/bolema/a/czkXrB369jBLfrHYGLV4sbb/abstract/?lang=pt. Acesso em: 3 jun. 2022.

> O artigo apresenta os resultados de uma experiência utilizando o conceito de sala de aula invertida em uma disciplina do Ensino Superior. Aponta as potencialidades, alguns problemas enfrentados e a opinião dos estudantes em relação à metodologia. Apesar de ser uma experiência com estudantes de Ensino Superior, traz importantes reflexões sobre os aspectos metodológicos que foram considerados na elaboração deste Manual e são úteis aos professores da Educação Básica.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas*: um novo aspecto do método matemático. Trad. Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

> O autor apresenta passos para resolução de problemas, além de outras reflexões sobre esse tema que serviram de referência para concepções desta coleção.

ROCK, Gislaine G. T.; SABIÃO, Roseline M. A importância da leitura e interpretação na Matemática. *Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento*, São Paulo, ano 3, v. 1, p. 63-84, 2018. Disponível em: https://www.nucleodoconhecimento.com.br/educacao/interpretacao-na-matematica. Acesso em: 3 jun. 2022.

> O artigo apresenta a importância da leitura e da interpretação na Matemática, tendo como ponto primordial a leitura.

SALA DE AULA INVERTIDA. [*S. l.*], [*s. n.*], 2018. 1 vídeo (2 min 10 s). Publicado pelo canal José Moran. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=fp2eItLz-8M. Acesso em: 3 jun. 2022.

> No vídeo, Moran apresenta uma proposta de trabalho com sala de aula invertida, tipo de metodologia ativa sugerido neste Manual.

SARAIVA, José A. B. Padrão tensivo dos argumentos indutivo, dedutivo e abdutivo. *Revista Estudos Semióticos*, São Paulo, v. 15, 2019. Disponível em: https://www.revistas.usp.br/esse/article/view/153769/172404. Acesso em: 3 jun. 2022.

> O artigo apresenta e descreve três tipos básicos de argumentação (dedutivo, indutivo e abdutivo) que estão incluídos nas propostas didáticas desta coleção.

VINHAL, Maria de Lourdes. *O gênero tira e a argumentação*: uma relação produtiva. 2019. Dissertação (Mestrado profissional) – Universidade Federal de Uberlândia: Programa de Pós-graduação em Letras (PROFLETRAS), Uberlândia, 2019. Disponível em: https://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/25355/3/G%C3%AAneroTiraArgumenta%C3%A7%C3%A3o.pdf. Acesso em: 3 jun. 2022.

> Esse trabalho desenvolve e aplica uma proposta didática em que os estudantes são levados a usar a capacidade argumentativa, o que favorece o desenvolvimento da criticidade e da percepção consciente e participativa do contexto social, econômico e político em que vivem.

WING, Jeannette M. Pensamento computacional: um conjunto de atitudes e habilidades que todos, não só cientistas da computação, ficaram ansiosos para aprender e usar. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, Curitiba, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/4711/pdf. Acesso em: 3 jun. 2022.

> Trata-se da tradução do trabalho intitulado "Computational Thinking", da autora estadunidense Jeannette Wing, que foi referência para as concepções de pensamento computacional desta coleção.

Orientações específicas

Sugestões de cronogramas para o volume

Este volume é composto de 19 capítulos, organizados em 9 Unidades, abordando todas as habilidades da BNCC previstas para o 9º ano do Ensino Fundamental.

Para colaborar com o planejamento de seu trabalho ao utilizar este volume, apresentamos sugestões de distribuição dos conteúdos em cronogramas bimestral, trimestral e semestral. No entanto, você pode organizar conteúdos, capítulos e Unidades seguindo critérios de seleção dos temas de acordo com as necessidades da turma e levando em consideração a carga horária, a grade curricular e o projeto pedagógico da escola.

Para elaboração dessas sugestões de cronograma, foram consideradas 40 semanas letivas, conforme previsto na Lei Federal nº 13.415 de 2017.

<table>
<tr><th colspan="4">Sugestões de organização</th><th>Unidades</th><th>Capítulos</th></tr>
<tr><td rowspan="10">1º semestre</td><td rowspan="7">1º trimestre</td><td rowspan="5">1º bimestre</td><td>Semanas 1 e 2</td><td rowspan="2">Unidade 1: Números e operações com raízes</td><td>Capítulo 1: Números reais</td></tr>
<tr><td>Semanas 3, 4, 5 e 6</td><td>Capítulo 2: Potências e raízes</td></tr>
<tr><td>Semanas 7 e 8</td><td rowspan="2">Unidade 2: Cálculo algébrico</td><td>Capítulo 3: Produtos notáveis</td></tr>
<tr><td>Semana 9</td><td>Capítulo 4: Fatoração de polinômios</td></tr>
<tr><td>Semana 10</td><td rowspan="2">Unidade 3: Equações</td><td>Capítulo 5: Resolução de equações por meio de fatoração</td></tr>
<tr><td rowspan="5">2º bimestre</td><td>Semanas 11 e 12</td><td>Capítulo 6: Equações do 2º grau</td></tr>
<tr><td>Semanas 13 e 14</td><td rowspan="2">Unidade 4: Proporcionalidade e Matemática financeira</td><td>Capítulo 7: Relações entre grandezas</td></tr>
<tr><td rowspan="5">2º trimestre</td><td>Semanas 15 e 16</td><td>Capítulo 8: Porcentuais sucessivos</td></tr>
<tr><td>Semanas 17 e 18</td><td rowspan="3">Unidade 5: Semelhança e aplicações</td><td>Capítulo 9: Teorema de Tales</td></tr>
<tr><td>Semanas 19, 20 e 21</td><td>Capítulo 10: Semelhança de triângulos</td></tr>
<tr><td rowspan="9">2º semestre</td><td rowspan="4">3º bimestre</td><td>Semanas 22 e 23</td><td>Capítulo 11: Relações métricas no triângulo retângulo</td></tr>
<tr><td>Semanas 24, 25, 26 e 27</td><td rowspan="2">Unidade 6: Estatística e Probabilidade</td><td>Capítulo 12: Noções de Estatística</td></tr>
<tr><td rowspan="7">3º trimestre</td><td>Semanas 28 e 29</td><td>Capítulo 13: Contagem e Probabilidade</td></tr>
<tr><td>Semana 30</td><td rowspan="2">Unidade 7: Áreas e polígonos</td><td>Capítulo 14: Diagonais e áreas</td></tr>
<tr><td rowspan="5">4º bimestre</td><td>Semanas 31, 32, 33 e 34</td><td>Capítulo 15: Polígonos regulares</td></tr>
<tr><td>Semanas 35 e 36</td><td rowspan="2">Unidade 8: Círculo, cilindro e vistas</td><td>Capítulo 16: Círculo e cilindro</td></tr>
<tr><td>Semana 37</td><td>Capítulo 17: Projeções ortogonais, vistas e perspectiva</td></tr>
<tr><td>Semana 38</td><td rowspan="2">Unidade 9: Funções</td><td>Capítulo 18: Sistema cartesiano ortogonal</td></tr>
<tr><td>Semanas 39 e 40</td><td>Capítulo 19: Função e suas representações</td></tr>
</table>

Unidade 1

Números e operações com radicais

Objetivos pedagógicos desta Unidade

- Reconhecer que existem segmentos de reta cujas medidas não são expressas por um número racional.
- Reconhecer que um número irracional é um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica.
- Resolver problemas com números reais.
- Reconhecer e empregar unidades usadas para expressar medidas muito grandes ou muito pequenas.

Justificativas

Nesta Unidade tratamos de temas relativos às Unidades temáticas *Números* e *Grandezas e medidas* da BNCC, que se articulam com os objetivos pedagógicos a serem alcançados e norteiam as habilidades a serem desenvolvidas. São abordados temas relacionados aos números reais, como o conceito de número racional e de número irracional para compor o conceito de número real, localização na reta numérica desses números, operações com números reais, adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação, e problemas com números reais explorando suas representações, incluindo a notação científica.

Aqui, são retomados conceitos e o trabalho com resolução de problemas envolvendo números racionais desenvolvidos nos anos anteriores (6º ao 8º ano), e apresentando os números irracionais e os números reais, que embasam a continuidade do estudo dos campos numéricos no Ensino Médio.

Competências gerais trabalhadas nesta Unidade

- CG01
- CG02
- CG03
- CG04
- CG05
- CG06
- CG08
- CG09
- CG10

Competências específicas de Matemática trabalhadas nesta Unidade

- CEMAT01
- CEMAT02
- CEMAT03
- CEMAT04
- CEMAT05
- CEMAT06
- CEMAT08

Habilidades de Matemática trabalhadas nesta Unidade

Capítulo 1

- EF09MA01
- EF09MA02
- EF09MA03

Capítulo 2

- EF09MA01
- EF09MA02
- EF09MA03
- EF09MA04
- EF09MA18

Temas Contemporâneos Transversais trabalhados nesta Unidade

- *Ciência e Tecnologia*
- *Educação Alimentar e Nutricional*
- *Educação Financeira*

Nesta Unidade

A intenção presente nesta Unidade é buscar a compreensão e o uso adequado de operações com números reais, bem como compreender a magnitude destes estudos, tanto em termos de sua aplicação prática e utilitária como na potencialidade de trabalho do poder de abstração do estudante ao lidar com números que não representem tão somente quantidades finitas ou inteiras. No capítulo **1**, são trabalhadas as bases para a compreensão da importância, do uso e de operações envolvendo números reais, preparando, então, as habilidades necessárias para que os estudantes entrem no capítulo **2** munidos de ferramentas suficientes para que o entendimento do capítulo seguinte se torne um passo natural. Por consequência do estudo do conjunto dos números reais, são trabalhadas propriedades e diferenças entre os demais conjuntos numéricos.

No capítulo **2** são estudados os conceitos de potências e raízes. Esse estudo exige uma boa competência para operações com números reais e identificação dos racionais e irracionais. Essas competências são trabalhadas ao longo do primeiro capítulo, mas ainda sem a completa conceituação teórica, que será finalizada apenas no segundo capítulo.

Ao explorar a seção *Na Unidade*, registre as respostas, os acertos e os erros dos estudantes para construir um histórico avaliativo que permita acompanhar o desenvolvimento individual e coletivo, bem como o estudo das demais Unidades

deste volume. De acordo com esse histórico, é possível mapear os obstáculos e remediá-los de maneira mais assertiva.

Objetivos pedagógicos desta Unidade

- Relacionar produtos notáveis à Geometria.
- Resolver problemas utilizando as propriedades dos produtos notáveis.
- Conhecer as propriedades da fatoração para utilização em polinômios.
- Resolver problemas de fatoração de polinômios.

Justificativas

Nesta Unidade, os objetivos estão relacionados à resolução de problemas utilizando as propriedades dos produtos notáveis e a fatoração de polinômios, ampliando os estudos dos anos anteriores do Ensino Fundamental e preparando os estudantes para a continuidade dos estudos de cálculo algébrico no Ensino Médio.

Competências gerais trabalhadas nesta Unidade

- CG01
- CG02
- CG04
- CG07
- CG10

Competências específicas de Matemática trabalhadas nesta Unidade

- CEMAT02
- CEMAT03
- CEMAT04
- CEMAT05
- CEMAT06
- CEMAT08

Habilidades de Matemática trabalhadas nesta Unidade

Capítulo 03

- EF09MA03
- EF09MA04

Capítulo 04

- EF09MA09

Temas Contemporâneos Transversais trabalhados nesta Unidade

- *Direitos da Criança e do Adolescente*
- *Educação Financeira*
- *Educação Fiscal*

Nesta Unidade

O estudo dos casos de produtos notáveis (quadrado da soma de dois termos, quadrado da diferença de dois termos e produto da soma pela diferença de dois termos) utiliza como recurso a representação geométrica paralelamente ao desenvolvimento algébrico para possibilitar que as aprendizagens se efetivem com base no reconhecimento de padrões e regularidades. Os conteúdos prévios necessários são potenciação, radiciação e notação científica, além do caso ax^2 de equação polinomial do 2º grau.

Em seguida, o trabalho envolvendo os casos de racionalização de denominadores é introduzido a partir de um objeto de estudo da Unidade temática *Grandezas e medidas*, possibilitando que os estudantes apliquem os casos de produtos notáveis para racionalizar denominadores.

Ao final desta Unidade, os estudantes devem ser capazes de desenvolver os produtos notáveis pela aplicação algébrica, tanto por meio da propriedade distributiva ou da regularidade dos produtos notáveis quanto por meio da representação geométrica, nos casos de produto da soma pela diferença de dois termos, quadrado da soma e quadrado da diferença de dois termos. Além disso, utilizando os casos de produtos notáveis, espera-se que os estudantes possam compreender o conceito de identidade entre expressões algébricas e diferenciem e apliquem os casos de fatoração estudados: fator comum, agrupamento, trinômio quadrado perfeito e diferença entre dois quadrados, além de reconhecê-los como um processo inverso dos cálculos que envolvem os produtos notáveis.

Seguindo o mesmo processo adotado para a abordagem dos produtos notáveis, os casos de fatoração adquirem significado por meio da representação geométrica e propiciam aos estudantes a possibilidade de relacionar a Álgebra com a Geometria. Isso ocorre por meio da decomposição de figuras planas.

Ao explorar a seção *Na Unidade*, registre as respostas, os acertos e os erros dos estudantes para construir um histórico avaliativo que permita acompanhar o desenvolvimento individual e coletivo, bem como o estudo das demais Unidades deste volume. De acordo com esse histórico, é possível mapear os obstáculos e remediá-los de maneira mais assertiva.

Objetivos pedagógicos desta Unidade

- Compreender diferentes maneiras de resolver problemas envolvendo equações do 2º grau.
- Resolver problemas equacionados na forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$.
- Resolver problemas utilizando equações redutíveis a uma equação do 2º grau.

Justificativas

A Unidade trata de assuntos relacionados à Unidade temática *Álgebra*, que podem ser articulados aos objetos de conhecimento e às habilidades da BNCC, que visam cumprir os objetivos pedagógicos propostos.

De acordo com a BNCC, é importante garantir a integração e a continuidade de processos de aprendizagem pelos estudantes, de maneira a retomar e ampliar as habilidades do 8º ano do Ensino Fundamental, com relação à resolução e à elaboração de problemas que envolvem cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações; à resolução e à elaboração de problemas relacionados a contextos cotidianos, que possam ser representados por sistemas de equações do 1º grau com 2 incógnitas e interpretá-los utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso; e à resolução e à elaboração, com e sem uso de tecnologias, de problemas que possam ser representados por equações do 2º grau do tipo $ax^2 = b$.

Além disso, é desenvolvido o estudo da resolução de equações polinomiais do 2º grau, fazendo uso de técnicas diversificadas como a fatoração e a fórmula de Bhaskara para resolver situações-problema em diferentes contextos.

A resolução de problemas, de acordo com a BNCC, deve ser desenvolvida de maneira a representar e resolver determinados tipos de problema e não como objeto de estudo em si mesmo. Por esse motivo, na Unidade, objetiva-se apresentar diversas situações-problema com contextos que articulam as Unidades temáticas *Geometria*, *Grandezas e medidas* e *Números*.

Durante a resolução de problemas, reforçamos a necessidade de considerar que um problema não é uma atividade de simples aplicação de técnicas e procedimentos já exemplificados, ele constitui-se como uma atividade na qual o estudante é desafiado a mobilizar seus conhecimentos matemáticos e a procurar outros conceitos, sozinho ou em grupo, a fim de elaborar estratégias que o levem a uma solução da situação proposta.

Os conteúdos apresentados nesta Unidade auxiliam na apropriação de conhecimentos que serão abordados no Ensino Médio, como a construção de modelos empregando funções polinomiais do 1º e 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, e a conversão da representação algébrica de uma função em representação geométrica no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra.

Competências gerais trabalhadas nesta Unidade

- CG02
- CG07
- CG08
- CG09
- CG10

Competências específicas de Matemática trabalhadas nesta Unidade

- CEMAT02
- CEMAT03
- CEMAT06
- CEMAT08

Habilidades de Matemática trabalhadas nesta Unidade

Capítulo 5

- EF09MA03
- EF09MA04
- EF09MA09

Capítulo 6

- EF09MA03
- EF09MA04
- EF09MA09

Temas Contemporâneos Transversais trabalhados nesta Unidade

- *Educação Alimentar e Nutricional*
- *Educação Financeira*
- *Saúde*

Nesta Unidade

Nesta Unidade são ampliados os estudos relacionados à Unidade temática *Álgebra* por apresentar situações que demandam a utilização de modelos matemáticos, associados a equações polinomiais do 2º grau, sejam elas situações puramente matemáticas ou relacionadas a problemas contextualizados.

Além disso, ampliamos os estudos de Álgebra realizados nos anos iniciais do Ensino Fundamental, ao resolver uma sentença

algébrica com valor desconhecido, aplicando propriedades matemáticas para determinar esse valor, abordando agora métodos de resolução para equações polinomiais do 2º grau.

No capítulo **5** são abordados assuntos que são pré-requisitos para a resolução de equações polinomiais do 2º grau: produto igual a zero, fatoração e resolução de equações e trinômio do 2º grau.

No capítulo **6** é dado destaque aos métodos de resolução de equações polinomiais do 2º grau: completando quadrados; a fórmula de Bhaskara; e soma e produto das raízes.

Ao explorar a seção *Na Unidade*, registre as respostas, os acertos e os erros dos estudantes para construir um histórico avaliativo que permita acompanhar o desenvolvimento individual e coletivo, bem como o estudo das demais Unidades deste volume. De acordo com esse histórico, é possível mapear os obstáculos e remediá-los de maneira mais assertiva.

Unidade 4

Proporcionalidade e Matemática financeira

Objetivos pedagógicos desta Unidade

- Resolver e elaborar problemas que envolvem a razão de grandezas de mesma espécie ou de grandezas de espécies diferentes.
- Identificar grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais.
- Resolver e elaborar problemas que envolvem proporção e regra de três composta.
- Compreender e realizar cálculos de juros simples e sua relação com a economia (compras, gastos, vendas a prazo, entre outros).
- Resolver e elaborar problemas que envolvem porcentagens sucessivas aplicadas na economia.

Justificativas

Os objetivos desta Unidade são ampliar a compreensão dos estudantes em relação ao entendimento acerca de grandezas físicas e gerais diretamente proporcionais, inversamente proporcionais e, também, grandezas não proporcionais. Espera-se que os estudantes sejam capazes de reconhecer, distinguir e aplicar a ideia de razão e proporção e, com isso, aplicar a chamada "regra de três", seja encontrando incógnitas em problemas propostos, seja compreendendo a relação entre variáveis.

Como parte da evolução dos conceitos indicados no parágrafo anterior, há atividades que levam à compreensão e à aplicação de conceitos matemáticos na economia, principalmente a doméstica, com relação ao uso e às regras do dinheiro, crédito, juros, etc. Dessa maneira, os estudantes têm a oportunidade de prosseguir em seus estudos, resolver questões relevantes de suas vidas e da vida de suas famílias e tomar decisões racionais sobre o uso do dinheiro nos aspectos qualitativo e quantitativo.

Além disso, nesta Unidade é dada continuidade ao trabalho com a Unidade temática *Álgebra*, ampliando o campo de sua aplicação e preparando os estudantes para os próximos anos de estudo.

Competências gerais trabalhadas nesta Unidade

- CG02
- CG06
- CG07
- CG08
- CG10

Competências específicas de Matemática trabalhadas nesta Unidade

- CEMAT01
- CEMAT02
- CEMAT04
- CEMAT05
- CEMAT06
- CEMAT08

Habilidades de Matemática trabalhadas nesta Unidade

Capítulo 7

- EF09MA07
- EF09MA08

Capítulo 8

- EF09MA05

Temas Contemporâneos Transversais trabalhados nesta Unidade

- *Ciência e Tecnologia*
- *Educação Ambiental*
- *Educação Financeira*
- *Educação para o Consumo*
- *Processo de envelhecimento, respeito e valorização do Idoso*
- *Saúde*
- *Trabalho*
- *Vida Familiar e Social*

Nesta Unidade

A Unidade apresenta aos estudantes conceitos de Álgebra trabalhados em anos anteriores, proporcionando uma revisão de alguns deles e o aprofundamento de outros, bem como a ideia de razão entre grandezas de mesma espécie e entre grandezas de espécies diferentes.

O capítulo **7** traz uma revisão de conceitos sobre razão e relações diretamente proporcionais, inversamente proporcionais e não proporcionais. Apresenta como realizar uma divisão proporcional, como comparar mais de duas grandezas, e a regra de três composta. O capítulo lança mão de situações-problema da vida cotidiana dos estudantes e de suas vidas como atores sociais. Também busca-se fazer relações com outros componentes curriculares, como **Geografia**, para ampliar as competências voltadas ao entendimento e à atuação no mundo.

O capítulo **8** introduz os conceitos de taxa de juro e montante, e o cálculo com porcentuais sucessivos. O capítulo se mostra como uma oportunidade para resolução e elaboração de atividades envolvendo os TCTs *Educação Financeira* e *Educação para o Consumo*, além de trabalhar conceitos relacionados à geopolítica na modulação de preços de certos itens, promovendo eventual parceria interdisciplinar com o componente curricular **Geografia**. Também auxilia no aprofundamento do capítulo **7** e de habilidades envolvendo resolução de equações algébricas.

Ao explorar a seção *Na Unidade*, registre as respostas, os acertos e os erros dos estudantes para construir um histórico avaliativo que permita acompanhar o desenvolvimento individual e coletivo, bem como o estudo das demais Unidades deste volume. De acordo com esse histórico, é possível mapear os obstáculos e remediá-los de maneira mais assertiva.

Unidade 5

Semelhança e aplicações

Objetivos pedagógicos desta Unidade

- Reconhecer que existem segmentos de reta cuja medida não é expressa por número racional.
- Demonstrar relações entre as medidas dos ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.
- Resolver problemas de aplicação das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por uma transversal.
- Resolver problemas que envolvem o teorema de Tales.
- Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes.
- Resolver problemas que envolvem os diferentes casos de semelhança de triângulos.
- Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo.
- Resolver problemas de aplicação do teorema de Pitágoras.

Justificativas

Esta Unidade visa retomar e ampliar conhecimentos dos anos anteriores do Ensino Fundamental, de modo a sanar dificuldades e proporcionar a obtenção de conhecimentos essenciais para a continuação dos conteúdos. O conhecimento do conceito de semelhança de triângulos, por exemplo, será necessário para o estabelecimento das relações métricas no triângulo retângulo, assim como o teorema de Pitágoras será importante para a compreensão do ciclo trigonométrico e suas relações. Pensando na interdisciplinaridade, além dos novos conteúdos de Matemática, os conceitos aprendidos nessa Unidade também serão importantes para a aprendizagem de disciplinas importantes do Ensino Médio, como a **Física** e a **Química**.

Competências gerais trabalhadas nesta Unidade

- CG01
- CG02
- CG07
- CG09
- CG10

Competências específicas de Matemática trabalhadas nesta Unidade

- CEMAT01
- CEMAT02
- CEMAT05
- CEMAT06
- CEMAT07
- CEMAT08

Habilidades de Matemática trabalhadas nesta Unidade

Capítulo 9

- EF09MA10
- EF09MA14

Capítulo 10

- EF09MA12

Capítulo 11

- EF09MA13
- EF09MA14

Temas Contemporâneos Transversais trabalhados nesta Unidade

- *Ciência e Tecnologia*

Nesta Unidade

A Unidade trata de temas relacionados à Unidade temática *Geometria*, que podem ser articulados aos objetos de conhecimento e habilidades da BNCC, visando cumprir os objetivos pedagógicos propostos.

No capítulo **9** são abordadas a resolução e a elaboração de problemas, relacionados à proporcionalidade de segmentos, por meio do teorema de Tales.

No capítulo **10** são explorados e demonstrados outros teoremas e propriedades relacionados à semelhança de triângulos.

Já no capítulo **11** são feitos estudos envolvendo o teorema de Pitágoras, quando este é utilizado para resolver problemas de proporcionalidade entre relações de retas paralelas cortadas por secantes.

Ao explorar a seção *Na Unidade*, registre as respostas, os acertos e os erros dos estudantes para construir um histórico avaliativo que permita acompanhar o desenvolvimento individual e coletivo, bem como o estudo das demais Unidades deste volume. De acordo com esse histórico, é possível mapear os obstáculos e remediá-los de maneira mais assertiva.

Estatística e Probabilidade

Objetivos pedagógicos desta Unidade

- Construir gráficos para representar um conjunto de dados.
- Calcular medidas de tendência central e medidas de dispersão para analisar um conjunto de dados.
- Resolver problemas utilizando o princípio fundamental da contagem.
- Calcular a probabilidade de eventos em experimentos aleatórios.
- Resolver problemas que envolvem o cálculo de probabilidade condicional.
- Reconhecer eventos dependentes e eventos independentes em experimentos aleatórios e calcular a probabilidade de ocorrência desses eventos.

Justificativas

O objetivo desta Unidade é ampliar a compreensão dos estudantes em relação à Estatística e à Probabilidade, propondo, para tanto, a resolução de problemas envolvendo contagens, cálculos de medidas de tendência central e de dispersão, oportunizando a vivência com situações que relacionam a Matemática ao cotidiano, uma vez que a Estatística está presente em vários setores da atividade humana.

Reconhecemos a importância da Estatística e do cálculo das probabilidades, uma vez que embasam a ciência, tanto no estudo de fenômenos naturais como em estudos do mercado financeiro, nas previsões esportivas, no desenvolvimento de políticas públicas de segurança, de saúde, etc.

Além disso, nesta Unidade é dada continuidade ao trabalho da Unidade temática *Probabilidade e Estatística*, ampliando o que foi abordado nos anos anteriores do Ensino Fundamental e preparando os estudantes para desenvolver outras habilidades relacionadas a essa Unidade temática.

Competências gerais trabalhadas nesta Unidade

- CG01
- CG02
- CG07
- CG09

Competências específicas de Matemática trabalhadas nesta Unidade

- CEMAT01
- CEMAT02
- CEMAT03
- CEMAT04
- CEMAT05
- CEMAT06
- CEMAT07
- CEMAT08

Habilidades de Matemática trabalhadas nesta Unidade

Capítulo 12

- EF09MA05
- EF09MA21
- EF09MA22
- EF09MA23

Capítulo 13

- EF09MA20

Temas Contemporâneos Transversais trabalhados nesta Unidade

- *Direitos da Criança e do Adolescente*

- *Diversidade Cultural*
- *Educação Ambiental*
- *Educação Financeira*
- *Educação para o Consumo*
- *Educação para o Trânsito*
- *Saúde*
- *Trabalho*
- *Vida Familiar e Social*

Nesta Unidade

A Unidade apresenta aos estudantes uma revisão de conceitos básicos de Estatística já aprendidos em anos anteriores, assim como aprofunda os cálculos de Probabilidade em situações-problema do cotidiano.

No capítulo **12**, a Unidade revisa alguns conceitos como a organização de dados de uma pesquisa em uma distribuição de frequências, em que podemos ter variáveis contínuas, ou seja, representando qualquer valor, assim como variáveis discretas, ou seja, representando valores específicos. O capítulo traz representações gráficas dessas distribuições e propõe a interpretação e a construção de gráficos de colunas, de barras, de setores, de linha, histogramas e pictogramas. São explorados também os cálculos de média, mediana, moda e amplitude.

No capítulo **13**, a Unidade apresenta aos estudantes uma revisão sobre o princípio fundamental da contagem, uma estratégia no formato de um esquema, a árvore de possibilidades para representar eventos em espaços amostrais, oriundos de experimentos aleatórios. Cálculos de probabilidade são apresentados em contextos de situações-problema reais, acerca de assuntos contemporâneos, de grande relevância para o cotidiano dos estudantes e sua formação como cidadão, participante de uma sociedade com demandas urgentes. Outros conceitos também são apresentados, como probabilidade condicional e de independência, além de multiplicação de probabilidades.

Ao explorar a seção *Na Unidade*, registre as respostas, os acertos e os erros dos estudantes para construir um histórico avaliativo que permita acompanhar o desenvolvimento individual e coletivo, bem como o estudo das demais Unidades deste volume. De acordo com esse histórico, é possível mapear os obstáculos e remediá-los de maneira mais assertiva.

Objetivos pedagógicos desta Unidade

- Resolver problemas que envolvem o cálculo da medida de área de triângulos e de quadriláteros notáveis.
- Determinar elementos notáveis de um polígono regular.
- Construir polígonos regulares.

Justificativas

Os objetivos desta Unidade são ampliar a compreensão dos estudantes sobre alguns conceitos de Geometria, dando prosseguimento ao que foi aprendido nos anos anteriores do Ensino Fundamental. Para isso, são propostas situações que envolvem equivalência de figuras, áreas de polígonos regulares, atividades teóricas e práticas. A diversidade de propostas contempla o uso de tecnologia, como o acesso a um *site* que possibilita desenhar figuras e observar sua decomposição em outras figuras equivalentes, oportunizando a vivência com situações que relacionam a Geometria ao cotidiano.

Os conhecimentos de Geometria são fundamentais para que o estudante compreenda sua relação com o espaço em que vive, visualizando-o em sua diversidade de formas, linhas retas e curvas, polígonos, entre outros elementos, permitindo a concretização do que é estudado de forma intuitiva, para depois atingir os conhecimentos formais, passando às aplicações concretas e à realidade. Essa área da Matemática está relacionada a vários campos profissionais, como Engenharia, Arquitetura, Técnicas de fundações, Geologia, Sistemas de comunicações, entre outras.

A abordagem proposta nesta Unidade também tem o objetivo de favorecer o desenvolvimento do uso de tecnologias digitais que possibilitem aos estudantes ampliar seu repertório de maneira que reconheçam a aplicação dos conceitos de Geometria além das páginas do livro didático. O uso de *softwares* gratuitos de Geometria dinâmica favorece a aplicação e a ampliação dos conhecimentos adquiridos pelos estudantes durante as aulas, tornando-os significativos.

Competências gerais trabalhadas nesta Unidade

- CG01
- CG02
- CG04
- CG07
- CG09
- CG10

Competências específicas de Matemática trabalhadas nesta Unidade

- CEMAT01
- CEMAT02
- CEMAT03
- CEMAT05
- CEMAT08

Habilidades de Matemática trabalhadas nesta Unidade

Capítulo 14

- EF09MA13

Capítulo 15

- EF09MA15

Temas Contemporâneos Transversais trabalhados nesta Unidade

- *Ciência e Tecnologia*
- *Educação Ambiental*
- *Educação Financeira*
- *Saúde*

Nesta Unidade

A Unidade apresenta aos estudantes áreas e polígonos, ampliando e formalizando os conhecimentos de Geometria adquiridos nos outros anos do Ensino Fundamental.

No capítulo **15** a Unidade aborda o cálculo de área de alguns triângulos como o retângulo e o equilátero, além de trabalhar a área de alguns quadriláteros notáveis como o retângulo, o quadrado e o paralelogramo. São apresentadas as fórmulas para o cálculo das áreas dessas figuras, assim como suas deduções, de uma forma que o estudante consiga também perceber a aplicação da álgebra em um problema prático.

No capítulo **16** a Unidade trabalha com os estudantes os polígonos regulares, entre eles o pentágono, o hexágono, conhecidos como polígonos regulares, além de polígonos irregulares. São trabalhadas igualmente algumas características desses polígonos, como ângulos internos, ângulos externos, elementos notáveis e área. Os estudantes também serão orientados a como construir esses polígonos corretamente.

Ao explorar a seção *Na Unidade*, registre as respostas, os acertos e os erros dos estudantes para construir um histórico avaliativo que permita acompanhar o desenvolvimento individual e coletivo, bem como o estudo das demais Unidades deste volume. De acordo com esse histórico, é possível mapear os obstáculos e remediá-los de maneira mais assertiva.

Objetivos pedagógicos desta Unidade

- Resolver problemas, estabelecendo relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência.
- Elaborar e resolver problemas que envolvem medidas de volume de prismas e cilindros.
- Reconhecer vistas ortogonais em figuras espaciais.

Justificativas

A Unidade trata de assuntos relacionados às Unidades temáticas *Geometria* e *Grandezas e medidas* articuladas aos objetos de conhecimento e habilidades da BNCC que visam atingir os objetivos pedagógicos propostos.

De acordo com a BNCC, na Geometria é desenvolvido um conjunto de conceitos e procedimentos necessários para o desenvolvimento de modelos que podem auxiliar na resolução de problemas de diferentes áreas de conhecimento. Como é importante garantir a integração e continuidade dos processos de aprendizagem dos estudantes, retomamos e ampliamos objetos de conhecimento anteriores no tocante a resolução e elaboração de problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações, para obtenção de medidas de volume de sólidos geométricos por meio de fórmulas.

Desenvolvemos o estudo sobre círculo e cilindro, retomando e ampliando o conceito de circunferência, introduzindo o comprimento de arco relacionado a um ângulo central da circunferência, bem como o volume de prismas e cilindros. Na sequência, é desenvolvido o conceito de projeção ortogonal de um ponto, uma reta e uma figura tridimensional sobre o plano, preparando para o estudo de vistas ortogonais de figuras espaciais e o desenho de objetos em perspectiva.

Para contribuir com a integração entre a Matemática e outras ciências, abordamos as medidas que expressam de modo quantitativo as grandezas utilizadas no cotidiano.

Os conteúdos apresentados nesta Unidade auxiliam na apropriação de conhecimentos que são abordados no Ensino Médio, como medições e cálculos de perímetro, área, volume e capacidade; emprego de diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície e dedução de expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais; resolução e elaboração de problemas que envolvem o cálculo da medida de área total e de volume de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais, com ou sem apoio de tecnologias digitais; investigação de processos de medida de volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida de volume dessas figuras; e investigação da deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.

Competências gerais trabalhadas nesta Unidade

- CG02
- CG05

- CG09
- CG10

Competências específicas de Matemática trabalhadas nesta Unidade

- CEMAT01
- CEMAT02
- CEMAT05
- CEMAT06
- CEMAT08

Habilidades de Matemática trabalhadas nesta Unidade

Capítulo 16

- EF09MA11
- EF09MA19

Capítulo 17

- EF09MA17

Temas Contemporâneos Transversais trabalhados nesta Unidade

- *Ciência e Tecnologia*
- *Saúde*
- *Trabalho*

Nesta Unidade

A Unidade apresenta aos estudantes conceitos de *Geometria* e *Grandezas e medidas* trabalhados em anos anteriores, proporcionando uma revisão de alguns deles e o aprofundamento de outros.

O capítulo **16** articula esses campos da Matemática durante o desenvolvimento do cálculo do comprimento da circunferência, do cálculo do comprimento de arco de circunferência, da relação entre as medidas do ângulo inscrito e do ângulo central de uma circunferência e do cálculo da medida de volume do cilindro e do prisma.

No capítulo **17** são abordadas a projeção ortogonal e as vistas ortogonais de figuras espaciais e a aplicação desses conceitos na representação de objetos tridimensionais em perspectiva.

Ao explorar a seção *Na Unidade*, registre as respostas, os acertos e os erros dos estudantes para construir um histórico avaliativo que permita acompanhar o desenvolvimento individual e coletivo, bem como o estudo das demais Unidades deste volume. De acordo com esse histórico, é possível mapear os obstáculos e remediá-los de maneira mais assertiva.

Objetivos pedagógicos desta Unidade

- Calcular a medida da distância entre dois pontos em um sistema cartesiano.
- Determinar as coordenadas do ponto médio de um segmento.
- Compreender a noção de função.
- Construir gráficos de função.
- Resolver problemas que envolvem funções.

Justificativas

Os objetivos desta Unidade são de retomada de conteúdos anteriores e reaplicação em um novo contexto, seguindo assim a ideia de currículo em espiral. Conteúdos estudados em anos anteriores do Ensino Fundamental irão convergir para um melhor entendimento dos conceitos de ponto, distância entre pontos, ponto médio e funções.

Como o tema central abordado propõe resolução e modelagem de diversos problemas do cotidiano, os estudantes têm a oportunidade para explorar a Matemática no contexto digital, motivando-os a entender a Matemática como uma ferramenta facilitadora do dia a dia.

Competências gerais trabalhadas nesta Unidade

- CG01
- CG06
- CG07

Competências específicas de Matemática trabalhadas nesta Unidade

- CEMAT01
- CEMAT04
- CEMAT06

Habilidades de Matemática trabalhadas nesta Unidade

Capítulo 18

- EF09MA16

Capítulo 19

- EF09MA06

Temas Contemporâneos Transversais trabalhados nesta Unidade

- *Ciência e Tecnologia*
- *Educação Alimentar e Nutricional*
- *Educação Financeira*
- *Educação para o Consumo*
- *Saúde*
- *Trabalho*

Nesta Unidade

A Unidade apresenta aos estudantes o aprofundamento das noções de Álgebra trabalhadas em anos anteriores, proporcionando uma revisão de alguns dos conceitos e aprofundamento em outros, bem como a ideia de razão entre grandezas de mesma espécie ou espécie diferente. Tal retomada foi realizada também no capítulo **7**, mas a revisão constante de temas de Matemática contribui para a construção de um currículo em espiral, garantindo assim que eventuais defasagens possam ser trabalhadas sempre, mas em diferentes contextos pedagógicos.

No capítulo **18** são trabalhados os conceitos que envolvem localizar e compreender a existência de um ponto em um sistema cartesiano, e que este é localizado e definido a partir de suas coordenadas. Após esse primeiro período, busca-se que os estudantes façam cálculos envolvendo esses pontos que aprenderam a localizar. Em "A medida da distância entre dois pontos", conseguem determinar o segmento de reta que representa a distância ente dois pontos em um plano cartesiano.

No capítulo **19** são aplicadas algumas das habilidades adquiridas no capítulo **18**, no qual a localização de pontos em um sistema cartesiano irá contribuir para uma primeira abordagem na construção de gráficos lineares. Constantemente, nesta Unidade, serão retomados temas anteriores neste mesmo livro, e em anos anteriores, por exemplo, as relações de proporcionalidade entre grandezas e as resoluções de equações algébricas.

Ao explorar a seção *Na Unidade*, registre as respostas, os acertos e os erros dos estudantes para construir um histórico avaliativo que permita acompanhar o desenvolvimento individual e coletivo, bem como o estudo das demais Unidades deste volume. De acordo com esse histórico, é possível mapear os obstáculos e remediá-los de maneira mais assertiva.

Resoluções

Unidade 1

Abertura (p. 9)

Resposta esperada: Perceber que, para constatar se as obras de arte e as construções apresentam razão áurea, basta verificar a relação ou proporção entre dois segmentos de uma linha a e b, que obedecem à equação algébrica: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$.

Capítulo 1

Participe (p. 10)

I. Resposta pessoal. Espera-se que o estudante seja capaz de compor respostas como: $\sqrt{2}$; π; 6,3333333...

II. π é maior do que $\sqrt{2}$, pois $\pi \simeq 3{,}14159265...$ e $\sqrt{2} \simeq 1{,}41421356...$

Participe (p. 13)

a) Exemplo de resposta: O quadrilátero *ABCD* é um quadrado, pois os vértices dele são os vértices dos ângulos retos de 4 triângulos retângulos, como indicado na figura, e os 4 lados são congruentes.

b) $A_{\text{quadrilátero}} = (h + 1)^2$

c) $A_{\text{quadrilátero}} = 2^2 + 4 \cdot \frac{h}{2}$

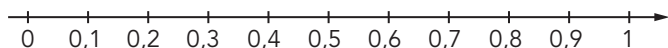
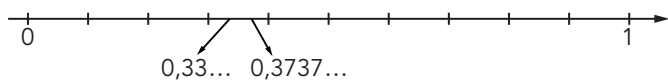
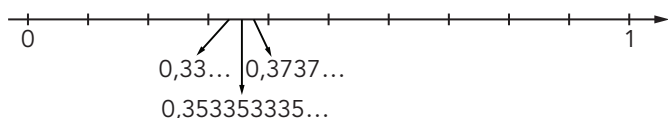
d) $(h + 1)^2 = 2^2 + 4 \cdot \frac{h}{2} \Rightarrow h^2 + 2h + 1 = 4 + 2 \cdot h \Rightarrow$
$\Rightarrow h^2 + 1 = 4 \Rightarrow h^2 = 4 - 1 \Rightarrow h^2 = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow h = \sqrt{3}$ (pois $h > 0$)

Atividades

1. a) Números racionais.

b) Números racionais.

c) Número irracional.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

2. Todos os decimais dados são números racionais.

3. São racionais os números indicados por a, c, d, e; e são irracionais os números b, f.

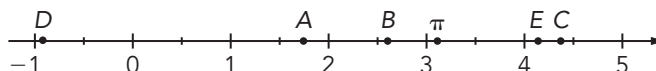
4. $a < b < c < e < f < d$

5. Na lousa há três números irracionais: 0,272272227...; 0,4567891011...; −7,02468101214...

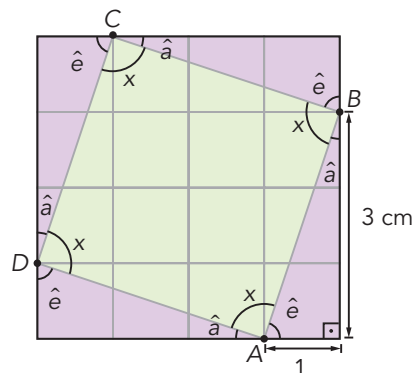
6. Exemplos de resposta: 5,123456789101112... e 3,101100111000...

7. O trecho de 0 a 0,1 está dividido em 10 partes iguais. Como cada parte mede 0,01, temos: *A*: 0,02; *B*: −0,05 e *C*: 0,13.

8. $A \simeq 1{,}73$; $B \simeq 2{,}63$; $C \simeq 4{,}38$; $D \simeq -0{,}92$; $E \simeq 4{,}16$; $\pi \simeq 3{,}14$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

9. *A*: 1,85; *B*: 2,05; *C*: 2,125, *D*: 2,275 e *E*: 2,45.

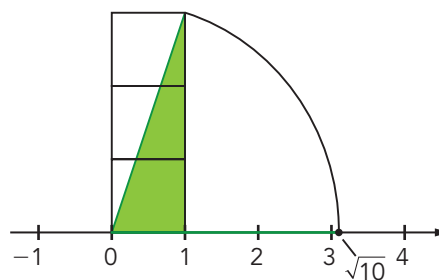
10. a) Cada um dos lados do polígono *ABCD* é diagonal de um retângulo com lados de medidas 1 cm e 3 cm.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Além disso, a diagonal do retângulo o divide em 2 triângulos retângulos congruentes e, por sua vez, em um dos triângulos retângulos, as medidas dos ângulos agudos ($\hat{a}$ e $\hat{e}$ na figura) somam 90°.
Sendo x a medida de cada ângulo interno do polígono *ABCD*, temos: $\text{med}(\hat{a}) + \text{med}(\hat{e}) + x = 180° \Rightarrow 90° + x = 180° \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 90°$.
Logo, como os lados do polígono *ABCD* têm a medida de mesma medida e todos os ângulos internos medem 90°, o polígono *ABCD* é um quadrado.

b) Cada triângulo retângulo dos cantos da figura tem a medida de área igual à metade da medida de área do retângulo de lados medindo 3 e 1, portanto, a medida de área de cada um é 1,5.
$A_{ABCD} = 4^2 - 4 \cdot 1{,}5 = 16 - 6 = 10$

c) Chamando a medida do lado do quadrado de ℓ, como a área mede 10, temos: $\ell^2 = 10 \Rightarrow \ell = \sqrt{10}$ (pois $\ell > 0$).

d) Traçamos o arco de circunferência de centro no ponto associado ao 0 e raio igual à diagonal do retângulo de lados medindo 3 por 1.

Banco de imagens/Arquivo da editora

11.

Número	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
10	x	x	x	x
-10		x	x	x
$\frac{1}{10}$			x	x
0,10101010...			x	x
0,101001000...				x
1,33			x	x
$-1,3333...$			x	x
$-1,343343334...$				x
133	x	x	x	x
-133		x	x	x

12. Exemplos de respostas:

a) 0, 1, 2, 3, ...

b) $-1, -2, -3, ...$

c) $\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{5}{2}, ...$

d) 0,101001000...; 3,123456789101112...; $-6,121122111222...$

13. $\sqrt{5} \simeq 2,24$; $\sqrt{2} \simeq 1,41$

a) $\sqrt{5} + \sqrt{2} = 2,24 + 1,41 \simeq 3,65$

b) $\sqrt{5} - \sqrt{2} = 2,24 - 1,41 \simeq 0,83$

14. $\sqrt{2} \simeq 1,414$; $\sqrt{5} \simeq 2,236$

a) $2\sqrt{2} \simeq 2 \cdot 1,414 \simeq 2,828$

b) $\frac{\sqrt{5}}{2} \simeq \frac{2,236}{2} \simeq 1,118$

c) $\frac{\sqrt{5}}{2} \simeq 1,118$; $2\sqrt{2} \simeq 2,828$

$\frac{\sqrt{5}}{2} - 2\sqrt{2} \simeq 1,118 - 2,828 \simeq -1,710$

d) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} \simeq 2,236 \cdot 1,414 \simeq 3,162$

15. a) $2,3333... = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$; $1,75 = \frac{175^{\div 25}}{100_{\div 25}} = \frac{7}{4}$

$2,3... \cdot 1,75 = \frac{7}{3} \cdot \frac{7}{4} = \frac{49}{12}$

b) $1,2555... = \frac{113}{90}$; $4,444... = \frac{40}{9}$

$1,2555... \cdot 4,444... = \frac{113}{90} \cdot \frac{40}{9} = \frac{452}{81}$

c) $0,757575... = \frac{75}{99}$; $0,6666... = \frac{6}{9}$

$0,757575... : 0,6666... = \frac{75}{99} : \frac{6}{9} = \frac{75}{99} \cdot \frac{9}{6} = \frac{75^{\div 3}}{66_{\div 3}} =$

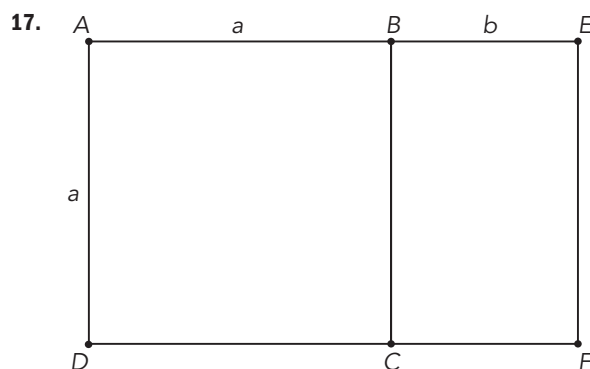
$= \frac{25}{22}$

16. a) 3,14; 3,1416

b) $\frac{c}{80} \simeq 3,14 \Rightarrow c \simeq 80 \cdot 3,14 = 251,2$; ou seja, aproximadamente 251,2 m.

c) $\frac{c}{d} = \pi \Rightarrow c = \pi \cdot d \Rightarrow d = \frac{c}{\pi} = \frac{40\,000}{3,14} \simeq 12\,700$; ou seja, aproximadamente 12 700 km (aproximadamente 127 centenas de quilômetros).

17.

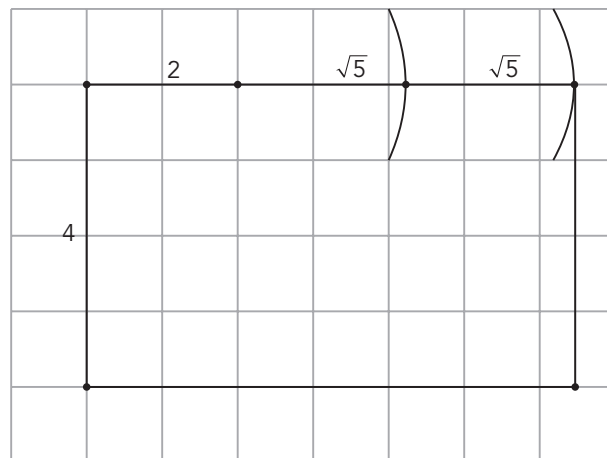
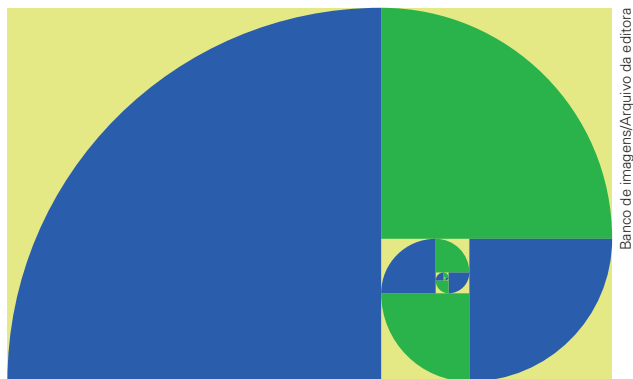
Banco de imagens/Arquivo da editora

De acordo com o texto da abertura, $\frac{a+b}{a}$ é a razão áurea cujo valor exato é representado por $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Então, temos:

$\frac{a+b}{a} = \varphi \Rightarrow a + b = a \cdot \varphi \Rightarrow$

$\Rightarrow a + b = 4 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 2 + 2\sqrt{5} \simeq 2 + 2 \cdot 2,236 =$

$= 2 + 4,472 \simeq 6,47$; ou seja, aproximadamente 6,47 cm.

18. Exemplo de resposta para a construção do retângulo.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Exemplo de resposta do logotipo:

Na mídia

1. a) Raio é qualquer segmento de reta com extremidades no centro da circunferência e em um ponto qualquer dela.
   b) Em uma circunferência, a corda é qualquer segmento de reta que liga 2 de seus pontos.
   c) Diâmetro é qualquer corda da circunferência que passa pelo centro.
   d) A medida do diâmetro de uma circunferência é igual ao dobro da medida do raio dela.
2. Resposta esperada: Um resultado próximo a 3,14.
3. Resposta pessoal.

Na História

1. a) Observando o número 2,01001000100001..., notamos que o algarismo 1 aparece nas seguintes casas decimais:

   Continuando com esse padrão, o próximo algarismo 1 aparecerá na 6ª casa decimal depois do algarismo da 14ª casa decimal, ou seja, na 20ª casa decimal $(14 + 6 = 20)$. Logo, o algarismo que aparece na vigésima casa decimal desse número é o algarismo 1.
   b) Sim, porque tem representação decimal infinita não periódica.
2. $a + b = 2{,}01001000100001\ldots + 3{,}10110111011110\ldots =$
   $= 5{,}111\ldots = 5\frac{1}{9} = \frac{46}{9}$
3. A afirmação **b**, porque $a + b$ não é irracional, embora a e b o sejam.
4. $\frac{3}{4} = \frac{3}{2^2} = \frac{3 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{75}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{75}{100} = 0{,}75$
5. $\frac{2}{31}$ e $\frac{5}{34}$.
6. No escrito babilônico:

$$\sqrt{2} \simeq 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} =$$
$$= \frac{60^3 + 24 \cdot 60^2 + 51 \cdot 60 + 10}{60^3} =$$
$$= \frac{216\,000 + 86\,400 + 3\,060 + 10}{60^3} = \frac{305\,470}{216\,000} \simeq$$
$$\simeq 1{,}41421296$$

Com calculadora, $\sqrt{2} \simeq 1{,}41421356$. Então:
$1{,}41421356 - 1{,}41421296 = 0{,}0000006\ldots$
A diferença é 0,00000066608..., ou seja, menor do que 1 milionésimo.

7. Exemplo de resposta: 1,42421421142111421111... (supondo que o padrão da parte decimal desse número se repita indefinidamente).
   Outro exemplo seria o seguinte: $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$.

Capítulo 2

Participe (p. 26)

a) 1 trilhão $= 1\,000\,000\,000\,000 = 1 \cdot 10^{12} = 10^{12}$
b) 19 trilhões $= 19\,000\,000\,000\,000 = 1{,}9 \cdot 10^{13}$
c) $0{,}765 = 7{,}65 \cdot 10^{-1}$

Atividades

1. a) 10 000; 10^4.
   b) 100 000 000; 10^8.
   c) 0,1; 10^{-1}.
   d) 0,001; 10^{-3}.
2. a) 51 algarismos.
   b) 51 casas decimais.
3. a) 1 000
   b) 100 000
   c) 0,01
   d) 0,000001
   e) −0,001
   f) 1
4. a) A Rússia, pois a medida de área do seu território é $1{,}125 \cdot 10^7$ km², que é a maior medida de área se comparada com a dos outros países do BRICS.
   b) A maior população é a da China: $1{,}4 \cdot 10^9$ habitantes.
5. Temos que 24 rupias = 2,4 renminbis. Então:
   1 rupia $= \frac{2{,}4}{24}$ renminbis $= \frac{1}{10}$ renminbi $= 10^{-1}$ renminbis.
   Logo, 1 rupia valia 10^{-1} renminbis.
6. 1 ano é equivalente a $365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60$ s $= 31\,536\,000$ s, logo 10^{10} s é equivalente a $\frac{10\,000\,000\,000}{31\,536\,000}$ anos, ou seja, aproximadamente 317 anos.
7. a) $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$
   $(-4)^3 = (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) = -64$
   $(0{,}25)^2 = 0{,}25 \cdot 0{,}25 = 0{,}0625$
   b) $(-6)^2 = (-6) \cdot (-6) = 36$
   $(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243$
   $(0{,}2)^3 = 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}008$
   c) $(0{,}9)^2 = 0{,}9 \cdot 0{,}9 = 0{,}81$
   $(0{,}1)^3 = 0{,}1 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}1 = 0{,}001$
   $(1{,}5)^2 = 1{,}5 \cdot 1{,}5 = 2{,}25$
   d) $10^1 = 10$
   $\left(\frac{7}{3}\right)^0 = 1$
   $(1{,}7)^0 = 1$
   e) $10^0 = 1$
   $\left(-\frac{1}{5}\right)^1 = -\frac{1}{5}$
   $0^{10} = 0$

f) $8^{-2} = \frac{1}{8^2} = \frac{1}{64}$

$6^{-1} = \left(\frac{1}{6}\right)^1 = \frac{1}{6}$

$\left(\frac{3}{8}\right)^{-2} = \frac{64}{9}$

8. a) $(1{,}5\ m)^2 = (1{,}5\ m) \cdot (1{,}5\ m) = 2{,}25\ m^2$

b) $(1{,}5\ m)^3 = (1{,}5\ m) \cdot (1{,}5\ m) \cdot (1{,}5\ m) = 3{,}375\ m^3$

c) $3{,}375\ m^3 = 3{,}375 \cdot 10^3\ L = 3\,375\ L$

9. a) $10^5 = 100\,000$

b) $10^{-3} = 0{,}001$

c) $2^6 = 64$

d) $7^3 = 343$

e) $\left(\frac{3}{10}\right)^2 = (0{,}3)^2 = 0{,}09$

f) $\left(\frac{4}{3}\right)^0 = 1$

10. $10^{2x-4} = 10^0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

11. As densidades demográficas, em hab./km², são:

Brasil: $\frac{2{,}04 \cdot 10^8}{8{,}5 \cdot 10^6} = \frac{204}{8{,}5} \simeq 24{,}0$

Rússia: $\frac{1{,}46 \cdot 10^8}{1{,}125 \cdot 10^7} = \frac{14{,}6}{1{,}125} \simeq 13{,}0$

Índia: $\frac{1{,}25 \cdot 10^9}{3{,}287 \cdot 10^6} = \frac{1\,250}{3{,}287} \simeq 380{,}3$

China: $\frac{1{,}37 \cdot 10^9}{9{,}6 \cdot 10^6} = \frac{1\,370}{9{,}6} \simeq 142{,}7$

África do Sul: $\frac{5{,}5 \cdot 10^7}{1{,}221 \cdot 10^6} = \frac{55}{1{,}221} \simeq 45{,}0$

Logo, Índia.

12. a) $\underbrace{365\,000}_{5\ \text{casas}} = 3{,}65 \cdot 10^5$

b) $\underbrace{11\,000\,000\,000\,000}_{13\ \text{casas}} = 1{,}1 \cdot 10^{13}$

c) $\underbrace{0{,}25}_{1\ \text{casa}} = 2{,}5 \cdot 10^{-1}$

d) $\frac{1}{\underbrace{1\,000\,000}_{6\ \text{casas}}} = \frac{1}{10^6} = 10^{-6} = 1{,}0 \cdot 10^{-6}$

13. O menor IDH é o da Índia: 0,645.

$\underbrace{0{,}645}_{1\ \text{casa}} = 6{,}45 \cdot 10^{-1}$

14. a) Exemplo de resposta: É um conjunto de átomos, iguais ou diferentes, unidos por ligações covalentes.

b) $5{,}7 \cdot 10^{-22} = 57 \cdot 10^{-23} > 3 \cdot 10^{-23}$. A molécula de açúcar tem medida de massa maior do que a de água.

c) $\frac{57 \cdot 10^{-23}}{3 \cdot 10^{-23}} = 19$. A medida de massa da molécula de açúcar é 19 vezes a da molécula de água.

15. a) $\frac{180}{3 \cdot 10^{-23}} = 60 \cdot 10^{23} = 6 \cdot 10^{24}$; ou seja, $6 \cdot 10^{24}$ moléculas.

b) $\frac{11{,}4}{5{,}7 \cdot 10^{-22}} = 2 \cdot 10^{22}$; ou seja, $2 \cdot 10^{22}$ moléculas.

c) $\frac{60 \cdot 10^{23}}{2 \cdot 10^{22}} = 30 \cdot 10^1 = 3 \cdot 10^2 = 300$; ou seja, 300 vezes.

d) $60 \cdot 10^{23} + 2 \cdot 10^{22} = 600 \cdot 10^{22} + 2 \cdot 10^{22} =$
$= (600 + 2) \cdot 10^{22} = 602 \cdot 10^{22} = 6{,}02 \cdot 10^{24}$; ou seja, $6{,}02 \cdot 10^{24}$ moléculas.

16. a) $a^2 \cdot a^5 \cdot a = a^{2+5+1} = a^8$

b) $\frac{10^8}{10^3} = 10^{8-3} = 10^5$

c) $2^3 \cdot a^3 \cdot b^3 = (2 \cdot a \cdot b)^3$

d) $\frac{2^5}{3^5} = \left(\frac{2}{3}\right)^5$

e) $(a^{-5})^{-2} = a^{(-5)\cdot(-2)} = a^{10}$

f) $\frac{(2^3)^2 \cdot 2^4}{2^8} = \frac{2^{6+4}}{2^8} = \frac{2^{10}}{2^8} = 2^{10-8} = 2^2$

17. a) $(2{,}5 \cdot 4) \cdot 10^{12+9} = 10 \cdot 10^{21} = 10^{22}$

b) $(3{,}6 \cdot 5{,}5) \cdot 10^{-4+(-5)} = 19{,}8 \cdot 10^{-9} = 1{,}98 \cdot 10^{-8}$

c) $(1{,}2 \cdot 8{,}2) \cdot 10^{8+(-5)} = 9{,}84 \cdot 10^3$

d) $(4 : 8) \cdot 10^{15-10} = 0{,}5 \cdot 10^5 = 5 \cdot 10^4$

18. $\frac{1\,000}{9{,}7 \cdot 10^{-23}} \simeq 103 \cdot 10^{23} = 1{,}03 \cdot 10^{25}$; ou seja, $1{,}03 \cdot 10^{25}$ moléculas.

19. O maior é $5^{3^2} = 5^{3 \cdot 3} = 5^9$, pois $(5^3)^2 = 5^{3 \cdot 2} = 5^6$.

20. a) $6^5 = (2 \cdot 3)^5 = 2^5 \cdot 3^5$. Devemos multiplicar por 2^5.

b) $5^{12} = (10 : 2)^{12} = 10^{12} : 2^{12}$. Devemos dividir por 2^{12}.

21. $\frac{10^4 \cdot 10^n - 10^3 \cdot 10^n}{10^4 \cdot 10^n} = \frac{10^4 \cdot 10^n}{10^4 \cdot 10^n} - \frac{10^3 \cdot 10^n}{10^4 \cdot 10^n} =$
$= 1 - \frac{1}{10} = \frac{1-0}{10} = \frac{9}{10} = 0{,}9$

Portanto, é um número entre 0 e 1, ou seja, entre *A* e *B*.

22. $\frac{2^{30}}{1\,000} = \frac{(2^{10})^3}{10^3} = \frac{(10^3)^3}{10^3} = \frac{10^9}{10^3} = 10^6 = 1\,000\,000$

Portanto, 1 milhão de reais.

23. Exemplo de resposta: O clube que Marina frequenta dista 1 700 m da casa dela. Considerando a ida ao clube e a volta à casa de Marina, quantos centímetros ela percorre? Escreva em notação científica. Resposta: $3{,}4 \cdot 10^5$ cm.

Na olimpíada (p. 29)

O número de zeros

a) $2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^6 = 2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^5 \cdot 5^1 = (2 \cdot 5)^5 \cdot 81 \cdot 5 = 405 \cdot 10^5$; termina em 5 zeros.

b) $2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^5 = (2 \cdot 5)^4 \cdot 3^4 \cdot 5 = 81 \cdot 5 \cdot 10^4 = 405 \cdot 10^4$; termina em 4 zeros

c) $4^3 \cdot 5^6 \cdot 6^5 = (2^2)^3 \cdot 5^6 \cdot 6^5 = (2 \cdot 5)^6 \cdot 6^5 = 6^5 \cdot 10^6$; termina em 6 zeros

d) $4^2 \cdot 5^4 \cdot 6^3 = 2^4 \cdot 5^4 \cdot 6^3 = (2 \cdot 5)^4 \cdot 6^3 = 6^3 \cdot 10^4$; termina em 4 zeros

Logo, alternativa **c**.

24. a) $12 \cdot 10^6\ m = 12\,000\,000\ m$

b) $1\,025 \cdot 10^{-6}\ m = 0{,}001025\ m$

25. a) $1,5 \cdot 10^8$ km

b) 0,15 bilhão de quilômetros $= 0,15 \cdot 10^9 \cdot 10^3$ m $=$
$= 150 \cdot 10^9$ m $= 150$ Gm

26. 1 yg $= 10^{-24}$ g
$3,0 \cdot 10^{-23}$ g $= 3,0 \cdot 10 \cdot 10^{-24}$ g $= 30 \cdot 10^{-24}$ g $= 30$ yg

27. $\frac{1}{1\,000} \cdot 1$ mm $= 10^{-3} \cdot 10^{-3}$ m $= 10^{-6}$ m $= 1$ µm
A medida do diâmetro de um fio de cabelo humano varia de 15 a 170 milésimos de milímetros. Um milésimo de milímetro corresponde a 1 micrometro.

28. 3,8 GB $= 3,8 \cdot 2^{30}$ B $= 3,8 \cdot (2^{10})^3$ B $\simeq 3,8 \cdot (10^3)^3$ B $\simeq 3,8 \cdot 10^9$ B
$10^9 = 1$ bilhão; logo, uma memória de computador tem 3,8 GB, o que corresponde a aproximadamente 4 bilhões de *bytes*.

29. 6 GB $\simeq 6 \cdot 1\,000 = 6\,000$ MB; logo, $\frac{60 \text{ MB}}{6\,000 \text{ MB}} = \frac{1}{100} = 1\%$.
Aproximadamente 1%.

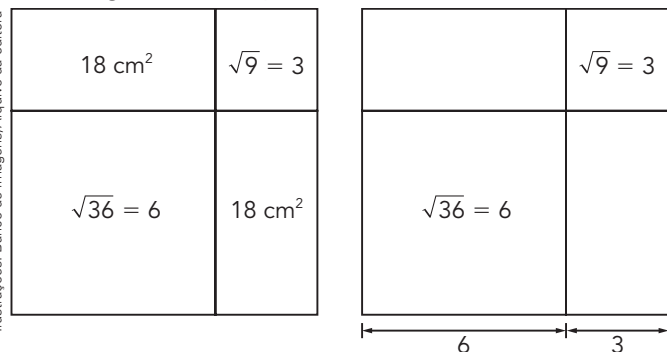
30. Exemplo de resposta: Júlio sabe que um HD externo de 1 TB armazena 500 horas de filme. Ele comprou um HD externo de $4 \cdot 2^{10}$ GB para gravar filmes com a duração de, aproximadamente, 2 horas cada um. Cerca de quantos filmes esse HD poderá armazenar? Resposta: Aproximadamente 250 filmes.

31. Exemplo de resposta: Considerando Mercúrio, Vênus, Terra e Marte, qual desses planetas tem maior medida de massa? O que você pode notar em relação às medidas de massa dos demais planetas? Resposta: Terra. Exemplo de resposta: A soma das medidas de massa dos demais planetas é menor do que a medida de massa da Terra.

32. Sendo n fileiras com n assentos cada uma, o número de assentos é: $n \cdot n = n^2$. Como são 196 assentos, $n^2 = 196$. Como n é um número positivo, temos $n = \sqrt{196} = 14$.

33. As imagens não estão representadas com medidas reais.

18 cm² | $\sqrt{9} = 3$ | $\sqrt{36} = 6$ | 18 cm²

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

A medida de área de 9 cm² é de um quadrado de lado medindo 3 cm, já que 3 cm $\cdot$ 3 cm $= 9$ cm².
A medida de área de 36 cm² é de um quadrado de lado medindo 6 cm, já que 6 cm $\cdot$ 6 cm $= 36$ cm².
Medida de área total: $18 + 9 + 36 + 18 = 81$ ou $9 \cdot 9 = 81$.
A medida de área total, de 81 cm², é de um quadrado de lado medindo 9 cm, já que 6 cm $+$ 3 cm $=$ 9 cm.

34. a) Certo.
b) Errado.
c) Errado.
d) Certo.
e) Certo.
f) Errado.

35. a) $x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm\sqrt{36} = \pm 6$
b) $x^2 = 144 \Rightarrow x = \pm\sqrt{144} = \pm 12$
c) $x^2 = -9$; não existe raiz real.
d) $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$
e) $x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$
f) $3x^2 - 6 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 6 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$

36. a) $3 + \sqrt{16} - \sqrt{25} = 3 + 4 - 5 = 2$
b) $5\sqrt{49} - \sqrt{121} = 5 \cdot 7 - 11 = 35 - 11 = 24$
c) $\sqrt{\frac{4}{25}} + 3\sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{2}{5} + 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{5} + 1 = \frac{2+5}{5} = \frac{7}{5}$
d) $\sqrt{1,21} - \sqrt{0,01} = \sqrt{\frac{121}{100}} - \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{11}{10} - \frac{1}{10} = \frac{10}{10} = 1$

37. Substituindo pelos valores dados, temos:
$\frac{-11 + \sqrt{121 + 240}}{40} = \frac{-11 + \sqrt{361}}{40} =$
$= \frac{-11 + 19}{40} = \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$

38. a)

a	2	3	5	6	7	10
$\sqrt{a}$	1,414	1,732	2,236	2,449	2,646	3,162

b)
- $2\sqrt{5} + 1 = 2 \cdot 2,236 + 1 = 4,472 + 1 = 5,472 \simeq 5,47$
- $\frac{\sqrt{10} - \sqrt{3}}{2} = \frac{3,162 - 1,732}{2} = \frac{1,43}{2} = 0,715 \simeq 0,72$

39. Exemplo de resposta: Um quadrado tem medida de área de 18 m². Qual é a medida do lado desse quadrado? Resolução: Considere a a medida do lado do quadrado; então, se a área desse quadrado mede 18 m², temos:
$a^2 = 18 \Rightarrow a = \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3^2} \Rightarrow a = 3\sqrt{2}$
O lado do quadrado mede $3\sqrt{2}$ m ou aproximadamente 4,2 m ($3 \cdot 1,4 = 4,2$).

Participe (p. 36)

a) 1L $= 1$ dm³
b) 1 000 dm³
c) x^3
d) $x^3 = 1\,000$
e) $\sqrt[3]{1\,000} = 10$; $x = 10$.
f) 10 dm
g) 100 cm; 1 m.

40. A medida da aresta é 8 cm, pois $a^3 = 512 \Rightarrow a = \sqrt[3]{512} = 8$, já que $8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$.

41. a) Média aritmética: $\frac{3 + 8 + 9}{3} = \frac{20}{3}$.
Média geométrica: $\sqrt[3]{3 \cdot 8 \cdot 9} = \sqrt[3]{216} = 6$.
b) A média aritmética é a maior.

42. Média aritmética: $\frac{4 + 5 + 20 + 25}{4} = \frac{54}{4} = 13,5$.
Média geométrica: $\sqrt[4]{4 \cdot 5 \cdot 20 \cdot 25} = \sqrt[4]{10\,000} = 10$.
A média aritmética é maior.

43. a) $5\sqrt{9} - 3\sqrt[3]{8} = 5 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 15 - 6 = 9$
b) $\sqrt{21 \cdot 4 - 3} = \sqrt{84 - 3} = \sqrt{81} = 9$
c) $\sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$

44. a) $\sqrt{10\,000} = 100$
b) $\sqrt[3]{-512} = -8$
c) $\sqrt[3]{64} = 4$
d) $\sqrt[6]{64} = 2$

45. $x^3 = 8 \cdot 3{,}2 \cdot 2{,}5 = 64 \Rightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4$. A aresta mede 4 m.

46. O volume do bloco retangular da goiabada mede $V = 24 \cdot 14 \cdot 8 = 2\,688$; ou seja, 2 688 cm³.
Ele foi dividido em 168 docinhos, então o volume de cada docinho mede:
$V_{docinho} = 2\,688 \text{ cm}^3 : 168 = 16 \text{ cm}^3$.
Como cada docinho tem o formato de um bloco retangular, temos que a medida de volume é dada pelo produto das medidas do comprimento, da largura e da altura. Então, sendo h a medida da altura, temos:
$4 \cdot 2 \cdot h = +6 \Rightarrow 8 \cdot h = +6 \Rightarrow h = \frac{16}{8} = 2$
A altura de cada docinho mede 2 cm.

47. a) $x^2 = 100 \Rightarrow x = \pm\sqrt{100} = \pm 10$
b) $x^3 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{0} = 0$
c) $x^3 = -1 \Rightarrow x = \sqrt[3]{-1} = -1$
d) $x^3 = 125 \Rightarrow x = \sqrt[3]{125} = 5$
e) $x^2 = -1$; não tem raiz real.
f) $x^3 = -\frac{1}{64} \Rightarrow x = \sqrt[3]{-\frac{1}{64}} = -\frac{1}{4}$

48. a) $49^{\frac{1}{2}} = (7^2)^{\frac{1}{2}} = 7^1 = 7$
b) $125^{\frac{1}{3}} = (5^3)^{\frac{1}{3}} = 5^1 = 5$
c) $8^{\frac{4}{3}} = (2^3)^{\frac{4}{3}} = 2^4 = 16$
d) $25^{\frac{3}{2}} = (5^2)^{\frac{3}{2}} = 5^3 = 125$
e) $81^{-\frac{1}{4}} = (3^4)^{-\frac{1}{4}} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$
f) $16^{\frac{3}{2}} = (4^2)^{\frac{3}{2}} = 4^3 = 64$
g) $9^{0,5} = (3^2)^{\frac{1}{2}} = 3^1 = 3$
h) $10\,000^{0,25} = (10^4)^{\frac{25}{100}} = (10^4)^{\frac{1}{4}} = 10^1 = 10$
i) $1\,024^{0,2} = (2^{10})^{\frac{2}{10}} = 2^2 = 4$

49. a) $10^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{10^4}$
b) $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{10^1} = \sqrt{10}$
c) $10^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{10^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{10^2}}$ ou $\sqrt[3]{10^{-2}}$.
d) $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5^1} = \sqrt[3]{5}$
e) $8^{\frac{7}{2}} = \sqrt[2]{8^7} = \sqrt{8^7}$
f) $2^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ ou $\sqrt[4]{2^{-1}}$.
g) $6^{0,5} = 6^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$
h) $3^{0,25} = 3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$

50. a) $0{,}027^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{27}{1\,000}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3}{10}\right)^{3 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{3}{10}$ ou $(0{,}3^3)^{\frac{1}{3}} =$
$= (0{,}3)^{3\frac{1}{3}} = 0{,}3^1 = 0{,}3$
b) $16^{1,25} = (2^4)^{\frac{5}{4}} = 2^5 = 32$
c) $8^{\frac{1}{3}} + 3^0 - 2 \cdot 4^{0,5} = \sqrt[3]{8} + 1 - 2 \cdot 2^{2 \cdot \frac{1}{2}} =$
$= 2 + 1 - 2 \cdot 2 = 3 - 4 = -1$
d) $27^{0,333...} + 27^{-\frac{2}{3}} = (3^3)^{\frac{3}{9}} + (3^3)^{-\frac{2}{3}} =$
$= 3^1 + 3^{-2} = 3 + \frac{1}{9} = \frac{28}{9}$

51. No cálculo **II**, a passagem $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{-3}$ está errada.
O correto seria:
$\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = 1^{\frac{1}{3}} : 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{1} : \sqrt[3]{8} = 1 : \sqrt[3]{2^3} = 1 : 2 = \frac{1}{2}$

52. a) $\sqrt[3]{2^4} = 2^{\frac{4}{3}}$
b) $\sqrt[6]{9^5} = 9^{\frac{5}{6}}$
c) $\sqrt{5^{-1}} = 5^{-\frac{1}{2}}$
d) $\sqrt{10^3} = 10^{\frac{3}{2}}$

53. a) $\sqrt[2]{3^8} = 3^{\frac{8}{2}} = 3^4 = 81$
b) $\sqrt[2]{10^6} = 10^{\frac{6}{2}} = 10^3 = 1000$
c) $\sqrt[3]{2^9} = 2^{\frac{9}{3}} = 2^3 = 8$
d) $\sqrt[4]{5^8} = 5^{\frac{8}{4}} = 5^2 = 25$

54. a) $\sqrt{4 \cdot 36} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{36} = 2 \cdot 6 = 12$
b) $\sqrt{9 \cdot 100} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{100} = 3 \cdot 10 = 30$
c) $\sqrt[3]{8 \cdot 8} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{8} = 2 \cdot 2 = 4$
d) $\sqrt[3]{27 \cdot 1\,000} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{1\,000} = 3 \cdot 10 = 30$

55. a) $\sqrt{72} = \sqrt{2^3 \cdot 3^2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3^2} = 2 \cdot 3\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$
b) $\sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 3^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3^2} = 3\sqrt{2}$
c) $\sqrt{20} = \sqrt{2^2 \cdot 5} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5} = 2\sqrt{5}$
d) $\sqrt{48} = \sqrt{2^4 \cdot 3} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{3} = 2^2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

Participe (p. 42)

a) $3 + \sqrt{2} + \sqrt{5}$
b) Aproximadamente 6,65.
c) $4 + 2\sqrt{5}$
d) Aproximadamente 8,47.
e) $XY = 3$, $YZ = \sqrt{5}$, $ZX = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.
f) $3 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2}$
g) Aproximadamente 8,06.

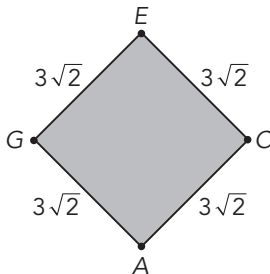
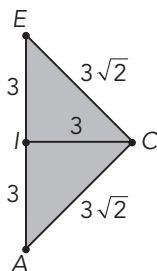
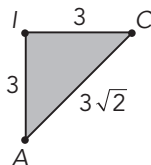
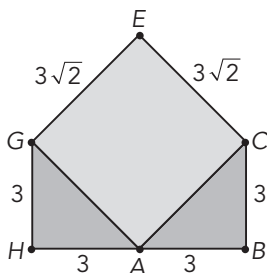
56. As imagens não estão representadas com medidas reais.

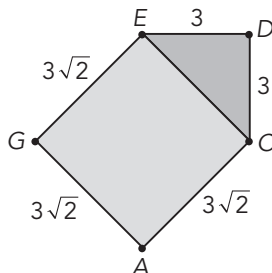
a) $(3 + 3)^2 = 6^2 = 36$

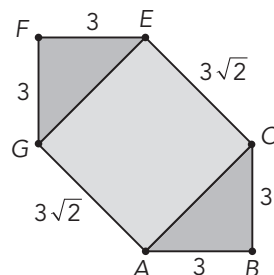
b) $\frac{1}{2} \cdot A_{ADFH} = \frac{1}{2} \cdot 36 = 18$

c) $\ell^2 = 3^2 + 3^2 \Rightarrow \ell^2 = 2 \cdot 3^2 \Rightarrow \ell = \sqrt{2 \cdot 3^2} = 3\sqrt{2}$

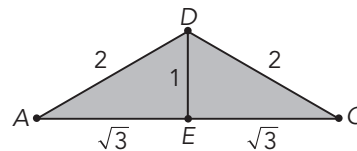
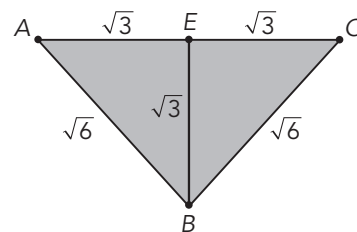
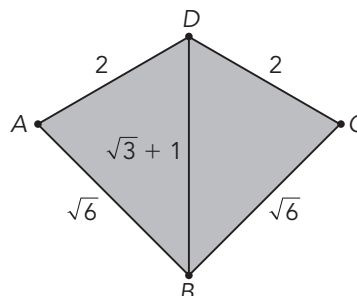
d) Cálculo da medida de perímetro:

- do quadrado *ACEG*: $4 \cdot 3\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$;

- do triângulo *ACE*: $3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 6 = 6 + 6\sqrt{2}$;

- do triângulo *ACI*: $3 + 3 + 3\sqrt{2} = 6 + 3\sqrt{2}$;

- do pentágono *BCEGH*:
$3 + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 3 + 6 = 12 + 6\sqrt{2}$;

- do pentágono *ACDEG*:
$3 + 3 + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 6 + 9\sqrt{2}$;

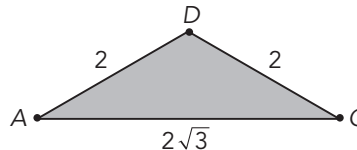
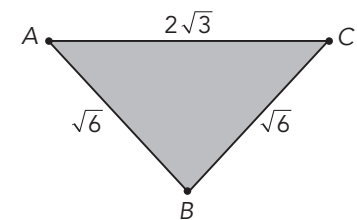
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

- do hexágono *ABCEFG*:
$3 + 3 + 3\sqrt{2} + 3 + 3 + 3\sqrt{2} = 12 + 6\sqrt{2}$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

57. As imagens não estão representadas com medidas reais.

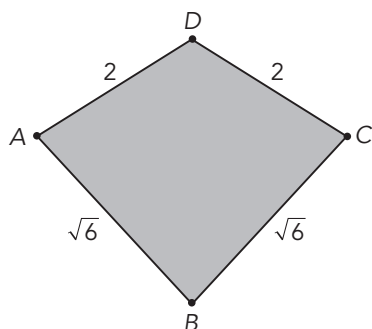
a) Medida de perímetro de oito triângulos:

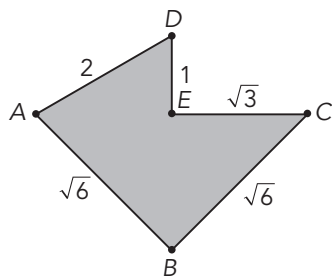
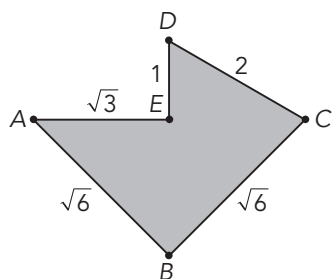
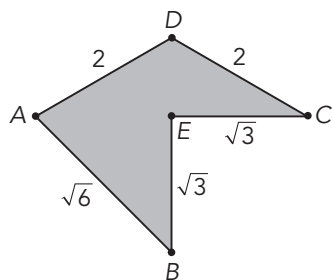
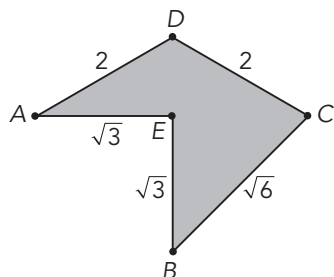
ADE e *CDE*: $2 + 1 + \sqrt{3} = 3 + \sqrt{3}$;

ABE e *BCE*: $\sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{6} = \sqrt{6} + 2\sqrt{3}$;

ABD e *CBD*: $2 + 1 + \sqrt{3} + \sqrt{6} = 3 + \sqrt{3} + \sqrt{6}$;

ACD: $2 + 2 + 2\sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3}$;

ABC: $2\sqrt{3} + \sqrt{6} + \sqrt{6} = 2\sqrt{6} + 2\sqrt{3}$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

b) Medida de perímetro de um quadrilátero:

ABCD: $2 + 2 + \sqrt{6} + \sqrt{6} = 4 + 2\sqrt{6}$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

c) Medida de perímetro de quatro pentágonos:

AEDCB e *ADECB*: $\sqrt{3} + 1 + 2 + \sqrt{6} + \sqrt{6} = 3 + \sqrt{3} + 2\sqrt{6}$;

AEBCD e *ABECD*: $2 + 2 + \sqrt{3} + \sqrt{3} + \sqrt{6} = 4 + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$.

Na olimpíada (p. 43)

A conta com 3 algarismos

$X + Y + Z$ termina em Z; então $X + Y = 10$.

Pelo resultado da conta, $Y = 1$. Logo, $X = 9$.

$1 + X + Y + Z$ termina em X; então $11 + Z = 19$, logo $Z = 8$. Logo, alternativa **e**.

Descubra os algarismos

Como o produto termina em 4, os algarismos podem ser 1 e 4, 2 e 7, 3 e 8, 4 e 6, ou 6 e 9. Temos: $46 \cdot 64 = 2\,944$ e $46 + 64 = 110$. Logo, alternativa **b**.

58. a) $2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot \sqrt{5^2} = 2 \cdot 5 = 10$

b) $\dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}}{2} = \dfrac{\sqrt{3 \cdot 12}}{2} = \dfrac{\sqrt{36}}{2} = 3$

59. a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{2 \cdot 5} = \sqrt{10}$

b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{5 \cdot 6} = \sqrt{30}$

c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3 \cdot 12} = \sqrt{36} = 6$

d) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$

60. a) $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{15}{3}} = \sqrt{5}$

b) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\dfrac{3}{6}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}}$

c) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\dfrac{18}{6}} = \sqrt{3}$

d) $\dfrac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{6 \cdot 3}{2}} = \sqrt{\dfrac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$

61. a) $(\sqrt{3})^4 = \sqrt{3^4} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{3^2} = 3 \cdot 3 = 9$ ou $3^{\frac{4}{2}} = 3^2 = 9$.

b) $(\sqrt{2})^{10} = \sqrt[2]{2^{10}} = 2^{\frac{10}{2}} = 2^5 = 32$

c) $(\sqrt[4]{5})^8 = \sqrt[4]{5^8} = 5^{\frac{8}{4}} = 5^2 = 25$

d) $(\sqrt[3]{3})^6 = \sqrt[3]{3^6} = 3^{\frac{6}{3}} = 3^2 = 9$

e) $(\sqrt{2})^5 = (\sqrt{2^5}) = (\sqrt{2^4 \cdot 2}) = 2^{\frac{4}{2}} \cdot \sqrt{2} = 2^2 \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

f) $(5\sqrt[4]{2})^4 = (5^4 \cdot \sqrt[4]{2^4}) = 625 \cdot 2^{\frac{4}{4}} = 625 \cdot 2 = 1\,250$

62. $V_{cubo} = a^3 = (2\sqrt{10})^3 = 2^3 \cdot (\sqrt{10})^3 = 8 \cdot (\sqrt{10})^2 \cdot \sqrt{10} =$

$= 8 \cdot 10 \cdot (\sqrt{10}) = 80 \cdot \sqrt{10}$; ou seja, $80 \cdot \sqrt{10}$ cm^3.

63. a) $\sqrt{\sqrt{6}} = \sqrt[2 \cdot 2]{6} = \sqrt[4]{6}$

b) $\sqrt{\sqrt[3]{10}} = \sqrt[2 \cdot 3]{10} = \sqrt[6]{10}$

c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = \sqrt[2 \cdot 2 \cdot 2]{2} = \sqrt[8]{2}$

Educação financeira

I. Geralmente, a pessoa precisa recorrer a empréstimos. Quando esses valores são obtidos em bancos ou em outras instituições financeiras, é necessário pagar juros e encargos sobre os valores tomados.

II. Aluguel de um imóvel para morar.

III. Resposta pessoal.

IV. Resposta pessoal.

V. Resposta pessoal.

VI. Anos.

VII. As formas mais comuns de obter um imóvel, quando não se tem o dinheiro todo, estão listadas a seguir.

Financiamento: a instituição quita o imóvel e cobra seu valor do cliente em prestações pequenas. Pelas leis atuais (2017), o financiamento pode ser feito por um prazo de até 30 anos. Isso facilita o acesso das pessoas de baixa renda ao imóvel próprio, porém pagam-se juros e outros encargos, que encarecem muito o valor do bem.

Consórcio: é uma forma de investimento com finalidade específica. De modo geral, funciona assim: a pessoa guarda o dinheiro (um valor fixo por mês) em uma conta coletiva. Ao final do prazo combinado, recebe de volta o valor que investiu, geralmente em forma de carta de crédito, que deve ser usada para a compra do imóvel. Durante o período de contrato, ela pode ser sorteada ou então dar um valor maior, chamado lance, para pegar a carta de crédito mais cedo, adquirindo o bem e continuando a pagar. Em relação ao financiamento, o consórcio tem a vantagem de cobrar menos taxas, mas a pessoa paga antes de obter o bem.

VIII. Bancos e outras instituições financeiras. As tarifas cobradas variam bastante entre as diversas instituições.

IX. Resposta pessoal. A pesquisa vai trazer os programas em vigor no momento da aplicação da atividade.

X. Sim. A pessoa terá que pagar as parcelas do financiamento.

XI. Alguns critérios são importantes. Um deles é saber quanto da renda familiar é comprometido com aluguel e quanto seria com uma prestação de imóvel. Se o valor da prestação for maior do que o do aluguel, é preciso calcular se há disponibilidade desse valor mensalmente. É sempre bom lembrar que o dinheiro investido em aluguel não tem retorno, enquanto o da prestação resulta em um bem que pode ser negociado. Outro critério é a localização. Se a família pretende fixar residência em determinado lugar, vale a pena comprar um imóvel. Se, por outro lado, a pessoa pode ser compelida a mudar de cidade ou de região, é preciso saber se o imóvel a ser adquirido poderá ser revendido facilmente e se as despesas com a compra valem a pena em função do período em que será utilizado. Além disso, é importante analisar o comprometimento da renda familiar.

Na mídia

1. Adicionando as medidas de massa dos ingredientes da *pizza* (a massa, o queijo e o molho), temos: $3\,632 + 1\,634 + 2\,542 = 7\,808$. Logo, a *pizza* tinha aproximadamente 7,8 t de medida de massa.

2. Como $1 \text{ t} = 1 \cdot 10^6$ g, temos: $(7{,}8 \cdot 10^6) : 120 = 65\,000$. Portanto, a *pizza* teria aproximadamente 65 000 fatias.

3. Para a corrida: 43 minutos + 13 minutos = 56 minutos. Logo, são necessários 56 minutos de corrida.

4. Exemplo de resposta: No intervalo do colégio ingeri 1 sanduíche de *bacon* e frango, 1 barra de chocolate e 1 lata de refrigerante. Analisando a tabela a seguir, determine (em horas) quanto tempo de caminhada levarei para queimar as quilocalorias ingeridas?

Quanto exercício é preciso fazer para queimar quilocalorias?

Alimento	Quantidade de quilocalorias	Caminhada (3-5 km/h)	Corrida (5-8 km/h)
1 tigela de cereal	172	31 minutos	16 minutos
1 barra de chocolate	229	42 minutos	22 minutos
1 lata de refrigerante	138	26 minutos	13 minutos
1 *muffin* de mirtilo	265	48 minutos	25 minutos
1 pacote de batata *chips*	171	31 minutos	16 minutos
1 sanduíche de *bacon* e frango	445	82 minutos	42 minutos
2 pedaços de *pizza*	449	83 minutos	43 minutos

Fonte dos dados: QUANTO exercício é preciso para queimar as calorias de uma *pizza*? *Veja*, [*s. l.*], 11 dez. 2019. Disponível em: https://veja.abril.com.br/saude/quanto-exercicio-e-preciso-para-queimar-as-calorias-de-uma-pizza/. Acesso em: 7 abr. 2022.

Resposta: Ingerir 1 sanduíche de *bacon* e frango necessita 82 minutos de caminhada.
Ingerir 1 barra de chocolate necessita 42 minutos de caminhada.
Ingerir 1 lata de refrigerante necessita 26 minutos de caminhada.
Totalizando 150 minutos de caminhada, pois $82 + 4 - 1 - 6 = 150$, ou seja, 2 horas e 30 minutos de caminhada.

Na Unidade

1. a) 0,313131... é uma dízima periódica, portanto não é um número natural.
b) 5,47 não é um número inteiro.
c) 5,171717... é um número racional, pois é dízima periódica.
d) 24,656565... é um número racional, pois é dízima periódica.

Logo, alternativa **d**.

2. $A = \frac{1}{3} = 0{,}3333...$

$B = \frac{2}{3} = 0{,}6666...$

$C = \frac{3}{4} = 0{,}75$

$D = \frac{4}{5} = 0{,}8$

$E = \frac{5}{6} = 0{,}8333...$

Então, 0,789101112... fica entre *C* e *D*.
Logo, alternativa **c**.

3. $x = \frac{3}{7} + \frac{\frac{4}{7} - \frac{3}{7}}{4} = \frac{3}{7} + \frac{1}{28} = \frac{13}{28}$ e $13 + 28 = 41$.
Logo, alternativa **c**.

4. $6^{100} = \underbrace{6 \cdot 6 \cdot ... \cdot 6}_{100 \text{ vezes}}$ é um número terminado em 6. Subtraindo 1, dá um número terminado em 5, logo, $6^{100} - 1$ é divisível por 5. Logo, alternativa **c**.

5. $1{,}7 \cdot 10^{-27} : 1\,800 = 1\,700 \cdot 10^{-30} : 1\,800 \simeq 0{,}9 \cdot 10^{-30}$. Logo, alternativa **b**.

6. $x^4 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{4}$; então são duas soluções. Logo, alternativa **c**.

7. $(256)^{-0{,}75} = (2^8)^{-\frac{3}{4}} = 2^{2 \cdot (-3)} = 2^{-6} = \left(\frac{1}{2}\right)^6$.
Logo, alternativa **b**.

8. $2^{15} \cdot 5^{12} = 2^{12} \cdot 2^3 \cdot 5^{12} = 8 \cdot (2 \cdot 5)^{12} = 8 \cdot 10^{12}$; são 13 algarismos.
Logo, alternativa **c**.

9. $(\sqrt{32} + \sqrt{18}) \cdot \sqrt{2} = (\sqrt{16 \cdot 2} + \sqrt{9 \cdot 2}) \cdot \sqrt{2} =$
$= (4\sqrt{2} + 3\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2} = 7\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 7 \cdot 2 = 14.$
Logo, alternativa **d**.

10. A área do quadrado *ABCD* mede $(a + b + c)^2$. Temos:
$a + b + c = \sqrt{32} + \sqrt{8} + \sqrt{72} =$
$= \sqrt{16 \cdot 2} + \sqrt{4 \cdot 2} + \sqrt{36 \cdot 2} =$
$= 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$
Logo, alternativa **c**.

Unidade 2

Abertura (p. 51)

Exemplos de respostas:

- Para evitar o fechamento das escolas do campo poderia ser disponibilizada uma verba para aumentar as possibilidades de transporte e para reformas de estrutura das escolas, por exemplo.
- Conhecimentos matemáticos que poderiam ser aplicados à prática rural são: área, perímetro, unidades de medida, potenciação, radiciação, etc.

Capítulo 3

Participe (p. 52)

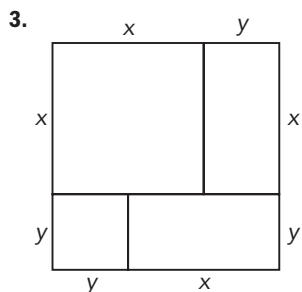
I. **a)** a^2 e b^2.
b) ab e ab.

II. **a)** $a + b$
b) $(a + b)^2$ ou $a^2 + b^2 + 2ab$.
c) Verdadeira.

Atividades

1. **a)** $(x + 1)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = x^2 + 2x + 1$
b) $(x + 6)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 6 + 6^2 = x^2 + 12x + 36$
c) $(a + 10)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 10 + 10^2 = a^2 + 20a + 100$
d) $(y + 4)^2 = y^2 + 2 \cdot y \cdot 4 + 4^2 = y^2 + 8y + 16$
e) $(x + \sqrt{2})^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$
f) $(3x + 1)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 1 + 1^2 = 9x^2 + 6x + 1$

2. **a)** $(2a + 5)^2 = (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 5 + 5^2 = 4a^2 + 20a + 25$
b) $(a + 2b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 2b + (2b)^2 = a^2 + 4ab + 4b^2$
c) $(5a + 3b)^2 = (5a)^2 + 2 \cdot 5a \cdot 3b + (3b)^2 = 25a^2 + 30ab + 9b^2$
d) $(x^2 + 4)^2 = (x^2)^2 + 2 \cdot x^2 \cdot 4 + 4^2 = x^4 + 8x^2 + 16$
e) $(a^2 + 1)^2 = (a^2)^2 + 2 \cdot a^2 \cdot 1 + 1^2 = a^4 + 2a^2 + 1$
f) $(2a + 10)^2 = (2a)^2 + 2 \cdot 2a \cdot 10 + 10^2 = 4a^2 + 40a + 100$

3.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Para completar o quadrado, juntamos dois retângulos de lados medindo x e y. A medida de área total é a de um quadrado de lado medindo $(x + y)$, portanto, é $(x + y)^2$.
Ela se compõe da área de dois quadrados, de medidas x^2 e y^2, e de dois retângulos, de medidas xy. Então: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.

4. **a)** $21^2 = (20 + 1)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 1 + 1^2 = 400 + 40 + 1 =$
$= 441$
b) $32^2 = (30 + 2)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 2 + 2^2 = 900 + 120 + 4 =$
$= 1\,024$
c) $61^2 = (60 + 1)^2 = 60^2 + 2 \cdot 60 \cdot 1 + 1^2 =$
$= 3\,600 + 120 + 1 = 3\,721$
d) $95^2 = (90 + 5)^2 = 90^2 + 2 \cdot 90 \cdot 5 + 5^2 =$
$= 8\,100 + 900 + 25 = 9\,025$

5. Ademir: $11^2 = (10 + 1)^2 = 100 + 20 + 1 = 121$
Camila: $41^2 = (40 + 1)^2 = 1\,600 + 80 + 1 = 1\,681$
Bruno: $42^2 = (40 + 2)^2 = 1\,600 + 160 + 4 = 1\,764$
Diana: $52^2 = (50 + 2)^2 = 2\,500 + 200 + 4 = 2\,704$
Quem errou foi Bruno; o resultado correto é 1 764.

6. **a)** $(2 + \sqrt{3})^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3^2} =$
$= 4 + 4\sqrt{3} + 3 = 7 + 4\sqrt{3}$
b) $(5 + \sqrt{5})^2 = 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 =$
$= 25 + 10\sqrt{5} + 5 = 30 + 10\sqrt{5}$

7. **a)** $(4 + \sqrt{2})^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2^2} =$
$= 16 + 8\sqrt{2} + 2 = 18 + 8\sqrt{2}$
b) $(\sqrt{7} + 5)^2 = \sqrt{7^2} + 2 \cdot \sqrt{7} \cdot 5 + 5^2 =$
$= 7 + 10\sqrt{7} + 25 = 32 + 10\sqrt{7}$
c) $(2\sqrt{2} + 3)^2 = 2^2\sqrt{2^2} + 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 + 3^2 =$
$= 4 \cdot 2 + 12\sqrt{2} + 9 = 17 + 12\sqrt{2}$
d) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = \sqrt{3^2} + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2^2} =$
$= 3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6}$

8. A medida de área das partes coloridas pode ser calculada subtraindo, da medida de área total, a medida de área das partes brancas.
a) Medida de área total: $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$.
Medida de área branca: $x \cdot x = x^2$.
Medida de área colorida: $x^2 + 4x + 4 - x^2 = 4x + 4$.
b) Medida de área total: $(3x + 2)^2 = 9x^2 + 12x + 4$.
Medida de área branca: $(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$.
Medida de área colorida: $9x^2 + 12x + 4 - (4x^2 + 12x + 9) =$
$= 9x^2 + 12x + 4 - 4x^2 - 12x - 9 = 5x^2 - 5$.

9. **a)** $(x + 1)^2 + (x + 2)^2 - (2x + 1)^2 =$
$= x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 - (4x^2 + 4x + 1) =$
$= x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 - 4x^2 - 4x - 1 =$
$= -2x^2 + 2x + 4$
b) $(a^2 + b^2)^2 - 2(ab)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2b^2 = a^4 + b^4$
c) $(x + 1) \cdot (x + 2) - 2(x + 2)^2 + (x + 2) \cdot (x + 3) =$
$= x^2 + 3x + 2 - 2(x^2 + 4x + 4) + x^2 + 5x + 6 =$
$= x^2 + 3x + 2 - 2x^2 - 8x - 8 + x^2 + 5x + 6 =$
$= 2x^2 - 2x^2 + 8x - 8x - 6 + 6 = 0$

10. Medida de área azul: $(a - b)^2$.
Medida de área total: $a^2 + b^2$.
Medida de área dos dois retângulos $= 2ab$.
A medida de área azul corresponde à medida de área total menos a medida de área dos dois retângulos:
$(a - b)^2 = (a^2 + b^2) - 2ab \Rightarrow (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

11. **a)** $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$
b) $(x - 10)^2 = x^2 - 20x + 100$
c) $(3x - 1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$
d) $(5a - 3b)^2 = 25a^2 - 30ab + 9b^2$
e) $(n - \sqrt{6})^2 = n^2 - 2\sqrt{6} \cdot n + (\sqrt{6})^2 = n^2 - 2n\sqrt{6} + 6$
f) $(2n - 1)^2 = (2n)^2 - 2(2n \cdot 1) + 1^2 = 4n^2 - 4n + 1$

12. **a)** $(3ab - 1)^2 = 9a^2b^2 - 6ab + 1$

b) $(x^2 - y^2)^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4$

c) $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 - x + \frac{1}{4}$

d) $(\sqrt{3} - 1)^2 = (\sqrt{3})^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 1 =$
$= 3 - 2 \cdot \sqrt{3} + 1 = 4 - 2 \cdot \sqrt{3}$

e) $(\sqrt{5} - \sqrt{2})^2 = (\sqrt{5})^2 - 2(\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}) + (\sqrt{2})^2 =$
$= 5 - 2\sqrt{10} + 2 = 7 - 2\sqrt{10}$

13. **a)** $19^2 = (20 - 1)^2 = 400 - 40 + 1 = 361$

b) $49^2 = (50 - 1)^2 = 2\,500 - 100 + 1 = 2\,401$

c) $48^2 = (50 - 2)^2 = 2\,500 - 200 + 4 = 2\,304$

d) $98^2 = (100 - 2)^2 = 10\,000 - 400 + 4 = 9\,604$

e) $29^2 = (30 - 1)^2 = 900 - 60 + 1 = 841$

f) $39^2 = (40 - 1)^2 = 1\,600 - 80 + 1 = 1\,521$

g) $38^2 = (40 - 2)^2 = 1\,600 - 160 + 4 = 1\,444$

h) $99^2 = (100 - 1)^2 = 10\,000 - 200 + 1 = 9\,801$

14. **a)** $(a + b)^2 - (a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) =$
$= a^2 + 2ab + b^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 4ab$

b) $(x + 1)^2 + (x - 1)^2 = x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1 = 2x^2 + 2$

c) $(x + 1)^2 - (x - 1)^2 = x^2 + 2x + 1 - (x^2 - 2x + 1) =$
$= x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1 = 4x$

15. $(2 + \sqrt{2})^2 = 4 - 4\sqrt{2} + 2 = 6 - 4\sqrt{2}$
A área mede $(6 - 4\sqrt{2})\ m^2$.

16. **a)** Medida de área colorida: $(a + b) \cdot (a - b)$.
b) Medida de área colorida: $a^2 - b^2$.
c) $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

17. Cartão A:

$(x + 1) \cdot (x - 1) = x^2 - 1^2 = x^2 - 1$

$(a + 5) \cdot (a - 5) = a^2 - 5^2 = a^2 - 25$

$(3b + 7) \cdot (3b - 7) = (3b)^2 - 7^2 = 9b^2 - 49$

$(x^2 + 2) \cdot (x^2 - 2) = (x^2)^2 - 2^2 = x^4 - 4$

Cartão B:

$(x + \sqrt{6}) \cdot (x - \sqrt{6}) = x^2 - (\sqrt{6})^2 = x^2 - 6$

$(a - \sqrt{14}) \cdot (a - \sqrt{14}) = a^2 - (\sqrt{14})^2 = a^2 - 14$

$(3x - 2y) \cdot (3x + 2y) = (3x)^2 - (2y)^2 = 9x^2 - 4y^2$

$(2ab - 3c) \cdot (2ab + 3c) = (2ab)^2 - (3c)^2 = 4a^2b^2 - 9c^2$

Cartão C:

$(\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1) = (\sqrt{2})^2 - 1^2 = 2 - 1 = 1$

$(5 + \sqrt{5}) \cdot (5 - \sqrt{5}) = 5^2 - 5 = 25 - 5 = 20$

$(10 - \sqrt{3}) \cdot (10 + \sqrt{3}) = 10^2 - (\sqrt{3})^2 = 100 - 3 = 97$

$(4\sqrt{2} + 7) \cdot (4\sqrt{2} - 7) = (4\sqrt{2})^2 - 72 = 16 \cdot 2 - 49 =$
$= 32 - 49 = -17$

18. **a)** $(40 - 1) \cdot (40 + 1) = 1\,600 - 1 = 1\,599$

b) $(50 - 2) \cdot (50 + 2) = 2\,500 - 4 = 2\,496$

c) $(60 - 3) \cdot (60 + 3) = 3\,600 - 9 = 3\,591$

d) $(90 - 1) \cdot (90 + 1) = 8\,100 - 1 = 8\,099$

e) $(90 - 2) \cdot (90 + 2) = 8\,100 - 4 = 8\,096$

f) $(100 - 3) \cdot (100 + 3) = 10\,000 - 9 = 9\,991$

g) $(200 + 10) \cdot (200 - 10) = 40\,000 - 100 = 39\,900$

h) $(300 - 1) \cdot (300 + 1) = 90\,000 - 1 = 89\,999$

19. **a)** $(x + 1)^2 + (x - 1)^2 + 2(x + 1) \cdot (x - 1) =$
$= x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1 + 2(x^2 - 1) =$
$= x^2 + 1 + x^2 + 1 + 2x^2 - 2 = 4x^2$

b) $(a - 1) \cdot (a + 1) \cdot (a^2 + 1) \cdot (a^4 + 1) + 1 =$
$= (a^2 + 1) \cdot (a^2 - 1) \cdot (a^4 + 1) + 1 =$
$= (a^4 - 1) \cdot (a^4 + 1) + 1 = a^8 - 1 + 1 = a^8$

c) $(2x + 1)^2 + (2x - 1)^2 + 2(2x + 1) \cdot (2x - 1) =$
$= 4x^2 + 4x + 1 + 4x^2 - 4x + 1 + 2(4x^2 - 1) =$
$= 4x^2 + 4x + 1 + 4x^2 - 4x + 1 + 8x^2 - 2 = 16x^2$

d) $\left(c - \frac{1}{2}\right)\left(c + \frac{1}{2}\right)\left(c^2 + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{16} =$
$= \left(c^2 - \frac{1}{4}\right)\left(c^2 + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{16} = c^4 - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = c^4$

e) $(\sqrt{7} + 3) \cdot (\sqrt{7} - 3) - (\sqrt{7} + 2) \cdot (\sqrt{7} - 2) =$
$= (\sqrt{7})^2 - 9 - (\sqrt{7})^2 + 4 = -5$

Na olimpíada (p. 56)

Qual é a diferença das medidas de área dos quadrados?

Sendo L a medida do lado do quadrado maior e l a do menor, temos:

$L^2 - l^2 = 4L + 4l \Rightarrow (L + l) \cdot (L - l) = 4(L + l) \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{(L + l) \cdot (L - l)}{L + l} = \frac{4(L + l)}{L + l} \Rightarrow L - l = 4$

Logo, alternativa **b**.

20. **a)** $(x + 4) \cdot (x - 4) = x^2 - 4 \Rightarrow x^2 - 16 \neq x^2 - 4$
Não é identidade.

b) $(x + 2)^2 \neq x^2 + 4$
Não é identidade.

c) $(x - 2) \cdot (x + 2) = x^2 - 4$
É identidade.

d) $(x - 1)^2 \neq x^2 - 1$
Não é identidade.

e) $(x - 5) \cdot (x + 5) = x^2 - 25$
É identidade.

f) $(5 + x) \cdot (x - 5) \neq 25 - x^2$
Não é identidade.

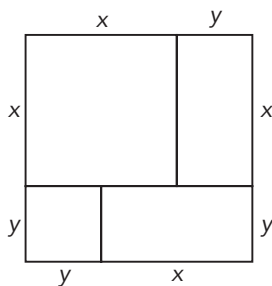
g) $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$
$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2x + 1$
É identidade.

h) $(3 - x)^2 = 9 - 6x + x^2$
É identidade.

21. $x^2 + 20x + 100 = (x + 10)^2$

22. $4x^2 - 81y^2 = (2x - 9y) \cdot (2x + 9y)$

23. Exemplo de resposta: Considere a ilustração a seguir para determinar que as expressões $(x + y)^2$ e $x^2 + y^2$ não são idênticas. Sendo $(x + y)^2$ a medida de área do quadrado maior e $x^2 + y^2$ a soma das medidas de área dos quadrados menores, para $x = 2$ e para $y = 1$ em ambas as expressões, temos que:

$(x + y)^2 = (2 + 1)^2 = 3^2 = 9$
$x^2 + y^2 = 2^2 + 1^2 = 4 + 1 = 5$
Logo, $(x + y)^2$ não é idêntica a $x^2 + y^2$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

24. a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3^2} = 3$

b) $3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2^2} = 3 \cdot 2 = 6$

c) $(\sqrt{3} + 1) \cdot (\sqrt{3} - 1) = \sqrt{3^2} - 1^2 = 3 - 1 = 2$

d) $(7 - \sqrt{19}) \cdot (7 + \sqrt{19}) = 7^2 - \sqrt{19^2} = 49 - 19 = 30$

e) $(2\sqrt{5} - 5) \cdot (2\sqrt{5} + 5) = 2^2 \cdot \sqrt{5^2} - 5^2 = 4 \cdot 5 - 25 = -5$

f) $(11 + \sqrt{11}) \cdot (11 - \sqrt{11}) = 11^2 - \sqrt{11^2} = 121 - 11 = 110$

Há outras respostas possíveis além das mencionadas em cada item.

25. A diagonal da tela quadrada mede $d = 16''$. Conforme vimos, a medida do lado é dada por $x = \frac{d}{\sqrt{2}}$.

Assim, a medida do lado do quadrado é:

$$x = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{16}{\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = 8\sqrt{2}.$$

Como $1'' \simeq 2{,}54$ cm e $\sqrt{2} \simeq 1{,}4$, temos:

$x \simeq 8 \cdot 2{,}54 \cdot 1{,}4 \Rightarrow x \simeq 28{,}4$; ou seja, aproximadamente 28,4 cm.

26. a) $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, ou aproximadamente 0,58.

b) $\frac{5}{\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$, ou aproximadamente 2,04.

c) $\frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2 \cdot 5} = \frac{\sqrt{5}}{10}$, ou aproximadamente 0,22.

d) $\frac{3}{10\sqrt{2}} = \frac{3}{10\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{10 \cdot 2} = \frac{3\sqrt{2}}{20}$, ou aproximadamente 0,21.

27. a) $\frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$

b) $\frac{15}{2\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{15 \cdot \sqrt{10}}{2 \cdot 10} = \frac{15\sqrt{10}}{20} = \frac{3\sqrt{10}}{4}$

28. a) $\sqrt{2} - 1$, porque $(\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1) = 2 - 1 = 1$.

b) $\frac{1}{\sqrt{2} + 1} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1} = \sqrt{2} - 1 \simeq 1{,}414 - 1 = 0{,}414$

29. a) $\frac{1}{4 + \sqrt{2}} = \frac{1}{4 + \sqrt{2}} \cdot \frac{4 - \sqrt{2}}{4 - \sqrt{2}} = \frac{4 - \sqrt{2}}{16 - 2} = \frac{4 - \sqrt{2}}{14}$

b) $\frac{2}{\sqrt{5} + 2} = \frac{2}{\sqrt{5} + 2} \cdot \frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} - 2} = \frac{2\sqrt{5} - 2 \cdot 2}{5 - 4} = \frac{2\sqrt{5} - 4}{1} = 2\sqrt{5} - 4$

c) $\frac{3}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \cdot \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - 1} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{-1}{7 - \sqrt{2}} = -\frac{-1}{7 - \sqrt{2}} \cdot \frac{7 + \sqrt{2}}{7 + \sqrt{2}} = -\frac{7 + \sqrt{2}}{49 - 2} \cdot \frac{-7 - \sqrt{2}}{47}$

30. Área do galpão mede: $10 \cdot 32\sqrt{2} = 320\sqrt{2} \simeq 320 \cdot 1{,}4 = 448$; ou seja, 448 m^2.
Logo, são aproximadamente 8 aves por metro quadrado, pois $\frac{3\,600}{448} \simeq 8$.

Capítulo 4

Atividades

1. a) $ax + by = a \cdot (x + y)$
b) $ap + bp + cp = p \cdot (a + b + c)$
c) $x + xy - xyz = x \cdot (1 + y - yz)$
d) $2ab + 8a = 2a \cdot (b + 4)$
e) $x^2 + x = x \cdot (x + 1)$
f) $x^4 - x^3 + x^2 = x^2 \cdot (x^2 - x + 1)$
g) $8x^3 - 6x^2 + 4x = 2x \cdot (4x^2 - 3x + 2)$

2. a) $\frac{10ab^{\div 5a}}{15ac_{\div 5a}} = \frac{2b}{3c}$

b) $\frac{2x + 4}{4x + 8} = \frac{2(x + 2)^{\div 2(x+2)}}{4(x + 2)_{\div 2(x+2)}} = \frac{1}{2}$

c) $\frac{a^2b + ab^2}{2ab} = \frac{ab(a + b)^{\div ab}}{2ab_{\div ab}} = \frac{a + b}{2}$

d) $\frac{27x^3 + 9x^2}{3 + 9x} = \frac{9x^2(3x + 1)^{\div 3(3x+1)}}{3(1 + 3x)_{\div 3(3x+1)}} = 3x^2$

3. a) Medida de área: $2x \cdot (x + 2) = 2x^2 + 4x$; logo o lado deverá medir $x + 2$.
b) Sendo um lado de medida $2x$ e o outro lado de medida $(x + 2)$, o perímetro medirá: $2x + 2x + (x + 2) + (x + 2) = 6x + 4$. Como $x = 3$, temos que o perímetro medirá: $6 \cdot 3 + 4 = 22$.

4. Exemplo de resposta: Roberto está fazendo uma toalha de mesa com retalhos que sobraram de costuras. Ele costurou, uns nos outros, retalhos quadrados de tecidos, todos com medida de lados iguais a x dm. Ele ainda pretende colocar uma barra de renda em cada lado da toalha e vendê-la cobrando R$ 1,00/dm^2 do tecido mais R$ 1,00/dm da barra. Qual será o preço de venda dessa toalha? Resposta: $16x \cdot (x + 1)$ reais.

5. a) $x^2 + ax + bx + ab = x(x + a) + b(x + a) = (x + a) \cdot (x + b)$
b) $mp + np - mq - nq = p(m + n) - q(m + n) = (m + n) \cdot (p - q)$

6. a) $\frac{ax + ay}{ax + bx + ay + by} = \frac{a(x + y)}{x(a + b) + y(a + b)} = \frac{a(x + y)}{(a + b) \cdot (x + y)} = \frac{a}{a + b}$

b) $\dfrac{x^2+1}{x^3-x^2+x-1} = \dfrac{x^2+1}{x^2(x-1)+1(x-1)} =$

$= \dfrac{x^2+1}{(x^2+1)\cdot(x-1)} = \dfrac{1}{x-1}$

7. $A = x^2 + ax + bx + ab = x(x+a) + b(x+a) = (x+a)\cdot(x+b)$

8. A forma fatorada de $x^2 - y^2$ é $(x-y)\cdot(x+y)$. Logo:
$x^2 - y^2 = (x-y)\cdot(x+y)$.

9. **a)** $x^2 - 36 = (x+6)\cdot(x-6)$
b) $n^2 - 1 = (n+1)\cdot(n-1)$
c) $100x^2 - 1 = (10x+1)\cdot(10x-1)$
d) $a^2 - 4b^2 = (a+2b)\cdot(a-2b)$
e) $9x^2 - 16a^2 = (3x+4a)\cdot(3x-4a)$
f) $a^2b^2 - c^2d^2 = (ab+cd)\cdot(ab-cd)$
g) $a^4 - b^4 = (a^2+b^2)\cdot(a+b)\cdot(a-b)$
h) $x^4 - 1 = (x^2+1)\cdot(x+1)\cdot(x-1)$

10. **a)** $x^3 + x^2 - 4x - 4 = x^2(x+1) - 4(x+1) =$
$= (x+1)\cdot(x^2-4) = (x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-2)$
b) $x^2 - y^2 + x - y = (x-y)\cdot(x+y) + 1(x-y) =$
$= (x-y)\cdot(x+y+1)$

11. $\dfrac{(x^2-1)\cdot(x+2)}{(x^2-4)\cdot(x-1)} = \dfrac{(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)}{(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x-1)} = \dfrac{x+1}{x-2}$

Para $x = 1\,002$, temos: $\dfrac{1\,002+1}{1\,002-2} = \dfrac{1\,003}{1\,000} = 1{,}003$.

12. **a)** $A = a^2 + ab + b^2 + ab = a^2 + 2ab + b^2$
b) $\ell = a + b$
c) $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$

13. **a)** $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$
b) $n^2 - 10n + 25 = (n-5)^2$
c) $9a^2 + 6ab + b^2 = (3a+b)^2$
d) $4x^2 - 12xy + 9y^2 = (2x-3y)^2$

14. **a)** $x^3 - 2x^2 + x = x\cdot(x^2-2x+1) = x\cdot(x-1)^2$
b) $x^4 + 2x^3 + x^2 = x^2\cdot(x^2+2x+1) = x^2\cdot(x+1)^2$

15. $\dfrac{x^2-1}{x^2+2x+1} = \dfrac{(x+1)\cdot(x-1)}{(x+1)^2} = \dfrac{x-1}{x+1}$

$= \dfrac{999-1}{999+1} = \dfrac{998}{1\,000} = 0{,}998$

16. Medida de área **1**: $4x + 4x + 4\cdot 4 = 112 \Rightarrow 8x + 16 = 112 \Rightarrow$
$\Rightarrow 8x = 96 \Rightarrow x = 12$.
Medida de área **2**: $x\cdot x = 12\cdot 12 = 144$.
Medida de área total: $144 + 112 = 256$; ou seja, $256\ m^2$.

Na olimpíada (p. 65)

São naturais

Fatorando o primeiro membro da equação, temos:
$x^2 - xy = 23 \Rightarrow x(x-y) = 23$
Como 23 é um número primo, temos apenas duas possibilidades:
- $x = 1$ e $x - y = 23$, que implica $y = -22$, que não é um número natural.
- $x = 23$ e $x - y = 1$, que implica $y = 22$.

Portanto, $x + y = 22 + 23 = 45$. Logo, alternativa **e**.

Na mídia

1.

Medalhas do Brasil nos Jogos Olímpicos de Tóquio-2020

Medalhas do Brasil nos Jogos Olímpicos de Tóquio-2020

Fonte dos dados: VEJA todas as medalhas do Brasil em Tóquio 2020. *Globo Esporte*, 26 jul. 2021. Disponível em: https://ge.globo.com/olimpiadas/noticia/quantas-medalhas-o-brasil-ja-ganhou-nas-olimpiadas-2020-veja-quadro.ghtml. Acesso em: 4 abr. 2022.

2. Surfe, Vela, Maratona Aquática, Canoagem, Futebol masculino, *Skate Park*, Vôlei feminino e Tênis ganharam 1 medalha cada. Ginástica Artística, *Skate Street*, Judô, Natação e Atletismo ganharam 2 medalhas cada.

3. Exemplo de resposta: Entre os dias 26 de julho e 11 de agosto de 2024 serão realizados os Jogos Olímpicos de Paris. Os Jogos Olímpicos de Verão de 2028 serão em Los Angeles, nos Estados Unidos, e os de 2032 serão em Brisbane, na Austrália. Nos jogos de Paris em 2024, será incluído o *breaking* como modalidade nova. (Fonte dos dados: COMITÊ OLÍMPICO INTERNACIONAL. *Breaking*. Disponível em: https://olympics.com/pt/esportes/breaking/. Acesso em: 1º maio 2022.)

Na Unidade

1. Medida de área: $(n-1)\cdot(n-1) = (n-1)^2$. Logo, alternativa **d**.

2. $(n+1)\cdot(n+1) - (n-1)\cdot(n-1) =$
$= n^2 + 2n + 1 - (n^2 - 2n + 1) =$
$= n^2 + 2n + 1 - n^2 + 2n - 1 = 4n$. Logo, alternativa **b**.

3. Medida de área: $(\sqrt{5}-1)\cdot(\sqrt{5}+1) = (\sqrt{5})^2 - 1 = 5 - 1 = 4$.
Logo, alternativa **b**.

4. $\left(\sqrt{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = (\sqrt{2})^2 + 2\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2 + 2 + \dfrac{1}{2} =$
$= 4{,}5$. Logo, alternativa **a**.

5. $\dfrac{35}{\sqrt{7}} = \dfrac{35\cdot\sqrt{7}}{\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}} = \dfrac{35\cdot\sqrt{7}}{7} \simeq 5\cdot 2{,}646 = 13{,}23$.
Logo, alternativa **c**.

6. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{(\sqrt{3}+1)\cdot(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)\cdot(\sqrt{3}+1)} = \dfrac{3+2\sqrt{3}+1}{3-1} =$

$= \dfrac{4+2\sqrt{3}}{2} = 2+\sqrt{3}$

Logo, alternativa **c**.

7. $375^2 - 374^2 = (375+374)\cdot(375-374) = 749 \cdot 1 = 749$

Adicionando os algarismos, temos: $7+4+9=20$. Logo, alternativa **c**.

8. $\dfrac{x^2+3x}{x^2-9} = \dfrac{x\cdot(x+3)}{(x-3)\cdot(x+3)} = \dfrac{x}{x-3}$. Logo, alternativa **b**.

9. $\dfrac{9x^2+6x+1}{9x^2-1} = \dfrac{(3x+1)^2}{(3x-1)\cdot(3x+1)} = \dfrac{3x+1}{3x-1}$. Logo, alternativa **c**.

10. $\dfrac{5a+5b}{a^2+2ab+b^2} = \dfrac{5\cdot(a+b)}{(a+b)^2} = \dfrac{5}{a+b} = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$. Logo, alternativa **d**.

Unidade 3

Abertura (p. 69)

Exemplo de resposta: Reduzir o consumo de sal, açúcares e gorduras; comer em intervalos de 3 a 4 horas; praticar exercícios físicos regularmente; visitar o médico pelo menos a cada 6 meses (endocrinologista, cardiologista, entre outros).

Capítulo 5

Atividades

1. a) $15(x+2)=0 \Rightarrow x+2=0 \Rightarrow x=-2$

Assim, $x=-2$.

b) $x(x-4)=0 \Rightarrow x=0$ ou $x-4=0$.

Assim, $x=0$ ou $x=4$.

2. $3x+x^2=0 \Rightarrow x(3+x)=0 \Rightarrow x=0$ ou $3+x=0$.

Assim, $x=0$ ou $x=-3$.

3. $4+x^2=4x \Rightarrow 4+x^2-4x=0 \Rightarrow (x-2)^2=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$

Júnior tem 2 anos.

4. a) $x^2-10x+25=0 \Rightarrow (x-5)^2=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x-5=0 \Rightarrow x=5$

b) $x^3-5x^2-4x+20=0 \Rightarrow x^2(x-5)-4(x-5)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x-5)\cdot(x^2-4)=0 \Rightarrow x-5=0$ ou $x^2-4=0$.

Assim:
$x-5=0 \Rightarrow x=5$
$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm\sqrt{4} \Rightarrow x=\pm 2$
Portanto, $x=5$ ou $x=2$ ou $x=-2$.

5. $x=\dfrac{x^2}{2} \Rightarrow 2x=x^2 \Rightarrow 2x-x^2=0 \Rightarrow x(2-x)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x=0$ ou $2-x=0$.
Assim, $x=0$ ou $x=2$.

6. $x=4\cdot x^3 \Rightarrow x-4x^3=0 \Rightarrow x(1-4x^2)=0 \Rightarrow x=0$ ou $1-4x^2=0$.

Temos:
$1-4x^2=0 \Rightarrow 4x^2=1 \Rightarrow x^2=\dfrac{1}{4} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\dfrac{1}{4}} \Rightarrow x=\pm\dfrac{1}{2}$.

Assim, $x=0$ ou $x=\pm\dfrac{1}{2}$.

7. $x^3-10x^2-4x+40=0 \Rightarrow x^2(x-10)-4(x-10)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x-10)\cdot(x^2-4)=0 \Rightarrow (x-10)\cdot(x+2)\cdot(x-2)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x=10$ ou $x=-2$ ou $x=2$.
Como Natasha nasceu no primeiro semestre, foi no mês 2, dia 10.
A data de aniversário de Natasha é 10 de fevereiro.

8. $x^3-13x^2-2x+26=0 \Rightarrow x^2(x-13)-2(x-13)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x-13)\cdot(x^2-2)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x-13)\cdot(x+\sqrt{2})\cdot(x-\sqrt{2})=0 \Rightarrow x-13=0$ ou
$x+\sqrt{2}=0$ ou $x-\sqrt{2}=0 \Rightarrow x=13$ ou $x=-\sqrt{2}$ ou
$x=\sqrt{2}$.

Como Juliana disse que sua idade é uma dessas raízes, só pode ser 13 anos, pois costumamos expressar a idade pelo número inteiro de anos completos.

9. a) $s=3+4=7$ e $p=3\cdot 4=12$; uma equação é
$x^2-7x+12=0$.

b) $s=-2-5=-7$ e $p=(-2)\cdot(-5)=10$; uma equação é
$x^2+7x+10=0$.

c) $s=-6+3=-3$ e $p=(-6)\cdot 3=-18$; uma equação é
$x^2+3x-18=0$.

d) $s=-3+6=3$ e $p=(-3)\cdot 6=-18$; uma equação é
$x^2-3x-18=0$.

10. a) $s=4$ e $p=3$; logo as raízes são 1 e 3, então
$x^2-4x+3=(x-3)\cdot(x-1)$.

b) $s=-11$ e $p=24$; logo as raízes são -8 e -3, então
$y^2+11y+24=(y+8)\cdot(y+3)$.

c) $s=4$ e $p=-45$; logo as raízes são 9 e -5, então
$a^2-4a-45=(a-9)\cdot(a+5)$.

d) $s=1$ e $p=-12$; logo as raízes são -3 e 4, então
$t^2-t-12=(t-4)\cdot(t+3)$.

e) $s=-11$ e $p=30$; logo as raízes são -5 e -6, então
$y^2+11y+30=(y+5)\cdot(y+6)$.

f) $s=10$ e $p=24$; logo as raízes são 4 e 6, então
$x^2-10x+24=(x-4)\cdot(x-6)$.

g) $s=7$ e $p=6$; logo as raízes são 1 e 6, então
$x^2-7x+6=(x-6)\cdot(x-1)$.

h) $s=-4$ e $p=-5$; logo as raízes são -5 e 1, então
$y^2+4y-5=(y+5)\cdot(y-1)$.

i) $s=-1$ e $p=-2$; logo as raízes são -2 e 1, então
$a^2+a-2=(a+2)\cdot(a-1)$.

j) $s=-7$ e $p=-8$; logo as raízes são -8 e 1, então
$t^2+7t-8=(t+8)\cdot(t-1)$.

11. a) $\dfrac{x^2-4}{x^2-6x+8} = \dfrac{(x-2)\cdot(x+2)}{(x-2)\cdot(x-4)} = \dfrac{x+2}{x-4}$

b) $\dfrac{x^2+8x+16}{x^2+10x+16}\cdot\dfrac{x^2-64}{x^2-4x-32} =$

$= \dfrac{(x+4)^2}{(x+2)\cdot(x+8)}\cdot\dfrac{(x+8)\cdot(x-8)}{(x+4)\cdot(x-8)} = \dfrac{x+4}{x+2}$

12. a) $s=-12$ e $p=32 \Rightarrow x=-8$ ou $x=-4$.

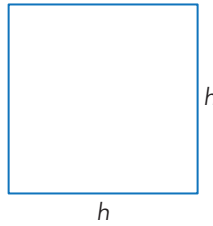
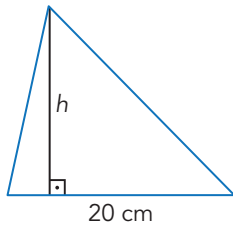
b) $s=12$ e $p=32 \Rightarrow x=8$ ou $x=4$.

c) $s=-4$ e $p=-32 \Rightarrow x=-8$ ou $x=4$.

d) $s=-4$ e $p=-32 \Rightarrow x=8$ ou $x=-4$.

e) $s=2$ e $p=-3 \Rightarrow x=3$ ou $x=-1$.

f) $x^2-16=0 \Rightarrow x^2=16 \Rightarrow x=\pm\sqrt{16}=\pm 4$

13. De acordo com o enunciado, temos as figuras a seguir:

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

$A_{\text{triângulo}} = \dfrac{20 \cdot h}{2} = 10h$

$A_{\text{quadrado}} = h^2$

Pelo enunciado, temos:

$A_{\text{quadrado}} = A_{\text{triângulo}} + 24 \Rightarrow h^2 = 10h + 24 \Rightarrow h^2 - 10h - 24 = 0$

Resolvendo a equação, temos que $s = 10$ e $p = -24$. Logo, $h = 12$ ou $h = -2$ (não serve, pois h é medida do lado do quadrado e, também, a medida da altura do triângulo, então não pode ser negativa). Logo, a altura do triângulo mede 12 cm.

Capítulo 6

Participe (p. 77)

I. 1º modo:

a) $4x^2 - 9$

Temos que $\sqrt{9} = 3$ e $\sqrt{4x^2} = 2x$, então:

$(2x + 3) \cdot (2x - 3)$

b) $(2x + 3) \cdot (2x - 3) = 0 \Rightarrow 2x + 3 = 0 \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -\dfrac{3}{2}$ ou $2x - 3 = 0$.

$2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Logo, $x = -\dfrac{3}{2}$ ou $x = \dfrac{3}{2}$.

2º modo:

a) $4x^2 - 9 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 9 \Rightarrow x^2 = \dfrac{9}{4}$

b) $x^2 = \dfrac{9}{4} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{9}{4}} \Rightarrow x = \pm\dfrac{3}{2}$

Logo, as raízes são $-\dfrac{3}{2}$ e $\dfrac{3}{2}$.

II. a) Dada a equação $-2x^2 + 10 = 0$ e sabendo que $ax^2 + bx + c = 0$, temos: $a = -2$, $b = 0$ e $c = 10$.

b) $-2x^2 + 10 = 0 \Rightarrow -2x^2 = -10 \Rightarrow x^2 = \dfrac{-10}{-2} = 5$

c) $x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}$

Logo, as raízes são $\sqrt{5}$ e $-\sqrt{5}$.

III. a) $x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2 = -2$

b) Nenhum número real elevado ao quadrado dá resultado negativo. Portanto, não há raiz real.

Participe (p. 78)

a) São 5 e 1, pois $5 + 1 = 6$ e $5 \cdot 1 = 5$.

b) São 5 e 1.

c) $5^2 - 6 \cdot 5 + 5 = 25 - 30 + 5 = 0$ e $1^2 - 6 \cdot 1 + 5 = 1 - 6 + 5 = 0$

d) $s = -9$ e $p = 18$.

e) Negativo.

f) Como $s = -9$ e $p = 18$, as raízes são -6 e -3, porque $(-6) + (-3) = -9$ e $(-6) \cdot (-3) = 18$.

g) $s = -2$ e $p = -8$.

h) A negativa.

i) Como $s = -2$ e $p = -8$, as raízes são -4 e 2, porque $(-4) + 2 = -2$ e $(-4) \cdot 2 = -8$.

j) $(-4)^2 + 2 \cdot (-4) - 8 = 16 - 8 - 8 = 0$

k) $s = 1$ e $p = -20$.

l) Uma positiva e uma negativa.

m) Como a soma é positiva, a raiz positiva tem maior valor absoluto.

n) Como $s = 1$ e $p = -20$, as raízes são 5 e -4, porque $5 + (-4) = 1$ e $5 \cdot (-4) = -20$.

Atividades

1. a) $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = 2$ ou $x = -2$.

b) $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = 3$ ou $x = -3$.

c) $4x^2 - 25 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = \dfrac{25}{4} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{25}{4}} \Rightarrow x = \dfrac{5}{2}$ ou $x = -\dfrac{5}{2}$.

d) $9x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = \dfrac{16}{9} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{16}{9}} \Rightarrow x = \dfrac{4}{3}$ ou $x = -\dfrac{4}{3}$.

e) $2 = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$.

f) $-2x^2 + 5 = 0 \Rightarrow -2x^2 = -5 \Rightarrow x^2 = \dfrac{5}{2} \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{5}{2}}$ ou $x = -\sqrt{\dfrac{5}{2}}$.

g) $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$. Não tem raízes reais.

h) $3x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = \dfrac{2}{3} \Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ ou $x = -\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

i) $4x^2 = 100 \Rightarrow x^2 = \dfrac{100}{4} \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm\sqrt{25} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 5$ ou $x = -5$.

j) $2x^2 + 11 = 0 \Rightarrow 2x^2 = -11$. Não tem raízes reais.

2. Sendo x a medida do lado do azulejo, em cm, a área dele mede x^2, em cm^2. Como $9\ m^2 = 90\,000\ cm^2$, temos:

$400x^2 = 90\,000 \Rightarrow x^2 = \dfrac{90\,000}{400} \Rightarrow x^2 = 225 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \pm\sqrt{225} = \pm 15$ (não consideramos o valor negativo, porque x representa uma medida positiva).

A resposta é 15 cm.

Outra solução:

A medida de área do azulejo corresponde ao quociente da medida de área da parede pela quantidade de azulejos, então:

$90\,000 : 400 = 225$, em cm^2.

Medida do lado do azulejo: $\sqrt{225} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5^2} = 3 \cdot 5 = 15$; ou seja, 15 cm.

3. $\text{IMC} = \dfrac{\text{Massa}}{(\text{Altura})^2} \Rightarrow 28 = \dfrac{70}{x^2} \Rightarrow x^2 = 2{,}5 \Rightarrow x \simeq 1{,}58$; ou seja, aproximadamente 1,58 m.

Resposta esperada: Não tratar o sobrepeso pode gerar a obesidade, que é uma porta para outras doenças, como aumento da pressão arterial, dos níveis de colesterol e triglicerídeos sanguíneos e da resistência à insulina. Para evitar o sobrepeso é recomendado praticar atividades físicas regularmente e manter uma dieta equilibrada.

4. a) $x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x - 2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$.

b) $x^2 + 5x = 0 \Rightarrow x(x + 5) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x + 5 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0$ ou $x = -5$.

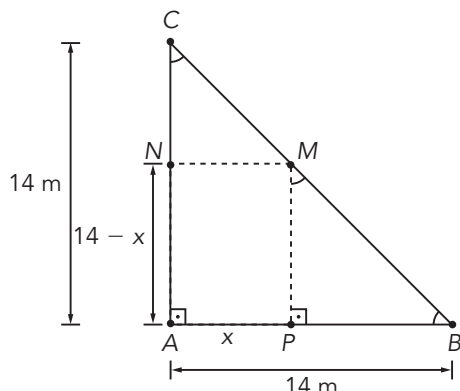
c) $3x^2 - x = 0 \Rightarrow x(3x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $3x - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0$ ou $x = \dfrac{1}{3}$.

d) $2x^2 + x = 0 \Rightarrow x(2x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $2x + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 0$ ou $x = -\dfrac{1}{2}$.

5. a) $s = 5$ e $p = 6$. Raízes: 3 e 2.
b) $s = -8$ e $p = 15$. Raízes: -3 e -5.
c) $s = -3$ e $p = -10$. Raízes: -5 e 2.
d) $s = 1 + \sqrt{2}$ e $p = \sqrt{2}$. Raízes: 1 e $\sqrt{2}$.

6. O $\triangle ABC$ é retângulo e isósceles ($AC = AB$), então:
$\text{med}(\hat{B}) = \text{med}(\hat{C}) = 45° \Rightarrow \text{med}(\hat{B}) = \text{med}(\hat{M}) = 45°$
Então o $\triangle PBM$ é isósceles e, assim, $PM = PB = 14 - x$.

A medida de área do retângulo é 48 m². Portanto:
$x(14 - x) = 48 \Rightarrow 14x - x^2 = 48 \Rightarrow x^2 - 14x + 48 = 0$
Dessa equação, $s = 14$ e $p = 48$, então $x = 6$ ou $x = 8$.
Portanto, P deve ser marcado a 6 m ou a 8 m de A.

7. a) $A = 2x \cdot 3x - x^2 = 20 \Rightarrow 6x^2 - x^2 = 20 \Rightarrow 5x^2 = 20 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ ou $x = -2$ (não consideramos o valor negativo, porque x representa medida positiva)
Logo, $x = 2$ cm.
b) $A = x^2 + x^2 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot (1 \cdot x) = 87 \Rightarrow 2x^2 + 3 + 2x = 87 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x^2 + 2x - 84 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 42 = 0$
Dessa equação, $s = -1$ e $p = -42$, então $x = 6$ ou $x = -7$ (não consideramos o valor negativo, porque x representa medida positiva). A resposta é $x = 6$ cm.

8. $n(n + 3) = 40 \Rightarrow n^2 + 3n - 40 = 0$
Dessa equação, $s = -3$ e $p = -40$, então $n = 5$ ou $n = -8$ (não consideramos o valor negativo).
Para $n = 5$, temos: $n + 3 = 5 + 3 = 8$.
Portanto, há 5 fileiras, cada uma com 8 estudantes.

9. a) $x^2 + 6x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x + 3^2 = -2 + 9 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x + 3)^2 = 7 \Rightarrow x + 3 = \pm\sqrt{7} \Rightarrow x = -3 \pm \sqrt{7}$
b) $x^2 - 10x + 14 = 0 = x^2 - 10x + 5^2 = -14 + 25 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x - 5)^2 = 11 \Rightarrow x - 5 = \pm\sqrt{11} \Rightarrow x = 5 \pm \sqrt{11}$
c) $x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 2 + 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x - 1)^2 = 3 \Rightarrow x - 1 = \pm\sqrt{11} \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$
d) $x^2 + 4x - 16 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 2^2 = 16 + 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x + 2)^2 = 20 \Rightarrow x + 2 = \pm\sqrt{20} \Rightarrow x = -2 \pm 2\sqrt{5}$

10. $s = 4$ e $p = 2$.
Os números são raízes da equação: $x^2 - 4x + 2 = 0$. Temos:
$x^2 - 4x + 2^2 = -2 + 4 \Rightarrow (x - 2)^2 = 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow x - 2 = \pm\sqrt{2} \Rightarrow x_1 = 2 + \sqrt{2}$ e $x_2 = 2 - \sqrt{2}$.

11. $s = 4$ e $p = 5$.
$x^2 - 4x + 5 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 2^2 = -5 + 4 \Rightarrow (x - 2)^2 = -1$
Essa equação não tem raiz real, porque nenhum número real elevado ao quadrado dá resultado negativo. Então, não existem dois números reais de soma 4 e produto 5.

12. a) $2x^2 + 7x + 3 = 0$
$a = 2$; $b = 7$; $c = 3$.
$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 49 - 24 = 25$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 2} = \frac{-7 \pm 5}{4}$$
$$x_1 = \frac{-7 + 5}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$
$$x_2 = \frac{-7 - 5}{4} = -\frac{12}{4} = -3$$
b) $x^2 - 9x + 19 = 0$
$a = 1$; $b = -9$; $c = 19$.
$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 19 = 81 - 76 = 5$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{9 \pm \sqrt{5}}{2 \cdot 1} = \frac{9 \pm \sqrt{5}}{2}$$
$x_1 = \dfrac{9 + \sqrt{5}}{2}$ e $x_2 = \dfrac{9 - \sqrt{5}}{2}$.

13. a) Se $ax^2 + bx + c = 0$ e $b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0$, então:
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b \pm 0}{2a}$$
$$x_1 = \frac{-b + 0}{2a} = \frac{-b}{2a}$$
$$x_2 = \frac{-b - 0}{2a} = \frac{-b}{2a}$$
As duas raízes tornam-se iguais (é a mesma raiz).
b) $x^2 - 8x + 16 = 0$
$a = 1$; $b = -8$; $c = 16$.
$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 64 - 64 = 0$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{8 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{8}{2} = 4$$
c) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$
$a = 2$; $b = -2\sqrt{2}$; $c = 1$.
$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-2\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 4 \cdot 2 - 8 = 0$
$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{2\sqrt{2}}{2 \cdot 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

14. $x^2 + 2x + 4 = 0$
$a = 1$; $b = 2$; $c = 4$.
$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 4 - 16 = -12$
Como a raiz quadrada de um número negativo não pertence aos reais, a equação não possui raiz real.

15. Idade de Maria Isabel: x_1; idade de Maria Clara: x_2.
Se Maria Clara é mais velha do que Maria Isabel, então $x_1 < x_2$.
Média aritmética: $\dfrac{x_1 + x_2}{2} = 12{,}5$.
A soma das idades é $x_1 + x_2 = 25$.
Média geométrica: $\sqrt{x_1 \cdot x_2} = 12$.
O produto das idades é: $x_1 \cdot x_2 = 12^2 = 144$.
Então x_1 e x_2 são raízes reais de $x^2 - 25x + 144 = 0$:
$a = 1$; $b = -25$; $c = 144$.
$\Delta = (-25)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 144 = 625 - 576 = 49$
$$x = \frac{25 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{25 \pm 7}{2}$$
Como $x_1 < x_2$, temos:
$$x_1 = \frac{25 - 7}{2} = \frac{18}{2} = 9$$
$$x_2 = \frac{25 + 7}{2} = \frac{32}{2} = 16$$
Maria Isabel tem 9 anos e Maria Clara tem 16 anos. Portanto, Maria Clara tem 7 anos a mais que Maria Isabel.

16. a) Medida de área: 0,8 m^2. Então: $ab = 0{,}8$ m^2.

b) Medida de perímetro: 4,2 m. Então: $2a + 2b = 4{,}2$ m $\Rightarrow$
$\Rightarrow a + b = 2{,}1$ m.

c) $x^2 - sx + p = 0 \Rightarrow x^2 - (a + b)x + a \cdot b = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 2{,}1x + 0{,}8 = 0$

d) $\Delta = (-2{,}1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0{,}8 = 4{,}41 - 3{,}2 = 1{,}21$

$$x = \frac{2{,}1 \pm 1{,}1}{2}$$

$$x_1 = \frac{2{,}1 + 1{,}1}{2} = \frac{3{,}2}{2} = 1{,}6$$

$$x_2 = \frac{2{,}1 - 1{,}1}{2} = \frac{1{,}0}{2} = 0{,}5$$

Como $a > b$, temos $a = 1{,}6$ m e $b = 0{,}5$ m.

17. Exemplo de resposta: Tenho material suficiente para fazer 54 m de cerca. Preciso cercar um terreno retangular com 180 m^2 de medida de área. Quanto devem medir os lados do cercado? Resposta: Considerando um terreno retangular de lados medindo a e b e sabendo que são 54 m de cerca, temos:
$2a + 2b = 54 \Rightarrow 2(a + b) = 54 \Rightarrow a + b = 27 \Rightarrow s = 27$
Como a medida de área é 180 m^2, temos: $a \cdot b = 180 \Rightarrow p = 180$.
$x^2 - sx + p = 0 \Rightarrow x^2 - 27x + 180 = 0$
As raízes são 15 e 12 pois, $15 + 12 = 27$ e $15 \cdot 12 = 180$. Logo, os lados devem medir 15 m e 12 m.

18. Dois inteiros consecutivos: n e $n + 1$.
$n^2 + (n + 1)^2 = 85 \Rightarrow n^2 + n^2 + 2n + 1 = 85 \Rightarrow$
$\Rightarrow 2n^2 + 2n - 84 = 0 \Rightarrow n^2 + n - 42 = 0$
$\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-42) = 1 + 168 = 169$

$$n = \frac{-1 \pm 13}{2}$$

$$n_1 = \frac{12}{2} = 6$$

$$n_2 = -\frac{14}{2} = -7$$

Para $n = 6$, os números são 6 e 7. Para $n = -7$, são -7 e -6. Então, os números pedidos são 6 e 7 ou -7 e -6.

19. a) $s = -\frac{5}{3}$; $p = \frac{2}{3}$.

b) $s = -\frac{11}{2}$; $p = -\frac{1}{2}$.

c) $s = \frac{7}{9}$; $p = \frac{1}{9}$.

d) $s = \frac{5}{7}$; $p = -\frac{3}{7}$.

20. $p + q = 1$ e $pq = -2$.
$(p + q)^{5pq} = 1^{5 \times (-2)} = 1^{-10} = 1$

21. $s = \frac{-(-2)}{5} = \frac{2}{5}$; $p = -\frac{3}{5}$.

a) $x_1 + x_2 = s = \frac{2}{5}$

b) $x_1 \cdot x_2 = p = -\frac{3}{5}$

c) $$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{s}{p} = \frac{\frac{2}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{2}{3}$$

d) $(1 + x_1) \cdot (1 + x_2) = 1 + x_2 + x_1 + x_1 \cdot x_2 =$
$$= 1 + s + p = 1 + \frac{2}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{5 + 2 - 3}{5} = \frac{4}{5}$$

Educação financeira

I. Poupar dinheiro: economizar, Fazer bom uso do dinheiro; poupar gastos: não despender recursos, se puder evitar.

II. A caderneta de poupança é um tipo de conta bancária que tem rendimento determinado por uma resolução do governo, por meio do Banco Central do Brasil. Como o objetivo é que o cliente guarde dinheiro, o banco geralmente não fornece talão de cheques para esse tipo de conta. Ela oferece rendimento seguro de suas aplicações. Deve-se avaliar se o dinheiro está realmente disponível; não faz sentido ter investimentos e dívidas ao mesmo tempo.

III. Além da caderneta de poupança, pode-se aplicar o dinheiro em fundos de ações. Os principais tipos são: fundos de renda fixa, cujo rendimento o cliente já pode prever no momento em que contrata o serviço, e fundos de renda variável, cujo rendimento varia de acordo com as oscilações do mercado financeiro, podendo ou não ser vantajoso. Se a pessoa quiser correr riscos, pode aplicar em fundos de renda variável, que oferecem rendimento melhor, mas também podem apresentar perdas, dependendo das oscilações do mercado.

IV. Investidores se unem para comprar imóveis para locá-los ou reformá-los e vendê-los. Os lucros são divididos proporcionalmente entre os proprietários. Os riscos são grandes, já que o mercado imobiliário é sensível às mudanças políticas e econômicas do país.

V. São cotas do seu capital postas à venda no mercado. Quem compra ações de determinada companhia torna-se “sócio” dela, participando de seus resultados, seja lucro, seja prejuízo. Somente sócios que têm grandes lotes de ações podem participar das decisões e até mesmo da direção dessa empresa. Pode-se investir em ações comprando-as na Bolsa de Valores e os riscos são altos, pois dependem de inúmeros fatores, como políticos, econômicos e até mesmo meteorológicos.

1. Resposta pessoal.

2. Resposta pessoal.

3. Para dobrar o investimento inicial, deve-se ter um percentual de rendimento de 100%.
Se, ao investir 1 000 reais, obtém-se um rendimento de 200 reais ao dia, o rendimento percentual diário é de $200 : 1\,000 = 20\%$.

4. Não há nenhum investimento (a não ser ações) que retorne a mesma quantia em apenas 90 dias.

Na mídia

1. Considerando x o número de caminhões com 40 t de alimentos desperdiçados por dia, temos:
$$x = \frac{931 \cdot 10^6}{40 \cdot 365} = \frac{931 \cdot 10^6}{14\,600} = 63{,}7 \cdot 10^3 \simeq 64 \cdot 10^3$$
Portanto, o número inteiro que estava escrito na lacuna era 64.

2. Considerando d a quantidade de alimento desperdiçado em casa, em milhões de toneladas, temos:
$d = 74 \cdot 10^{-9} \cdot 7{,}75 \cdot 10^9 = 573{,}5$
Como o total de alimentos desperdiçados é 931 milhões de toneladas, temos:
$$\frac{573{,}5 \cdot 100}{931}\% \simeq 61{,}6\%$$
Portanto, é desperdiçado em casa um total de 573,5 milhões de toneladas de alimentos, o que representa aproximadamente 61,6% do total de alimentos desperdiçados.

3. Resposta pessoal.

Na Unidade

1. $(x + \sqrt{16}) \cdot (x - \sqrt{16}) = 48 \Rightarrow x^2 - 16 = 48 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 8$
Logo, alternativa **b**.
2. $2x \cdot x = 1{,}28 \Rightarrow x^2 = 1{,}28 : 2 \Rightarrow x^2 = 0{,}64 \Rightarrow x = \pm\sqrt{0{,}64}$
Para medidas, consideramos apenas o valor positivo, logo $x = 0{,}8$ m.
Medida de perímetro: $2 \cdot (2x + x) = 2 \cdot 3x = 6x = 6 \cdot 0{,}8$ m $=$
$= 4{,}80$ m. Logo, alternativa **d**.
3. $(x - 3) \cdot (x - 2) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$
Logo, alternativa **b**.
4. $x^2 + 20x = 800 \Rightarrow x^2 + 20x - 800 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-20 \pm \sqrt{3\,600}}{2}$
Como $x > 0$, temos $x = \dfrac{-20 + 60}{2} = 20$; ou seja, 20 m. Logo, alternativa **c**.
5. $(x + 5) \cdot (x + 9) = 2x + 5 \Rightarrow x^2 + 9x + 5x + 45 = 2x + 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 12x + 40 = 0$
$\Delta = 144 - 160 = -16 < 0$ (não tem raiz real)
Logo, alternativa **d**.
6. $x^2 + bx + 3 = 0$
$\Delta = b^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = b^2 - 12$
Se a equação admite raízes reais, então:
$\Delta \geqslant 0 \Rightarrow b^2 - 12 \geqslant 0 \Rightarrow b^2 \geqslant 12$
Como b é um inteiro de 1 a 10 e $b^2 \geqslant 12$, então b é um inteiro de 4 a 10, ou seja, há sete possibilidades. Logo, alternativa **d**.
7. $(x + 1) \cdot (x + 2) = 8x + 16 \Rightarrow x^2 + 2x + x + 2 = 8x + 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 - 5x - 14 = 0$
Nessa equação, $s = 5$ e $p = -14$. Logo, alternativa **c**.
8. $s = 10$ e $p = 16$.
Média aritmética: $\dfrac{10}{2} = 5$; média geométrica: $\sqrt{16} = 4$.
$x^2 - sx + p = 0 \Rightarrow x^2 - (5 + 4)x + 5 \cdot 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 9x + 20 = 0$
Logo, alternativa **c**.
9. Como a soma das raízes deve ser 1, a única opção válida é -1 e 2.
Logo, alternativa **d**.
10. Dividindo a conta pelos x professores, cada um pagaria y reais:
$\dfrac{720}{x} = y$
Dividindo a conta por $(x - 3)$ professores, cada um pagou $y + 40$ reais:
$\dfrac{720}{x - 3} = y + 40$
$\dfrac{720}{x - 3} = \dfrac{720}{x} + 40 \Rightarrow 720x = 720(x - 3) + 40x(x - 3) \Rightarrow$
$\Rightarrow 720x = 720x - 3 \cdot 720 + 40x^2 - 120x \Rightarrow$
$\Rightarrow 40x^2 - 120x - 3 \cdot 720 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 54 = 0$
Logo, alternativa **c**.

Unidade 4

Abertura (p. 89)

Exemplo de resposta: O uso de transportes alternativos pode contribuir para a qualidade de vida da família, tanto financeira, por representar uma economia mensal, quanto relacionada a saúde e bem-estar, por provocar o aumento de exercícios físicos.

Capítulo 7

1. **a)** $DD = \dfrac{10\,103 \text{ hab.}}{2\,063 \text{ km}^2} = 4{,}9$ hab./km²
b) $DD = \dfrac{720\,116 \text{ hab.}}{651 \text{ km}^2} = 1\,106{,}2$ hab./km²
c) $DD = \dfrac{1\,963\,726 \text{ hab.}}{435 \text{ km}^2} = 4\,514{,}3$ hab./km²
d) $DD = \dfrac{2\,255\,903 \text{ hab.}}{11\,401 \text{ km}^2} = 197{,}9$ hab./km²
e) Curitiba, pois a densidade demográfica dessa cidade é maior do que a das outras.
2. $V_m = \dfrac{\text{medida de deslocamento}}{\text{medida de tempo}} = \dfrac{50 \text{ km}}{0{,}5 \text{ h}} = 100$ km/h
A medida de velocidade média para ir da cidade A até a cidade B foi 100 km/h.
3. Não, pois a razão que antes era de $\dfrac{10}{7{,}5}$ agora é de $\dfrac{4}{3{,}5}$.
Como $10 \cdot 3{,}5 = 35$ e $4 \cdot 7{,}5 = 30$, as razões são diferentes.
4. Embalagem 1: $\dfrac{\text{R\$ } 3{,}50}{1 \text{ kg}} =$ R$ 3,50 por quilograma.
Embalagem 2: $\dfrac{\text{R\$ } 9{,}90}{3 \text{ kg}} =$ R$ 3,30 por quilograma.
Embalagem 3: $\dfrac{\text{R\$ } 31{,}50}{10 \text{ kg}} =$ R$ 3,15 por quilograma.
A embalagem 3 é a mais econômica.
5. **a)** A peça tem 8 gramas, sendo 6 de ouro. Número de quilates:
$\dfrac{6}{8} \cdot 24 = 18$.
b) $\dfrac{18}{24} = \dfrac{3}{4}$
c) $\dfrac{3}{4} = \dfrac{75}{100} = 75\%$
d) Em um anel de ouro puro, a porcentagem de ouro é 100%. Número de quilates: $100\% \cdot 24 = 24$.
6. Como escala de um mapa é a razão entre as medidas de distância no mapa e as medidas de distância reais correspondentes, temos:
$\dfrac{1 \text{ cm}}{625 \text{ km}} = \dfrac{1 \text{ cm}}{62\,500\,000 \text{ cm}}$ ou 1 : 62 500 000.
7. 2 300 km = 2 300 000 m = 230 000 000 cm
a) A medida de distância no mapa, x, em centímetros, será dada por:
$\dfrac{x}{230\,000\,000} = \dfrac{1}{62\,500\,000} \Rightarrow x = 3{,}68$
b) Resposta pessoal.
8. $\begin{cases} a + b = 720 \\ \dfrac{a}{5\,000} = \dfrac{b}{3\,000} = k \end{cases} \Rightarrow a = 450$ e $b = 270$. Logo, a medida de área do terreno de Pedro deve ser 450 m² e a de Paulo, 270 m².
9. $\begin{cases} a + b + c = 37\,800 \\ \dfrac{a}{2\,000} = \dfrac{b}{3\,000} = \dfrac{c}{4\,000} = k \end{cases} \Rightarrow a = 8\,400,\ b = 12\,600$ e $c = 16\,800$.
Portanto, Mônica receberá R$ 8.400,00, Renato receberá R$ 12.600,00 e Roberto, R$ 16.800,00.
10. Exemplo de resposta: Ari, Bernardo e Carla trabalham na secretaria de uma escola e seus salários somam R$ 6.460,00. Ari trabalha 5 horas por dia; Bernardo, 6; e Carla, 8. Determine quanto ganha cada um sabendo que os salários são proporcionais ao número de horas de trabalho. Resposta:
$\begin{cases} a + b + c = 6\,460 \\ \dfrac{a}{5} = \dfrac{b}{6} = \dfrac{c}{8} = k \end{cases}$
Ari ganha R$ 1.700,00; Bernardo; R$ 2.040,00; e Carla, R$ 2.720,00.
11. $\begin{cases} L + M = 400 \\ 11L = 9M = k \end{cases}$
Lara colocou 180 peças e Marco, 220 peças.

12. A escala é a razão entre as medidas na planta baixa e as medidas reais da casa. Sim, a proporção é direta. Quando duplicamos a medida real, a medida no desenho também é duplicada, e assim por diante.

13. $75 \cdot x = 60 \cdot 80 \Rightarrow x = 64$

Cada um gastará R$ 64,00.

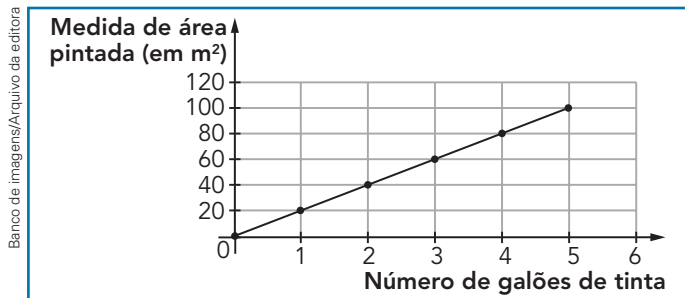
14.

Quantidade de tinta para pintar uma parede

Número de galões de tinta	0	1	2	3	4	5
Medida de área pintada (em m²)	0	20	40	60	80	100

Dados elaborados para fins didáticos.

A relação algébrica entre a medida de área y pintada e o número x de galões utilizados é $y = 20x$.

Quantidade de tinta para pintar uma parede

Dados elaborados para fins didáticos.

15. a) $\frac{1}{250} = \frac{6}{x} \Rightarrow x = 250 \cdot 6 = 1\,500$

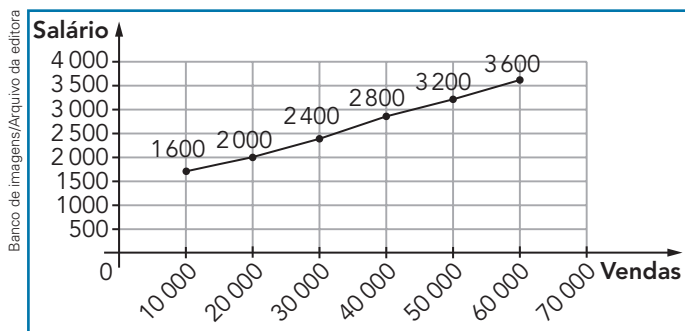
São necessários 1 500 mL de suco de limão.

b) $y = \frac{1}{250} \cdot x$

16. a) Não, porque a razão $\frac{\text{salário}}{\text{vendas}}$ não é constante.

Por exemplo: $\frac{1\,600}{10\,000} \neq \frac{2\,000}{20\,000}$.

b)

Gráfico de salários

Dados elaborados para fins didáticos.

c) Note que um acréscimo de R$ 10.000,00 nas vendas acarreta um acréscimo de R$ 400,00 no salário. Assim, um acréscimo de R$ 5.000,00 nas vendas acarreta um acréscimo de R$ 200,00 no salário. Para uma venda de R$ 45.000,00, o salário será: R$ 2.800,00 + R$ 200,00 = R$ 3.000,00.

17. Exemplo de resposta: Em um mês em que um ateliê fez 6 vestidos de noiva, utilizou 30 metros de tecido. Quantos metros são necessários para confeccionar 20 vestidos iguais a esses? Resposta:

$\frac{x}{20} = \frac{30}{6} \Rightarrow x = \frac{20 \cdot 30}{6} = 100$

São necessários 100 metros de tecido.

18. a) Os seis operários trabalhando mais horas por dia completariam a obra em menos dias, em uma relação inversamente proporcional.

$10 \cdot x = 8 \cdot 30 \Rightarrow x = 24$; ou seja, 24 dias.

b) Mantidas as 8 horas por dia, mas aumentando o número de operários, vão completar a obra em menos dias, em uma relação inversamente proporcional.

$9 \cdot x = 6 \cdot 30 \Rightarrow x = 20$; ou seja, 20 dias.

c) Em relação ao item anterior, são mantidos os 9 operários. Trabalhando mais horas por dia, completariam a obra em menos dias, em uma relação inversamente proporcional.

$10 \cdot x = 8 \cdot 20 \Rightarrow x = 16$; ou seja, 16 dias.

19.

	A Medida de distância (em km)	*B* Medida de tempo (em h)	*C* Medida de velocidade (em km/h)
1ª situação	1	45	80
2ª situação	x	72	100

Fixando *B*, *A* é diretamente proporcional a *C*.
Fixando *C*, *A* é diretamente proporcional a *B*.
Então, *A* é diretamente proporcional ao produto $B \cdot C$.

$\frac{1}{80 \cdot 45} = \frac{x}{100 \cdot 72} \Rightarrow x = \frac{100 \cdot 72}{80 \cdot 45} \Rightarrow x = 2$

Percorrerá 2 km.

20.

	A Quantidade de azulejos	*B* Medida do comprimento (em m)	*C* Medida da altura (em m)
1ª situação	300	3	2,25
2ª situação	x	4,5	2

Fixando *B*, *A* é diretamente proporcional a *C*.
Fixando *C*, *A* é diretamente proporcional a *B*.
Então, *A* é diretamente proporcional ao produto $B \cdot C$.

$\frac{300}{3 \cdot 2{,}25} = \frac{x}{4{,}5 \cdot 2} \Rightarrow x = \frac{300 \cdot 9}{3 \cdot 2{,}25} \Rightarrow x = 400$

Serão necessários 400 azulejos.

21.

	A Quantidade de livros	*B* Quantidade de páginas	*C* Consumo de papel (em kg)
1ª situação	1 000	240	360
2ª situação	x	320	720

Fixando *B*, *A* é diretamente proporcional a *C*.
Fixando *C*, *A* é inversamente proporcional a *B*.
Então, *A* é diretamente proporcional ao produto $\frac{1}{B} \cdot C$.

$\frac{1\,000}{\frac{1}{240} \cdot 360} = \frac{x}{\frac{1}{320} \cdot 720} \Rightarrow \frac{1\,000 \cdot 240}{360} = \frac{320x}{720} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 1\,500$

É possível imprimir 1 500 livros.

22.

	A Dias	*B* Operários	*C* Medida do comprimento (em m)	*D* Medida da profundidade (em m)
1ª situação	6	10	50	2
2ª situação	x	16	80	3

Fixando *C* e *D*, *A* e *B* são inversamente proporcionais.
Fixando *B* e *D*, *A* e *C* são diretamente proporcionais.
Fixando *B* e *C*, *A* e *D* são diretamente proporcionais.

Então, A é diretamente proporcional ao produto $\frac{1}{B} \cdot C \cdot D$.

$$\frac{6}{\frac{1}{10} \cdot 50 \cdot 2} = \frac{x}{\frac{1}{16} \cdot 80 \cdot 3} \Rightarrow \frac{6}{10} = \frac{x}{15} \Rightarrow x = \frac{6 \cdot 15}{10} \Rightarrow x = 9$$

Serão necessários 9 dias.

23.

	A	*B*	*C*	*D*
	Quantidade de homens	**Quantidade de hectares**	**Quantidade de dias**	**Quantidade de horas por dia**
1ª situação	5	10	9	8
2ª situação	x	20	10	9

Fixando B e C, A e D são inversamente proporcionais.
Fixando B e D, A e C são inversamente proporcionais.
Fixando C e D, A e B são diretamente proporcionais.
Então A é diretamente proporcional ao produto $B \cdot \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{D}$.

$$\frac{5}{10 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{8}} = \frac{x}{20 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9}} \Rightarrow \frac{5}{\frac{10}{72}} = \frac{x}{\frac{2}{9}} \Rightarrow x = \frac{5 \cdot \frac{2}{9}}{\frac{10}{72}} \Rightarrow x = \frac{\frac{10}{9}}{\frac{10}{72}} \Rightarrow x = \frac{10}{9} \cdot \frac{72}{10} \Rightarrow x = 8$$

Serão necessárias 8 pessoas.

24.

	A	*B*	*C*	*D*
	Medida do comprimento (em m)	**Quantidade de operários**	**Quantidade de horas por dia**	**Quantidade de dias**
1ª situação	20	12	10	6
2ª situação	x	15	8	9

Fixando B e C, A e D são diretamente proporcionais.
Fixando B e D, A e C são diretamente proporcionais.
Fixando C e D, A e B são diretamente proporcionais.
Então, A é diretamente proporcional ao produto $B \cdot C \cdot D$.

$$\frac{20}{12 \cdot 10 \cdot 6} = \frac{x}{15 \cdot 8 \cdot 9} \Rightarrow x = \frac{15 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 20}{12 \cdot 10 \cdot 6} \Rightarrow x = 30$$

O muro tinha 30 metros.

25. Exemplo de resposta: Viajando a 80 km/h um ônibus leva 2 h 30 min para percorrer 200 km. Se viajasse a 100 km/h, em quanto tempo percorreria 250 km? Resposta: Fixando a medida de velocidade (v), a de tempo (t) é diretamente proporcional à medida de distância (d). Fixando a medida de distância (d), a medida de tempo (t) é inversamente proporcional à medida de velocidade (v). Então: $t = k \cdot d \cdot \frac{1}{v}$. Tomando t em minutos, 2 h 30 min = 150 min.

1ª situação: $150 = k \cdot 200 \cdot \frac{1}{80} \Rightarrow k = 60$.

2ª situação: $t = 60 \cdot 250 \cdot \frac{1}{100} = 150$; ou seja, 150 min ou 2 h 30 min.

26. Exemplo de resposta: Para construir um muro ao redor de um campo de futebol cujo perímetro mede 600 metros, 4 pedreiros levaram 6 dias trabalhando. Se a medida de perímetro do campo fosse 1 000 metros, com 8 pedreiros trabalhando, quantos dias levariam? Resposta: Sendo y a quantidade de dias, x a medida de perímetro e n o número de pedreiros, temos $y = k \cdot x \cdot \frac{1}{n}$.

1ª situação: $6 = k \cdot 600 \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow k = \frac{1}{25}$.

2ª situação: $y = \frac{1}{25} \cdot 1000 \cdot \frac{1}{8} = 5$.
Resposta: 5 dias.

27. Quantidade de litros de gasolina para percorrer 117 km:

$$\frac{x}{117} = \frac{45}{405} \Rightarrow x = 13$$

Valor gasto com gasolina: $6{,}7 \cdot 13 = 87{,}1$; ou seja, R$ 87,10.

Capítulo 8

Atividades

1. $j = \dfrac{c \cdot i \cdot t}{100} = \dfrac{8\,920 \cdot 13 \cdot 3}{100} = 3\,478{,}8$

Rende juros de R$ 3.478,80.

2. Transformando o prazo em anos: $t = 5$ meses $= \dfrac{5}{12}$ ano.

$j = \dfrac{c \cdot i \cdot t}{100} = \dfrac{76\,125 \cdot 12 \cdot \frac{5}{12}}{100} = 3\,806{,}25$

O juro é R$ 3.806,25.

3. **1º modo**:

Usando a taxa ao mês e o tempo em meses:

3 anos e 4 meses = 40 meses ($t = 40$)

Taxa: 1% ao mês ($i = 1$)

$j = \dfrac{4\,800 \cdot 1 \cdot 40}{100} = 1\,920$

Júlio vai receber R$ 4.800,00 + R$ 1.920,00 = R$ 6.720,00.

2º modo:

Usando a taxa ao ano e tempo em anos:

3 anos e 4 meses = 40 meses = $\dfrac{40}{12}$ anos.

Taxa: 1% ao mês = 12 · 1% ao ano = 12% ao ano.

$j = \dfrac{4\,800 \cdot 12 \cdot \frac{40}{12}}{100} = 1\,920$

O montante é R$ 4.800,00 + R$ 1.920,00 = R$ 6.720,00.

4. A entrada é de $\dfrac{1}{3}$ de R$ 90.000,00, ou seja, R$ 30.000,00. Sobraram R$ 60.000,00 a serem pagos em duas parcelas, uma de R$ 30.000,00 no prazo de 1 ano e outra de R$ 30.000,00 no prazo de 2 anos.

O juro da 1ª parcela é: $j = \dfrac{c \cdot i \cdot t}{100} = \dfrac{30\,000 \cdot 12 \cdot 1}{100} = 3\,600.$

O juro da 2ª parcela é: $j =$ $j = \dfrac{c \cdot i \cdot t}{100} = \dfrac{30\,000 \cdot 12 \cdot 2}{100} = 7\,200.$

O juro total é R$ 3.600,00 + R$ 7.200,00 = R$ 10.800,00.

5. O prazo é de 93 dias, equivalente a $\dfrac{93}{360}$ anos, ou $\dfrac{31}{120}$ anos.

O juro é: $j = \dfrac{c \cdot i \cdot t}{100} = \dfrac{3\,280 \cdot 18 \cdot \frac{31}{120}}{100} = 152{,}52.$

Ele vai devolver R$ 3.280,00 + R$ 152,52 = R$ 3.432,52 ao banco.

6. O prazo de 7 meses corresponde a $\dfrac{7}{12}$ anos.

O juro é: $j = \dfrac{c \cdot i \cdot t}{100} = \dfrac{19\,200 \cdot 10{,}25 \cdot \frac{7}{12}}{100} = 1\,148.$

Ele vai devolver R$ 19.200,00 + R$ 1.148,00 = 20.348,00.

7. O prazo de 5 meses e 15 dias corresponde a 165 dias, ou $\dfrac{165}{360}$ ano.

O juro é: $j = \dfrac{c \cdot i \cdot t}{100} = \dfrac{13\,000 \cdot 9 \cdot \frac{165}{360}}{100} = 536{,}25$

8. O prazo de 3 meses corresponde a $\dfrac{3}{12}$ do ano.

a) $j = \dfrac{c \cdot i \cdot t}{100} = \dfrac{720 \cdot 24 \cdot \frac{3}{12}}{100} = 43{,}2$; ou seja, R$ 43,20.

b) Vai pagar um total de R$ 720,00 + R$ 43,20 = R$ 763,20.

9. **a)** O prazo de 10 meses corresponde a $\dfrac{10}{12}$ do ano.

O juro é: $j = \dfrac{c \cdot i \cdot t}{100} = \dfrac{13\,200 \cdot 9{,}5 \cdot \frac{10}{12}}{100} = 1\,045.$

Sim, porque ela vai receber R$ 13.200,00 + R$ 1.045,00 = = R$ 14.245,00, o suficiente para comprar um terreno que custa R$ 14.200,00.

b) Resposta esperada: Sim, pois desse modo Vera não faz dívidas das quais poderia pagar juro.

10. Exemplo de resposta: Júlia aplicou R$ 400,00. Depois de 5 meses da aplicação o montante era de R$ 440,00. Qual foi a taxa de juros ao mês aplicada sobre o capital? Resposta: 2%.

11. **a)** 100% + 10% = 1,10

b) 6 · 1,10 = 6,60. O litro passou a custar R$ 6,60.

12. **a)** 100% + 5% = 1,05

b) 900 · 1,05 = 945. O aluguel passou a custar R$ 945,00.

13. **a)** 100% − 10% = 0,90

b) 120 · 0,90 = 108. A camiseta será vendida por R$ 108,00.

14. **a)** 100% − 30% = 0,70

b) 3 600 · 0,70 = 2 520. O novo saldo da dívida é R$ 2.520,00.

15. **a)** $\dfrac{840}{800} = 1{,}05$

b) $\dfrac{105}{100} = 100\% + 5\%$. O aumento foi de 5%.

16. **a)** 2 150 000 : 2 500 000 = 0,86

b) $\dfrac{86}{100} = \dfrac{100 - 14}{100} = 100\% - 14\%$. O faturamento reduziu 14%.

17. Em 2020 será: 2 610 000 · 1,044 = 2 724 840.

Em 2024 será: 2 724 840 · 1,044 ≃ 2 845 000; ou seja, aproximadamente 2 845 milhares de habitantes.

18. **a)** $(84\,000 \cdot 0{,}80) \cdot 0{,}90 = 60\,480$

b) $0{,}80 \cdot 0{,}90 = 0{,}72 = \dfrac{72}{100} = \dfrac{100 - 28}{100} = 100\% - 28\%$.

Caiu 28%.

19. **a)** $(40\,000 \cdot 0{,}80) \cdot 1{,}10 = 35\,200$

b) 35 200 · 1,12 = 39 424, abaixo do valor de 2019.

$0{,}80 \cdot 1{,}10 \cdot 1{,}12 = 0{,}9856 = \dfrac{98{,}56}{100} = \dfrac{100 - 1{,}44}{100} =$
$= 100\% - 1{,}44\%$

Ficou 1,44% abaixo.

20. $(100\% - 8\%) \cdot (100\% - 5\%) = 0{,}92 \cdot 0{,}95 = 0{,}874 = 87{,}4\%$

21. $(Q \cdot 1{,}10) \cdot 1{,}10 = Q \cdot 1{,}21 = Q \cdot 121\%$. Aumento de 21%.

22. $(60\,000 \cdot f) \cdot f = 48\,600 \Rightarrow f^2 = \dfrac{48\,600}{60\,000} = 0{,}81 \Rightarrow f = 0{,}90$

$0{,}90 = \dfrac{90}{100} = \dfrac{100 - 10}{100} = 100\% - 10\%$

Caiu 10% em cada ano.

23. 4 200 · 1,12 · 1,20 · 0,75 = 4 233,6; ou seja, R$ 4.233,60.

24. Exemplo de resposta: Um cartucho de tinta de uma impressora, que custava R$ 250,00, teve um aumento de 10% devido ao aumento do valor do dólar. Posteriormente, sofreu outro aumento de 6% em razão da inflação. Na liquidação de uma loja, esse produto passou a ser oferecido com um desconto de 10%. Qual era o preço do cartucho nessa loja durante a liquidação? Resposta: R$ 262,35.

25. Como a dívida aumentou 10% a cada mês, em 6 meses temos que o fator multiplicador é: $(1{,}10)^6 = 1{,}771561$. Logo, a dívida aumentou em aproximadamente 77,16%.

Na mídia

1. Como 82,7% dos domicílios no Brasil utilizaram internet em 2019, temos: 0,827 · 10 = 8,27 ≃ 8.

Logo, a internet chega a aproximadamente 8 em cada 10 domicílios do país.

2. A partir da análise do gráfico “Domicílios em que havia a utilização da Internet por situação do domicílio (%)”, temos que, na região Norte, 86,5% dos domicílios na área urbana e 38,4% na área rural utilizavam internet.

3. A partir da análise do gráfico “Pessoas que utilizaram a Internet (%)”, temos que a região em que mais pessoas acessavam a internet, relativamente ao total de habitantes, foi a região Centro-Oeste, 84,6% das pessoas.

4. Considerando os dados do gráfico “Pessoas que utilizaram a Internet, por grupos de idade (%)”, temos que, nos grupos indicados, as diferenças entre 2019 e 2018 foram:

- de 10 a 13 anos: 77,7% − 75,0% = 2,7%;
- de 14 a 19 anos: 90,2% − 88,6% = 1,6%;
- de 20 a 24 anos: 92,7% − 91,0% = 1,7%;
- de 25 a 29 anos: 92,6% − 90, 7% = 1,9%;
- de 30 a 39 anos: 90,4% − 87,9% = 2,5%;
- de 40 a 49 anos: 84,6% − 80,5% = 4,1%;
- de 50 a 59 anos: 74,2% − 67,9% = 6,3%.

Logo, na faixa de 50 a 59 anos, o acréscimo foi $\frac{6,3}{67,9} \cdot 100\% \simeq 9,3\%$.

De 60 anos ou mais: 45,0% − 38,7% = 6,3%. Logo, na faixa de 60 anos ou mais, acréscimo de $\frac{6,3}{38,7} \cdot 100\% \simeq 16,3\%$. Portanto, o maior aumento porcentual ocorreu na faixa de 60 anos ou mais.

5. Considerando os dados de “Internet – Equipamento utilizado para acessar (2)”, temos que o telefone móvel celular é o equipamento mais utilizado, representando 98,6% dos acessos em 2019.

6. Considerando os dados de “Internet – Equipamento utilizado para acessar (2)”, temos que os termos que completam a frase são: “aumentou” e “diminuiu”, respectivamente.

Na Unidade

1.

Quantidade de ralos		Medida de tempo (em h)		Medida de capacidade (em m³)
6	———	6	———	900
x	———	4	———	500

Fixando a medida de tempo, a quantidade de ralos é diretamente proporcional à medida de capacidade.

Fixando a medida de capacidade, a quantidade de ralos é inversamente proporcional à medida de tempo (diretamente proporcional ao inverso da medida de tempo).

Então:

$$\frac{x}{\frac{1}{4} \cdot 500} = \frac{6}{\frac{1}{6} \cdot 900} \Rightarrow 150x = 750 \Rightarrow x = \frac{750}{150} \Rightarrow x = 5$$

Logo, alternativa **c**.

2. Nos primeiros 10 dias arrecadaram: 10 · 12 kg = 120 kg.
Vamos calcular qual seria a arrecadação nos demais 20 dias.

Quantidade de alimentos (em kg)		Quantidade de estudantes		Quantidade de dias		Quantidade de horas por dia
120	———	20	———	10	———	3
x	———	50	———	20	———	4

A quantidade arrecadada é diretamente proporcional ao produto das outras três grandezas.

$$\frac{x}{50 \cdot 20 \cdot 4} = \frac{120}{20 \cdot 10 \cdot 3} \Rightarrow 600x = 480\,000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{480\,000}{600} \Rightarrow x = 800$$

Nos 30 dias, o total arrecadado seria: 120 kg + 800 kg = 920 kg.
Logo, alternativa **a**.

3.

A		*B*		*C*
Medida de tempo (em min)		**Quantidade de secretárias**		**Quantidade de páginas**
10	———	27	———	324
x	———	50	———	00

Fixando *B*, *A* e *C* são diretamente proporcionais.
Fixando *C*, *A* e *B* são inversamente proporcionais.

Então, *A* é diretamente proporcional ao produto $\frac{1}{B} \cdot C$.

Assim:

$$\frac{10}{\frac{1}{27} \cdot 324} = \frac{x}{\frac{1}{50} \cdot 600} \Rightarrow \frac{10}{12} = \frac{x}{12} \Rightarrow x = 10$$

Logo, alternativa **a**.

4.

A		*B*		*C*		*D*
Quantidade de peças		**Quantidade de máquinas**		**Quantidade de dias**		**Quantidade de horas por dias**
500	———	5	———	5	———	5
x	———	10	———	10	———	10

Fixando *B* e *C*, *A* e *D* são diretamente proporcionais.
Fixando *B* e *D*, *A* e *C* são diretamente proporcionais.
Fixando *C* e *D*, *A* e *B* são diretamente proporcionais.
Então, *A* é diretamente proporcional ao produto $B \cdot C \cdot D$. Assim;

$$\frac{500}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{x}{10 \cdot 10 \cdot 10} \Rightarrow x = \frac{500 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}{5 \cdot 5 \cdot 5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 4\,000$$

Logo, alternativa **c**.

5. 6 meses $= \frac{6}{12}$ ano $= \frac{1}{2}$ ano

$$j = \frac{c \cdot i \cdot t}{100} = \frac{50 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}}{100} = 25$$

$M = c + j = 500 + 25 = 525$

Irá receber R$ 525,00. Logo, alternativa **b**.

6. Dando entrada de 600 reais, a dívida fica em: 1 000 reais − 600 reais = = 400 reais. Esta dívida será paga após 1 mês por 420 reais.

O juro é de: 420 − 400 = 20. A taxa percentual mensal do juro sobre a dívida é: $\frac{20}{400} \cdot 100\% = 5\%$. Logo, alternativa **b**.

Outro modo:

Pela fórmula $j = \frac{c \cdot i \cdot t}{100}$, temos:

$C = 400$, $j = 20$, $t = 1$ mês.

$$20 = \frac{400 \cdot i \cdot 1}{100} \Rightarrow 20 = 4i \Rightarrow i = \frac{20}{4} \Rightarrow i = 5$$

Logo, a taxa é 5% ao mês.

7. $(50\,000 \cdot f) \cdot f = 32\,000 \Rightarrow f^2 = 0,64 \Rightarrow f = 0,8$

Valor daqui a 1 ano: 32 000 · 0,8 = 25 600. Logo, alternativa **a**.

8. Medida de área original: $30 \cdot 15\ cm^2$.

Medida de área após o cozimento:

$(30 \cdot 0,8) \cdot (15 \cdot 0,8)\ cm^2 = (30 \cdot 15) \cdot 0,64\ cm^2$.

Então: 0,64 = 64% = 100% − 36%; a redução foi de 36%. Logo, alternativa **c**.

Unidade 5

Abertura (p. 113)

Resposta pessoal. Exemplo de resposta: As vantagens de estabelecer APPs são evitar desmatamentos e preservar o meio ambiente.

Capítulo 9

Atividades

1. $\frac{AB}{CD} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

2. a) $\frac{AB}{RS} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$

b) $\frac{RS}{AB} = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$

c) $\frac{RS}{PQ} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$

d) $\frac{PQ}{AB} = \frac{30}{10} = 3$

3. a) $\frac{AB}{BC} = \frac{1}{1} = 1$

b) $\frac{AB}{BE} = \frac{1}{3}$

c) $\frac{AC}{CE} = \frac{2}{2} = 1$

d) $\frac{AD}{AB} = \frac{3}{1} = 3$

e) $\frac{BC}{AE} = \frac{1}{4}$

4. $\frac{AB}{CD} = \frac{CD}{EF} \Rightarrow \frac{2}{CD} = \frac{CD}{8} \Rightarrow CD^2 = 16 \Rightarrow CD = 4$ (CD não pode ser negativo); ou seja, 4 cm.

5. $\frac{AB}{BC} = \frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ e $AC = x + y = 35$

$\frac{x+y}{y} = \frac{2+3}{3} \Rightarrow \frac{35}{y} = \frac{5}{3} \Rightarrow 5y = 3 \cdot 35 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 3 \cdot 7 \Rightarrow y = 21$; então $BC = 21$.

Como $x + y = 35$ e $y = 21$, temos: $x = 35 - 21 = 14$; então $AB = 14$.

Logo, $x = 14$ cm e $y = 21$ cm.

6. $\frac{b}{h} = \frac{5}{2}$; $b = 15$; medida de perímetro: $2(b + h)$.

$\frac{b}{b+h} = \frac{5}{5+2} \Rightarrow \frac{15}{b+h} = \frac{5}{7} \Rightarrow b + h = 21$

Como a medida de perímetro é $2(b + h)$, temos: $2 \cdot 21$ m $= 42$ m.

7. $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$; medida de perímetro: $2(a + b) = 150 \Rightarrow a + b = 75$.

$\frac{a+b}{b} = \frac{2+3}{3} \Rightarrow \frac{75}{b} = \frac{5}{3} \Rightarrow b = 3 \cdot 15 \Rightarrow b = 45$; ou seja, 45 m.

Como $a + b = 75$ e $b = 45$, temos: $a = 75$ m $- 45$ m $= 30$ m.

8. Como $AM = MB$, temos: $\frac{AM}{MB} = 1$

9. a) $\frac{2}{4} = \frac{3}{x} \Rightarrow 2x = 12 \Rightarrow x = 6$

b) $\frac{4}{12} = \frac{x}{21} \Rightarrow 3x = 21 \Rightarrow x = 7$

c) $\frac{x}{9} = \frac{8}{12} \Rightarrow 3x = 18 \Rightarrow x = 6$

d) $\frac{x}{14} = \frac{9}{12} \Rightarrow 4x = 42 \Rightarrow x = \frac{21}{2}$

10. $\frac{20}{15} = \frac{x}{24} \Rightarrow 15x = 480 \Rightarrow x = \frac{480}{15} \Rightarrow x = 32$

O muro deverá ter 32 metros.

11. a) $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$ e $x + y = 21$.

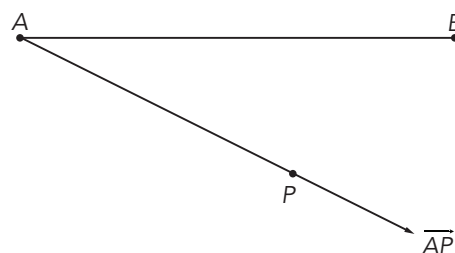
$\frac{x+y}{y} = \frac{4+3}{3} \Rightarrow \frac{21}{y} = \frac{7}{3} \Rightarrow y = 9$

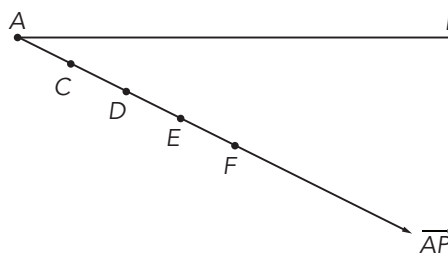
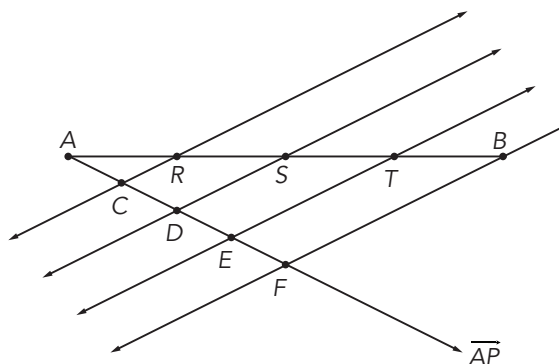
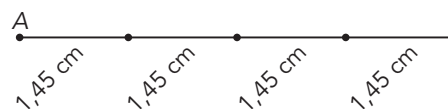
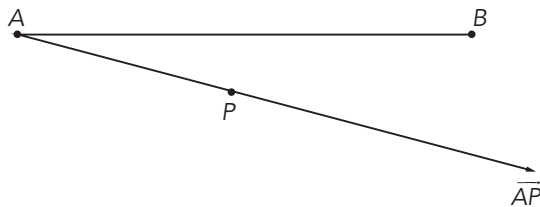
Como $x + y = 21$ e $y = 9$, temos $x = 12$.

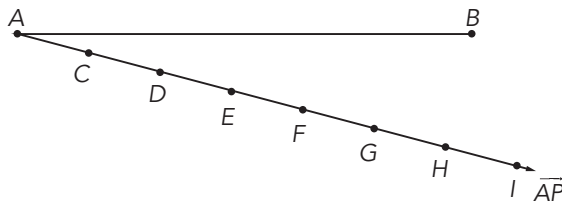
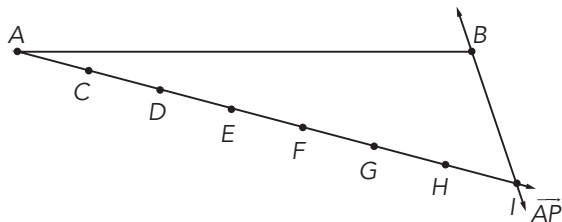
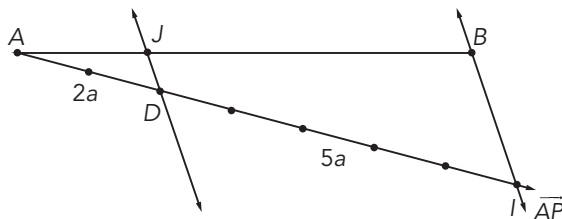
b) $\frac{x}{y} = \frac{4}{10}$ e $x + y = 21$.

$\frac{x+y}{y} = \frac{4+10}{10} \Rightarrow \frac{21}{y} = \frac{14}{10} \Rightarrow 2y = 3 \cdot 10 \Rightarrow y = 15$

Como $x + y = 21$ e $y = 15$, temos $x = 6$.

12. Considere $AB = 5{,}8$ cm e um ponto P não pertencente ao segmento de reta $\overline{AB}$. Traçamos por A e P uma semirreta $\overrightarrow{AP}$ oblíqua à $\overline{AB}$.

Como o segmento de reta $\overline{AB}$ será dividido em 4 partes congruentes, usando o compasso com abertura a qualquer, marcamos em $\overrightarrow{AP}$ 4 pontos, C, D, E e F, tais que $AC = CD = DE = EF = a$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Usando a régua, traçamos a reta $\overleftrightarrow{FB}$. E usando também o esquadro, traçamos por E a reta $\overleftrightarrow{ET} \parallel \overleftrightarrow{FB}$, com T em $\overline{AB}$. Analogamente, traçamos as retas $\overleftrightarrow{DS}$ e $\overleftrightarrow{CR}$.

Dessa maneira, obtemos o segmento de reta $\overline{AB}$ dividido em 4 partes congruentes.

13. Considere $AB = 6$ cm e um ponto P não pertencente ao segmento de reta $\overline{AB}$. Traçamos por A e P uma semirreta $\overrightarrow{AP}$ oblíqua a $\overline{AB}$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Como $2 + 5 = 7$, tomando o compasso com abertura a qualquer, marcamos em $\overrightarrow{AP}$ 7 pontos, C, D, E, F, G, H e I, tais que $AC = CD = DE = EF = FG = GH = HI = a$.

Traçamos a reta $\overleftrightarrow{IB}$.

Usando régua e esquadro, traçamos por D a reta $\overleftrightarrow{DJ} \parallel \overleftrightarrow{IB}$, com J em $\overline{AB}$. O ponto J divide $\overline{AB}$ na razão $\frac{AJ}{JB} = \frac{AD}{DI} = \frac{2}{5}$.

Dessa maneira, obtemos o segmento de reta $\overline{AB}$ dividido em 2 partes, na razão $\frac{2}{5}$, que medem aproximadamente 1,71 cm e 4,29 cm.

14. Exemplo de resposta: Igor e Rodrigo têm sítios vizinhos. Os sítios são delimitados, na frente, por uma rodovia, e atrás, por uma represa. Eles sabem que os dois sítios tomam 87,5 metros da margem da represa. A frente do sítio do Igor mede 20 metros e a frente do sítio do Rodrigo mede 50 metros. Qual é a medida que cada sítio tem da margem da represa? Resposta: $x = 25$ m e $y = 62{,}5$ m.

15. a) $\frac{8}{2} = \frac{x}{3} \Rightarrow 2x = 24 \Rightarrow x = 12$

b) $\frac{x}{18} = \frac{6}{9} \Rightarrow 9x = 108 \Rightarrow x = 12$

16. $\frac{x}{12} = \frac{x - 7 + 2}{x - 7} \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{x - 5}{x - 7} \Rightarrow$

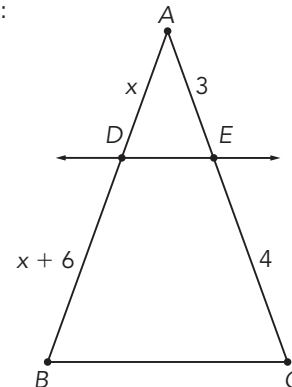
$\Rightarrow x^2 - 7x = 12x - 60 \Rightarrow x^2 - 19x + 60 = 0$

Nessa equação, $s = 19$ e $p = 60$, então:

$x = 4$ (não serve, pois $x > 12$) ou $x = 15$.

$\frac{x}{12} = \frac{20}{y} \Rightarrow \frac{15}{12} = \frac{20}{y} \Rightarrow 15y = 240 \Rightarrow y = 16$

Portanto, $x = 15$ e $y = 16$.

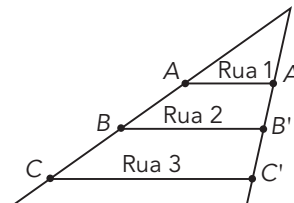
17. Esboço da situação:

Banco de imagens/Arquivo da editora

$AB = x + x + 6 = 2x + 6$

$\frac{x}{x + 6} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4x = 3x + 18 \Rightarrow x = 18$

$AB = 2x + 6 = 2 \cdot 18 + 6 = 36 + 6 = 42$

18. A imagem não está representada com medidas reais.

Exemplo de resposta: Marta fez um esboço de duas quadras da rua onde ela mora. Sabendo que $AB = 7$ cm, $AC = 15$ cm e $A'B' = 4{,}2$ cm, qual é a medida de $\overline{A'C'}$? Resposta: $A'C' = 9$ cm.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Participe (p. 122)

I. a) $\hat{1}$; esses ângulos são congruentes, portanto, as medidas são iguais.

b) $\hat{3}$; esses ângulos são congruentes, portanto, as medidas são iguais.

c) $\hat{3}$; as medidas são iguais, pois os ângulos são congruentes.

II. $x = 110°$, pois x é o suplemento de $70°$, isto é, a soma de x com $70°$ deve ser igual a $180°$.

Na mídia

1. $\frac{2700 \cdot 10^3 \cdot 10^2}{54} = 50 \cdot 10^5 = 5\,000\,000$

Portanto, a escala é 1 : 5 000 000.

2. Considerando h a medida da altura do prédio na escala 1 : 250, temos:

$h = \frac{15\,500 \cdot 1}{250} = 62$

Logo, a altura do prédio na maquete deve medir 62 cm.

3. Resposta pessoal.

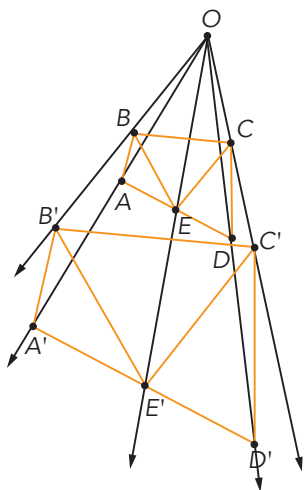
Capítulo 10

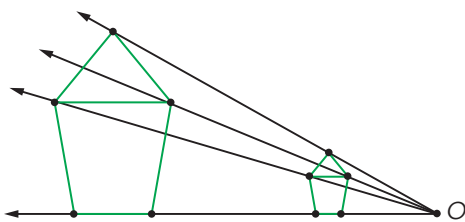
Participe (p. 124)

a) O formato.
b) Quanto ao tamanho e à cor.
c) A cinza. Porque está mais próxima do bolim.
d) Não. Eles apresentam o mesmo formato, mas têm diferentes tamanhos.

Atividades

1. Respostas esperadas:
a) Figuras 13 e 19.
b) Figuras 11 e 14.
c) Figura 15.
d) Figura 12.
e) Figura 10.
f) Figuras 9 e 18.

2. A imagem não está representada com tamanho real. Exemplo de resposta:

Banco de imagens/Arquivo da editora

3. A imagem não está representada com tamanho real. Exemplo de resposta:

Banco de imagens/Arquivo da editora

4. 4 590 mm : 18 = 255 mm = 25,5 cm

5. 4,8 · 1 000 000 cm = 4,8 · 10 km = 48 km

Participe (p. 130)

I. a) $\triangle ABC$: $\text{med}(\hat{A}) = 90°$, $\text{med}(\hat{B}) = 45°$, $\text{med}(\hat{C}) = 45°$;
$\triangle GEF$: $\text{med}(\hat{G}) = 90°$, $\text{med}(\hat{E}) = 45°$, $\text{med}(\hat{F}) = 45°$.

b) $\frac{FE}{CB} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{FE}{CB} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{FE}{CB} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

c) $\frac{GE}{AB} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ e $\frac{GF}{AC} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

d) Resposta pessoal.
e) Resposta pessoal.

6. a) Triângulos 2, 3, 7 e 10.
b) Nenhum triângulo.
c) Triângulo 6.
d) Triângulo 9.
e) Triângulos 12.

7. (1) Lado homólogo a $\overline{AB}$ é $\overline{A_1B_1}$; a $\overline{BC}$ é $\overline{B_1C_1}$; e a $\overline{CA}$ é $\overline{C_1A_1}$.

(2) Lado homólogo a $\overline{AB}$ é $\overline{C_2B_2}$; a $\overline{BC}$ é $\overline{B_2A_2}$; e a $\overline{CA}$ é $\overline{A_2C_2}$.

(3) Lado homólogo a $\overline{AB}$ é $\overline{A_3C_3}$; a $\overline{BC}$ é $\overline{C_3B_3}$; e a $\overline{CA}$ é $\overline{B_3A_3}$.

(4) Lado homólogo a $\overline{AB}$ é $\overline{B_4A_4}$; a $\overline{BC}$ é $\overline{A_4C_4}$; e a $\overline{CA}$ é $\overline{C_4B_4}$.

(5) Lado homólogo a $\overline{AB}$ é $\overline{MO}$; a $\overline{BC}$ é $\overline{ON}$; e a $\overline{CA}$ é $\overline{NM}$.

(6) Lado homólogo a $\overline{AB}$ é $\overline{N_1O_1}$; a $\overline{BC}$ é $\overline{O_1M_1}$; e a $\overline{CA}$ é $\overline{M_1N_1}$.

8. a) $\frac{3}{9} = \frac{4}{x} \Rightarrow 3x = 36 \Rightarrow x = 12$

b) $\frac{8}{2} = \frac{10}{x} \Rightarrow 8x = 20 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$; $\alpha = 105°$

c) $\frac{4}{2} = \frac{6}{y} \Rightarrow 4y = 12 \Rightarrow y = 3$

$\frac{4}{8} = \frac{2}{x} \Rightarrow 4x = 16 \Rightarrow x = 4$

9. $\frac{7}{x} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 21$; ou seja, 21 cm.

$\frac{5}{y} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 15$; ou seja, 15 cm.

$\frac{4}{z} = \frac{1}{3} \Rightarrow z = 12$; ou seja, 12 cm.

10. a) $\frac{a}{14} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2a = 42 \Rightarrow a = 21$

$\frac{b}{12} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2b = 36 \Rightarrow b = 18$

$\frac{c}{10} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2c = 30 \Rightarrow c = 15$

b) $\frac{21 + 18 + 15}{10 + 12 + 14} = \frac{54}{36} = \frac{3}{2}$

11. Se $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = k$, então $a = kx$; $b = ky$; $c = kz$.

$a + b + c = kx + ky + kz \Rightarrow$

$\Rightarrow a + b + c = k(x + y + z) \Rightarrow \frac{a + b + c}{x + y + z} = k$

Portanto, a razão entre as medidas de perímetro é k.

12. A razão entre as medidas de perímetro é:

$\frac{8 + 18 + 16}{63} = \frac{42}{63} = \frac{2}{3}$

$\frac{8}{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2x = 24 \Rightarrow x = 12$; ou seja, 12 cm.

$\frac{18}{y} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2y = 54 \Rightarrow y = 27$; ou seja, 27 cm.

$\frac{16}{z} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2z = 48 \Rightarrow z = 24$; ou seja, 24 cm.

13. a) Razão: $\frac{13}{26} = \frac{1}{2}$. Então:

$\frac{5}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 10$

$\frac{y}{24} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2y = 24 \Rightarrow y = 12$

b) Razão: $\frac{8}{4} = 2$. Então:

$\frac{x}{6} = \frac{2}{1} \Rightarrow x = 12$

$\frac{y}{3} = \frac{2}{1} \Rightarrow y = 6$

14. $\frac{9}{a} = \frac{18}{b} = \frac{21}{c} = 3 \Rightarrow \frac{3}{a} = \frac{6}{b} = \frac{7}{c} = 1$

$\frac{3}{a} = 1 \Rightarrow a = 3$; ou seja, 3 cm.

$\frac{6}{b} = 1 \Rightarrow b = 6$; ou seja, 6 cm.

$\frac{7}{c} = 1 \Rightarrow c = 7$; ou seja, 7 cm.

15. Razão: $\frac{12}{x} = \frac{16}{y} = \frac{20}{y} = 4$. Então:

$\frac{12}{x} = \frac{4}{1} \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3$; ou seja, 3 cm.

$\frac{16}{y} = \frac{4}{1} \Rightarrow 4y = 16 \Rightarrow y = 4$; ou seja, 4 cm.

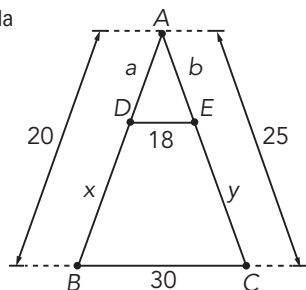
16. $\frac{6}{x} = \frac{6 + 12}{30} \Rightarrow 18x = 180 \Rightarrow x = 10$; ou seja, 10 cm.

17. $\frac{x}{x - 2} = \frac{3}{2} \Rightarrow 3x - 6 = 2x \Rightarrow 3x - 2x = 6 \Rightarrow x = 6$

18. a) $\frac{6}{9} = \frac{6}{x} \Rightarrow 6x = 54 \Rightarrow x = 9$; ou seja, 9 m.

b) 30 m a partir da margem.

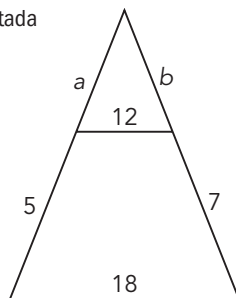
c) Ubirajara é um nome de origem tupi que pode significar "senhor da lança", "senhor do tacape" ou "o dono da floresta". Fonte dos dados: http://www.seer.ufu.br/index.php/GTLex/article/download/37831/20533/. Acesso em: 7 jul. 2022.

19. A imagem não está representada com medidas reais.
Esboço da situação:

$\frac{a}{20} = \frac{b}{25} = \frac{18}{30} \Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{b}{5} = \frac{18}{6} = 3$

$\frac{a}{4} = 3 \Rightarrow a = 12$

$\frac{b}{5} = 3 \Rightarrow b = 15$

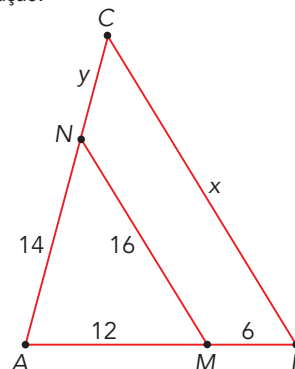
Como $a + x = 20$ e $a = 12$, temos $x = 8$ m.
Como $b + y = 25$ e $b = 15$, temos $y = 10$ m.

20. A imagem não está representada com medidas reais.
Esboço da situação:

$\frac{a}{a + 5} = \frac{b}{b + 7} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{a}{a + 5} = \frac{2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3a = 2a + 10 \Rightarrow 3a - 2a = 10 \Rightarrow a = 10$; ou seja, 10 m.

$\frac{b}{b + 7} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3b = 2b + 14 \Rightarrow 3b - 2b = 14 \Rightarrow b = 14$; ou seja, 14 m.

Portanto, os lados do triângulo medem 10 m, 12 m e 14 m.

21. A imagem não está representada com medidas reais.
Esboço da situação:

$\frac{12}{16} = \frac{12 + 6}{x} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{18}{x} \Rightarrow x = 24$

$\frac{14}{12} = \frac{14 + y}{12 + 6} \Rightarrow \frac{7}{6} = \frac{14 + y}{18} \Rightarrow y = 7$

Medida de perímetro: $AB + BC + AC = (12 + 6) + x + (14 + y) =$
$= 18 + 24 + 21 = 63$; ou seja, 63 m.

Participe (p. 137)

I. a) Resposta esperada: Sim. Os triângulos são semelhantes visto que são formados a partir do lado e diagonal de quadrados de tamanhos diferentes.

b) 90°, 45° e 45°.

c) Sim.

d) Resposta pessoal.

II. Resposta esperada: Não são semelhantes, pois não existe proporção entre todos os lados dos triângulos.

22. A ~ H (LAL); B ~ C (LLL); D ~ E (LLL); F ~ G (AA).

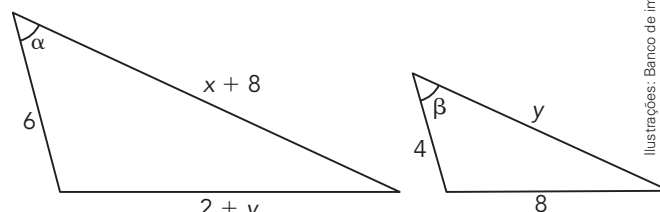
23. a) $\frac{4}{x} = \frac{8}{4} \Rightarrow 8x = 16 \Rightarrow x = 2$

$\frac{6}{y} = \frac{8}{4} \Rightarrow 8y = 24 \Rightarrow y = 3$

b) $\frac{x}{4} = \frac{6}{3} \Rightarrow 3x = 24 \Rightarrow x = 8$

$\frac{y}{5} = \frac{6}{3} \Rightarrow 3y = 30 \Rightarrow y = 10$

24. $\frac{x}{15} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow x = 3 \cdot 15 \Rightarrow x = 45$; ou seja, 45 m.

25.

a) $\frac{y}{8} = \frac{12}{x} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

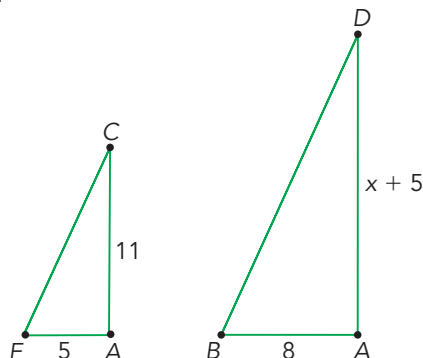
$\frac{y}{8} = \frac{4}{3} \Rightarrow 3y = 32 \Rightarrow y = \frac{32}{3}$

$\frac{12}{x} = \frac{4}{3} \Rightarrow 4x = 36 \Rightarrow x = 9$

b) $\frac{6}{4} = \frac{2 + y}{8} \Rightarrow 8 + 4y = 48 \Rightarrow 4y = 40 \Rightarrow y = 10$

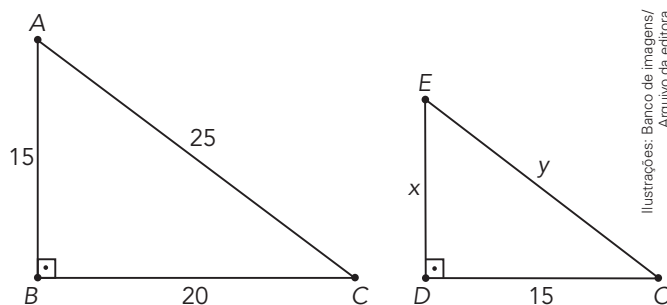
$\frac{6}{4} = \frac{x + 8}{y} \Rightarrow 4x + 32 = 60 \Rightarrow 4x = 28 \Rightarrow x = 7$

26. As imagens não estão representadas com medidas reais.
$\triangle ACE \sim \triangle ADB$, pois têm dois pares de ângulos correspondentes congruentes.

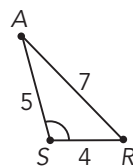
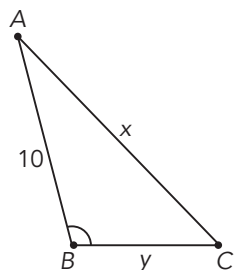
$\frac{11}{5} = \frac{x + 5}{8} \Rightarrow 5x + 25 = 88 \Rightarrow 5x = 63 \Rightarrow x = \frac{63}{5}$; ou seja, $\frac{63}{5}$ cm.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

27. $\triangle ABC \sim \triangle EDC$, pois têm dois pares de ângulos correspondentes congruentes.

$\frac{x}{15} = \frac{y}{25} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$ $\qquad \frac{x}{15} = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{45}{4}$

$\frac{y}{25} = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{75}{4}$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

28. As imagens não estão representadas com medidas reais.
$\triangle ASR \sim \triangle ABC$. Então:

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

$\frac{x}{7} = \frac{y}{4} = \frac{10}{5} = 2$ $\qquad \frac{x}{7} = 2 \Rightarrow x = 14$; ou seja, 14 cm.

$\frac{y}{4} = 2 \Rightarrow y = 8$; ou seja, 8 cm.

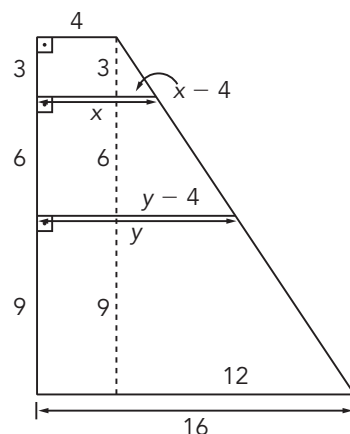
29. a) $\frac{4 + x}{4} = \frac{3 + 2}{3} \Rightarrow 12 + 3x = 20 \Rightarrow 3x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$

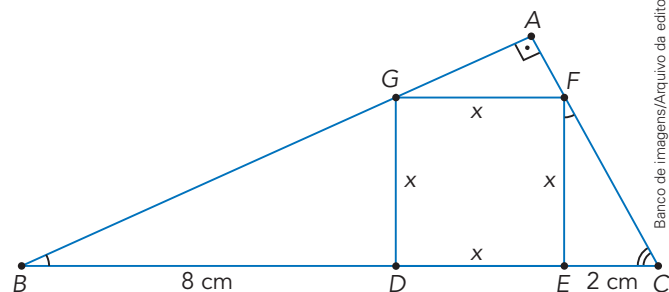
$\frac{4 + x + y}{4} = \frac{3 + 2 + 1}{3} \Rightarrow 12 + 3x + 3y = 24 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3y = 24 - 12 - 8 \Rightarrow y = \frac{4}{3}$

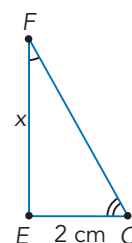
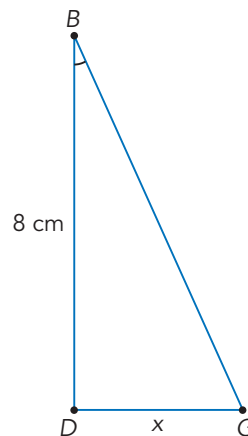
b) $\frac{x - 4}{3} = \frac{y - 4}{9} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$

$x - 4 = \frac{6}{3} \Rightarrow x = \frac{6}{3} + \frac{12}{3} \Rightarrow x = \frac{18}{3} \Rightarrow x = 6$

$y - 4 = \frac{18}{3} \Rightarrow y = \frac{18}{3} + \frac{12}{3} \Rightarrow y = \frac{30}{3} \Rightarrow y = 10$

Banco de imagens/Arquivo da editora

30. As imagens não estão representadas com medidas reais.

Banco de imagens/Arquivo da editora

$med(\hat{B}) + med(\hat{C}) = 90°$ e $med(\hat{F}) + med(\hat{C}) = 90°$, logo $med(\hat{B}) = med(\hat{F})$.

$\triangle BDG \sim \triangle FEC$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

$\frac{8}{x} = \frac{x}{2} \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$

Medida de perímetro do quadrado: $4x = 4 \cdot 4$ cm $= 16$ cm.

31. As imagens não estão representadas com medidas reais.

$\text{med}(\hat{A}) = \text{med}(\hat{D}) = 90°$ e ângulo $\hat{C}$ comum.

$\triangle ABC \sim \triangle DEC$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

$\frac{15}{8} = \frac{5}{x} \Rightarrow 15x = 40 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$; ou seja, $\frac{8}{3}$ cm.

32. As imagens não estão representadas com medidas reais.

a) $\triangle ABC \sim \triangle BDC$ (caso ALA)

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

$\frac{9}{x} = \frac{x}{4} \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$ (x não pode ser negativo)

$\frac{5}{x} = \frac{y}{4} \Rightarrow \frac{5}{6} = \frac{y}{4} \Rightarrow 6y = 20 \Rightarrow y = \frac{10}{3}$

b) $\triangle ABC \sim \triangle BDC$ (caso ALA)

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

$\frac{6}{4} = \frac{x}{5} \Rightarrow 4x = 30 \Rightarrow x = \frac{15}{2}$

$\frac{y+4}{6} = \frac{6}{4} \Rightarrow 4y + 16 = 36 \Rightarrow 4y = 20 \Rightarrow y = 5$

33. $\triangle ABC \sim \triangle FBD$ (caso AA)

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

$\frac{4}{6} = \frac{x}{6-x} \Rightarrow 24 - 4x = 6x \Rightarrow 10x = 24 \Rightarrow x = \frac{12}{5}$

34. A imagem não está representada com medidas reais.

Banco de imagens/Arquivo da editora

$\frac{a}{4} = \frac{6+4+a}{6} \Rightarrow 6a = 40 + 4a \Rightarrow 2a = 40 \Rightarrow a = 20$;

ou seja, 20 cm.

$\frac{20}{4} = \frac{4+20}{AB} \Rightarrow 20 \cdot AB = 96 \Rightarrow AB = \frac{24}{5} \Rightarrow AB = 4{,}8$;

ou seja, 4,8 cm.

35.

$\text{med}(E\hat{D}C) = \text{med}(A\hat{C}B) = 90° - \alpha$

$\triangle DEC \sim \triangle CBA$:

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

$\frac{8}{4} = \frac{15}{x} \Rightarrow 8x = 60 \Rightarrow x = \frac{15}{2}$

$\frac{8}{4} = \frac{17}{y} \Rightarrow 8y = 68 \Rightarrow y = \frac{17}{2}$

36. A imagem não está representada com medidas reais.

Banco de imagens/Arquivo da editora

$\frac{x+y}{x} = \frac{6}{h} \Rightarrow (x+y)h = 6x$

$\frac{x+y}{x} = \frac{4}{h} \Rightarrow (x+y)h = 4y$

$6x = 4y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{4}{6} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2}{3}$

37.

Banco de imagens/Arquivo da editora

As medianas $\overline{AN}$ e $\overline{CM}$ intersectam-se no baricentro G.

$\overline{MN} \parallel \overline{AC}$ (**I**) e $MN = \frac{AC}{2}$ (**II**).

Por (**I**): $G\hat{N}M \cong G\hat{A}C$ e $G\hat{M}N \cong G\hat{C}A$. Daí: $\triangle GMN \sim \triangle GCA$. Então:

$\frac{AC}{MN} = \frac{AG}{GN} = \frac{CG}{GM} = 2 \Rightarrow AG = 2 \cdot GN$

$AN = AG + GN = 2GN + GN = 3GN$

$GN = \frac{1}{3} \cdot AN$ e $AG = \frac{2}{3} \cdot AN$

O resultado é análogo para as outras medianas do triângulo ABC.

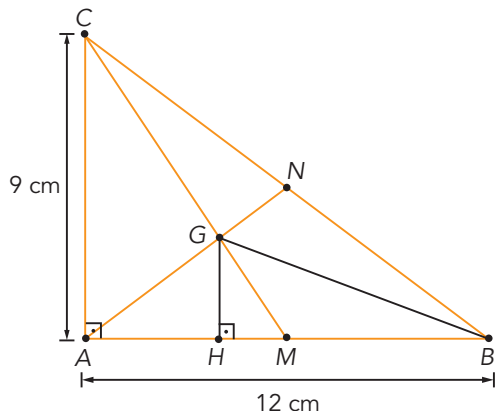
38. A imagem não está representada com medidas reais.

Traçamos $\overline{GH} \perp \overline{AB}$, com H em $\overline{AB}$.

$$\overline{GH} \mathbin{/\!/} \overline{CA} \Rightarrow \triangle MGH \Rightarrow \triangle MCA \Rightarrow \frac{MG}{MC} = \frac{GH}{CA} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{GH}{9} \Rightarrow GH = 3$$

$$A_{\triangle ABG} = \frac{AB \cdot GH}{2} = \frac{12 \cdot 3}{2} = 18$$

A área do $\triangle ABG$ mede 18 cm².

Banco de imagens/Arquivo da editora

Na História

1. 33 km = 33 000 m; 10 h 20 min = 620 min
$v = d : t = 33\,000 : 620 \simeq 53{,}22$; ou seja, aproximadamente 53 metros por minuto.

2. $CS = 1\,000 \cdot C_1S_1$

3. Sim. Como $\overline{CC'}$ e $\overline{S'S}$ podem ser medidos diretamente, temos $C'S' = CS - (CC' + S'S)$.

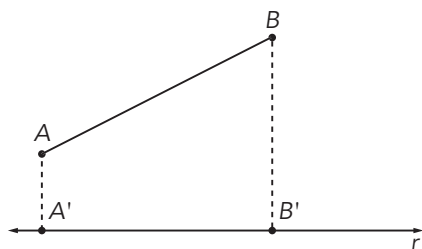
4. Como $\frac{20(x+y)}{2} = 320$, temos $x + y = 32$.
Por outro lado, como os dois triângulos da figura são semelhantes, temos: $\frac{x}{y} = \frac{50}{30} = \frac{5}{3}$.
Temos, então, o sistema linear: $\begin{cases} x + y = 32 \\ 3x - 5y = 0 \end{cases}$, cuja solução é $(20, 12)$. Logo $x = 20$ e $y = 12$.

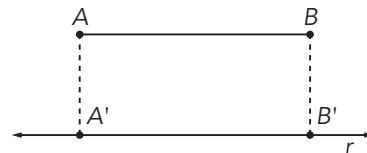
Capítulo 11

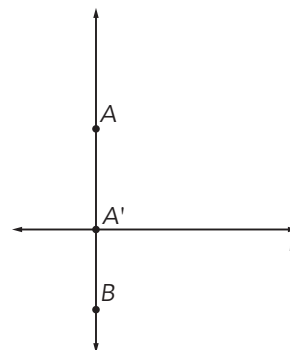
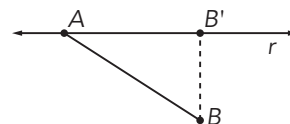
Participe (p. 146)

I. Exemplos de figuras:

a) $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$.

b) A projeção do segmento de reta $\overline{AB}$ sobre r é o segmento de reta $\overline{A'B'}$, sendo A' a projeção de A sobre r e B', a de B sobre r.

Banco de imagens/Arquivo da editora

c) A projeção do segmento de reta $\overline{AB}$ sobre r é o segmento de reta $\overline{A'B'}$, sendo A' a projeção de A sobre r e B', a de B sobre r.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

d) Imaginando por A e por B uma reta perpendicular a r, ela intersecta r no ponto A', que é a projeção de $\overline{AB}$ sobre r.

e) Imaginando por B uma reta perpendicular a r, ela intersecta r no ponto B', sendo $\overline{AB'}$ a projeção de $\overline{AB}$ sobre r.

II. a) Sim; quando $\overline{AB} \perp r$.

b) Sim; quando $\overline{AB} \mathbin{/\!/} r$.

c) Não, em nenhum caso.

d) A medida da projeção é menor ou igual à medida de $\overline{AB}$.

Participe (p. 148)

I. a) Os triângulos ABC e DBA são semelhantes pelo critério AA.
Exemplo de resposta: $\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{AD}$.

b) Os triângulos ABC e DAC são semelhantes pelo critério AA.
Exemplo de resposta: $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC} = \frac{AB}{AD}$.

c) Os triângulos DBA e DAC são semelhantes pelo critério AA. Exemplo de resposta: $\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Atividades

1. a)
- $b^2 = a \cdot m$
- $c^2 = a \cdot n$
- $h^2 = m \cdot n$
- $b \cdot c = a \cdot h$
- $b^2 + c^2 = a^2$

b)
- $c \cdot h = n^2$
- $b \cdot h = m^2$
- $b \cdot c = a^2$
- $m^2 + n^2 = h^2$
- $h \cdot a = m \cdot n$
- $a^2 + c^2 = n^2$
- $a^2 + b^2 = m^2$

c)
- $r \cdot s = t^2$
- $(r + s) \cdot s = n^2$
- $m \cdot n = (r + s) \cdot t$
- $(r + s) \cdot r = m^2$
- $t^2 + r^2 = m^2$
- $t^2 + s^2 = n^2$
- $m^2 + n^2 = (r + s)^2$

2. a) $x^2 = 4 \cdot 9 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$ (x não pode ser negativo)

b) $12 \cdot x = 6^2 \Rightarrow x = 36 : 12 \Rightarrow x = 3$

c) $x(x + 6) = 4^2 \Rightarrow x^2 + 6x = 16 \Rightarrow x^2 + 6x - 16 = 0$

$s = -6$ e $p = -16$

$x = 2$ ou $x = -8$ (não serve)

d) $x^2 = 4 \cdot 16 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 8$ (x não pode ser negativo)

3. a) $x^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow x^2 = 9 + 16 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$ (x não pode ser negativo)

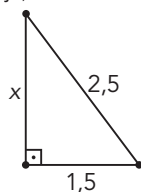
b) $x^2 + 5^2 = 13^2 \Rightarrow x^2 = 169 - 25 \Rightarrow x^2 = 144 \Rightarrow x = 12$ (x não pode ser negativo)

c) $x(x + 5) = 6^2 \Rightarrow x^2 + 5x - 36 = 0$

$s = -5$ e $p = -36$

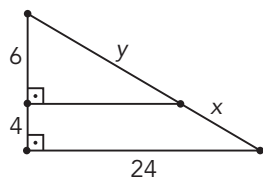
$x = -9$ (não serve) ou $x = 4$

d) $x^2 + 1^2 = (\sqrt{5})^2 \Rightarrow x^2 + 1 = 5 \Rightarrow x^2 = 5 - 1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ (x não pode ser negativo)

4. $x^2 + 1{,}5^2 = 2{,}5^2 \Rightarrow x^2 = 6{,}25 - 2{,}25 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ (x não pode ser negativo); ou seja, 2 m.

Banco de imagens/Arquivo da editora

5. a) $x^2 = 6^2 + (4^2 + 8^2) \Rightarrow x^2 = 36 + 16 + 64 \Rightarrow x^2 = 116 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \sqrt{116} \Rightarrow x = 2\sqrt{29}$ (x não pode ser negativo)

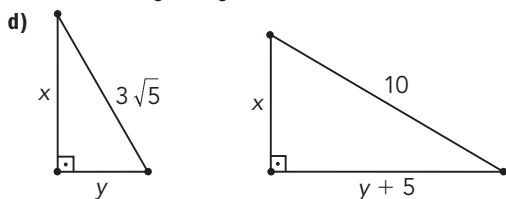
b) $x^2 = (2\sqrt{5})^2 + (3^2 + 4^2 + 6^2) \Rightarrow x^2 = 4 \cdot 5 + 9 + 16 + 36 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 = 81 \Rightarrow x = 9$ (x não pode ser negativo)

c)

Banco de imagens/Arquivo da editora

$(x + y)^2 = (6 + 4)^2 + 24^2 \Rightarrow (x + y)^2 = 100 + 576 \Rightarrow$
$\Rightarrow x + y = \sqrt{576} \Rightarrow x + y = 26$ ($x + y$ não pode ser negativo)

$$\frac{y}{x+y} = \frac{6}{6+4} \Rightarrow \frac{y}{26} = \frac{6}{10} \Rightarrow y = \frac{78}{5}$$

$$x = 26 - \frac{78}{5} = \frac{52}{5}$$

d)

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

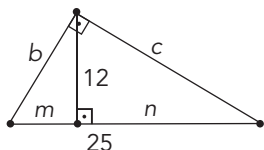
$x^2 + y^2 = (3\sqrt{5})^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 9 \cdot 5 \Rightarrow x^2 + y^2 = 45$

$x^2 + (y + 5)^2 = 10^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + 10y + 25 = 100 \Rightarrow$
$\Rightarrow 45 + 10y + 25 = 100 \Rightarrow 10y = 100 - 70 \Rightarrow y = \frac{30}{10} \Rightarrow y = 3$

Se $x^2 + y^2 = 45$ e $y = 3$, então:

$x^2 + 3^2 = 45 \Rightarrow x = 6$ (x não pode ser negativo)

6. $h^2 = m \cdot n \Rightarrow 4^2 = 8 \cdot n \Rightarrow 16 = 8 \cdot n \Rightarrow n = 2$; ou seja, 2 m.

7. Esboço da situação:

Banco de imagens/Arquivo da editora

1º passo:

$$\begin{cases} m \cdot n = 12^2 \\ m + n = 25 \end{cases}$$

m e n são raízes da equação $x^2 - 25x + 144 = 0$, que são 16 e 9.

Pelo desenho, $m < n$. Portanto, $m = 9$ e $n = 16$.

2º passo:

$b^2 = m \cdot 25 \Rightarrow b^2 = 9 \cdot 25 \Rightarrow b^2 = 225 \Rightarrow b = 15$ (b não pode ser negativo)

3º passo:

$c^2 = n \cdot 25 \Rightarrow c^2 = 16 \cdot 25 \Rightarrow c^2 = 400 \Rightarrow c = 20$ (c não pode ser negativo)

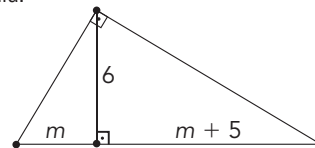
Portanto, os catetos medem 15 m e 20 m.

8. $m(m + 5) = 6^2 \Rightarrow m^2 + 5m - 36 = 0$

$s = -5$ e $p = -36$

$m = -9$ (não serve) ou $m = 4$

Medida da hipotenusa: $m + m + 5 = 4 + 4 + 5 = 13$; ou seja, 13 cm.

Esboço da figura:

Banco de imagens/Arquivo da editora

9. Sim. O teorema de Pitágoras.

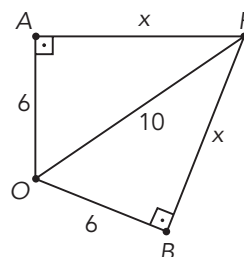
10. $x^2 = 168^2 + 70^2 \Rightarrow x^2 = 28\,244 + 4\,900 \Rightarrow x^2 = 33\,124 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \sqrt{33\,124} \Rightarrow x = 182$ (x não pode ser negativo)

Logo, o comprimento da gangorra mede 182 cm ou 1,82 m.

11. $x^2 + 2^2 = 4^2 \Rightarrow x^2 = 16 - 4 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x^2 = 2^2 \cdot 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 2\sqrt{3}$ (x não pode ser negativo); ou seja, $2\sqrt{3}$ cm.

12. A imagem não está representada com medidas reais.

$x^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow x^2 = 100 - 36 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 8$ (x não pode ser negativo); ou seja, 8 cm.

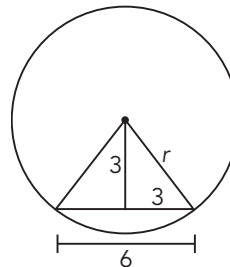
Medida de perímetro: $8 + 8 + 6 + 6 = 28$; ou seja, 28 cm.

Banco de imagens/Arquivo da editora

13. a) $x^2 = 3 \cdot 12 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$ (x não pode ser negativo)

b) $8 \cdot x = 42 \Rightarrow x = \frac{16}{8} \Rightarrow x = 2$

14. Exemplo de resposta: Uma formiga está na borda de um prato cujo raio mede $\sqrt{6}$ cm e observa na direção tangente à borda do prato uma aranha à distância que mede $10\sqrt{3}$ cm dela. Qual é a medida de distância da aranha ao centro do prato? Resposta: $3\sqrt{34}$ cm.

15. A imagem não está representada com medidas reais.

$r^2 = 3^2 + 3^2 \Rightarrow r^2 = 18 \Rightarrow r = 3\sqrt{2}$ (r não pode ser negativo); ou seja, $r = 3\sqrt{2}$ cm.

Banco de imagens/Arquivo da editora

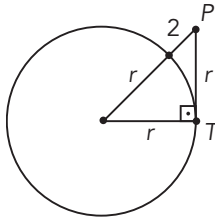
16. Seja $PA = x$, $AO = r$, $TO = r$ e $PT = 2r$.

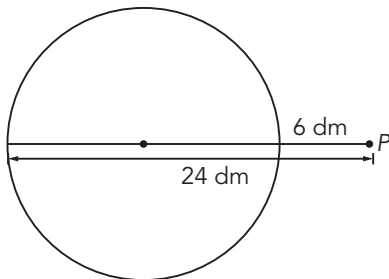
$(PO)^2 = (PT)^2 + (OT)^2 \Rightarrow (x + r)^2 = (2r)^2 + r^2 \Rightarrow (x + r)^2 = 4r^2 + r^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x + r)^2 = 5r^2 \Rightarrow x + r = r\sqrt{5} \Rightarrow x = r\sqrt{5} - r \Rightarrow$
$\Rightarrow x = (\sqrt{5} - 1)r$ (x e r não podem ser negativos)

17. A imagem não está representada com medidas reais.

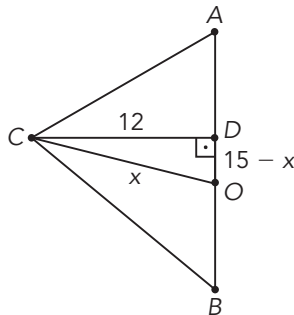
$(r + 2)^2 = r^2 + r^2 \Rightarrow (r + 2)^2 = 2r^2 \Rightarrow r + 2 = r\sqrt{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow r\sqrt{2} - r = 2 \Rightarrow r = \dfrac{2}{\sqrt{2} - 1} \Rightarrow r = 2(\sqrt{2} + 1)$ (r não pode ser negativo); ou seja, $2(\sqrt{2} + 1)$ cm.

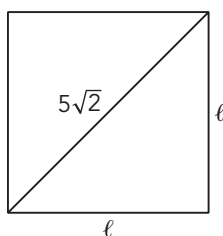
Banco de imagens/Arquivo da editora

18. Exemplo de resposta: Um tapete circular está com um fio solto em sua borda. Esticando-se esse fio, passando pelo centro do tapete, verificou-se que ele cobriu todo o diâmetro e ainda ficou 6 dm além da borda do tapete. Sabendo-se que a medida de comprimento do fio é 24 dm, determine a medida do raio do tapete. Resposta: 9 dm.

Banco de imagens/Arquivo da editora

19. a) $x^2 = 7 \cdot 3 \Rightarrow x = \sqrt{21}$ (x não pode ser negativo)

b) $x^2 = (15 - x)^2 + 12^2 \Rightarrow 30x = 369 \Rightarrow x = 12{,}30$

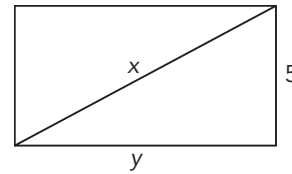
Banco de imagens/Arquivo da editora

20. Exemplo de resposta: Determine a medida da diagonal de um retângulo cujos lados medem 24 cm e 10 cm. Resposta: $d^2 = 24^2 + 10^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow d^2 = 576 + 100 \Rightarrow d^2 = 676 \Rightarrow d = \sqrt{676} \Rightarrow d = 26$ (d não pode ser negativo); ou seja, 26 cm.

21. Esboço da situação:

Banco de imagens/Arquivo da editora

$\ell\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \Rightarrow \ell = 5$

Medida de perímetro: $4\ell = 4 \cdot 5$ cm $= 20$ cm.

22. Esboço da situação:

Banco de imagens/Arquivo da editora

Cálculo de y, sabendo que a medida de perímetro é 34:

$2(y + 5) = 34 \Rightarrow y + 5 = 17 \Rightarrow y = 12$

Cálculo da medida x da diagonal:

$x^2 = 5^2 + 12^2 \Rightarrow x^2 = 169 \Rightarrow x = 13$ (x não pode ser negativo); ou seja, 13 cm.

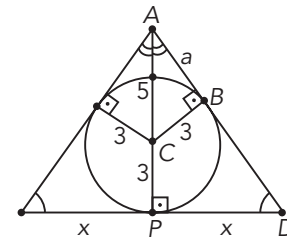
23. a) $h = x = \ell\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 10\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$

b) $h = \ell\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 6 = x\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{12}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = 4\sqrt{3}$

24. $P = 3\ell = 24 \Rightarrow \ell = 8$; ou seja, 8 cm.

$h = \ell\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 8\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ cm $= 4\sqrt{3}$ cm

25. Esboço da situação:

Banco de imagens/Arquivo da editora

$a^2 + 3^2 = 5^2 \Rightarrow a^2 = 25 - 9 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$ (a não pode ser negativo)

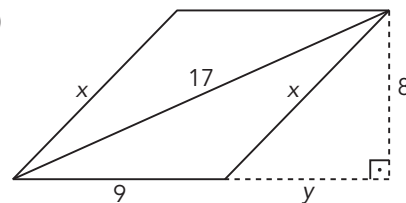
$\triangle ABC \sim \triangle APD$

$\dfrac{4}{3} = \dfrac{8}{x} \Rightarrow x = 6$

Medida da base: $2x = 12$.

26. a) $x^2 = 4^2 + (10 - 7)^2 \Rightarrow x^2 = 16 + 9 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = 5$ (x não pode ser negativo)

b)

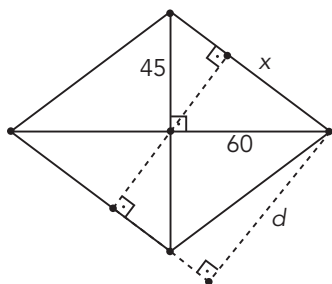
Banco de imagens/Arquivo da editora

$(9 + y)^2 + 8^2 = 17^2 \Rightarrow 81 + 18y + y^2 + 64 = 289 \Rightarrow$
$\Rightarrow y^2 + 18y - 144 = 0$

$\Delta = 18^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-144) = 324 + 576 = 900 = 30^2$

$y = \dfrac{-18 \pm 30}{2} \Rightarrow y = \dfrac{12}{2} \Rightarrow y = 6$ (y não pode ser negativo)

Cálculo de x:

$x^2 = y^2 + 8^2 \Rightarrow x^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow x^2 = 36 + 64 \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 10$ (x não pode ser negativo)

27. A imagem não está representada com medidas reais. Esboço da situação:

Banco de imagens/Arquivo da editora

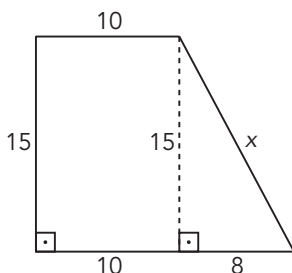
Cálculo da medida x do lado:

$x^2 = 60^2 + 45^2 \Rightarrow x^2 = 3\,600 + 2\,025 \Rightarrow x^2 = 5\,625 \Rightarrow x^2 = 75^2 \Rightarrow$

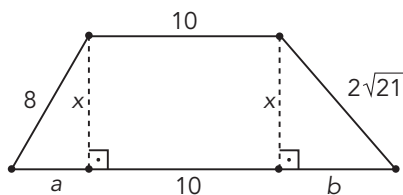
$\Rightarrow x = 75$ (x não pode ser negativo); ou seja, 75 cm.

Cálculo da medida d da distância:

$x \cdot \frac{d}{2} = 45 \cdot 60 \Rightarrow d = \frac{2 \cdot 45 \cdot 60}{75} \Rightarrow d = 72$; ou seja, 72 cm.

28. A imagem não está representada com medidas reais.

Banco de imagens/Arquivo da editora

$x^2 = 15^2 + 8^2 \Rightarrow x^2 = 289 \Rightarrow x = 17$ (x não pode ser negativo); ou seja, 17 cm.

29. Cálculo de b:

Banco de imagens/Arquivo da editora

$a + 10 + b = 20 \Rightarrow a = 10 - b$

$x^2 + (10 - b)^2 = 8^2 \Rightarrow x^2 + 100 - 20b + b^2 = 64 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + b^2 - 20b = 64 - 100$

Como $x^2 + b^2 = \left(2\sqrt{21}\right)^2 = 4 \cdot 21 = 84$, temos:

$84 - 20b = -36 \Rightarrow 20b = 120 \Rightarrow b = 6$

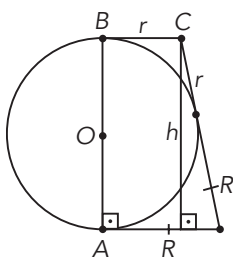
Cálculo da medida x da altura:

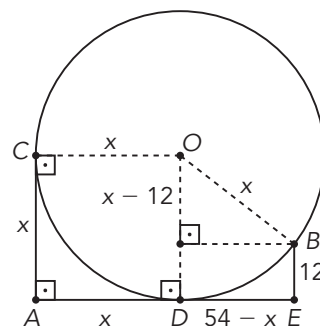
$x^2 + b^2 = 84 \Rightarrow x^2 = 84 - 36 \Rightarrow x^2 = 48 \Rightarrow x^2 = 4^2 \cdot 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 4\sqrt{3}$ (x não pode ser negativo)

30. $h^2 + (R - r)^2 = (R + r)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 + R^2 - 2Rr + r^2 = R^2 + 2Rr + r^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow h^2 = 2Rr + 2Rr \Rightarrow h^2 = 4Rr \Rightarrow h = 2\sqrt{Rr}$ (h não pode ser negativo)

Banco de imagens/Arquivo da editora

31. A imagem não está representada com medidas reais.

Banco de imagens/Arquivo da editora

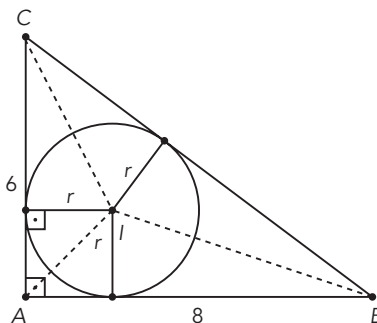
$(x - 12)^2 + (54 - x)^2 = x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 24x + 144 + 2\,916 - 108x + x^2 = x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 132x + 3\,060 = 0 \Rightarrow x = \frac{132 \pm 72}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 102$ ou $x = 30$

Como $12 < x < 54$, temos $x = 30$ cm.

32. A imagem não está representada com medidas reais.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Cálculo da medida x do lado $\overline{BC}$:

$x^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow x^2 = 36 + 64 \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = 10$ (x não pode ser negativo); ou seja, 10 m.

Cálculo da medida de área do $\triangle ABC$:

$A_{\triangle ABC} = \frac{6\text{ m} \cdot 8\text{ m}}{2} = 24\text{ m}^2$

Cálculo de r:

$A_{\triangle ABC}$ é igual à soma das medidas de área dos triângulos ABI, BCI e ACI, em que I é o centro da circunferência.

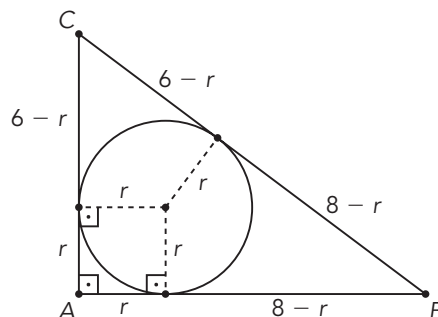
Então:

$A_{\triangle ABC} = A_{\triangle ABI} + A_{\triangle BCI} + A_{\triangle ACI} \Rightarrow 24 = \frac{8r}{2} + \frac{10r}{2} + \frac{6r}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 48 = 24r \Rightarrow r = 2$; ou seja, 2 m.

Outro modo:

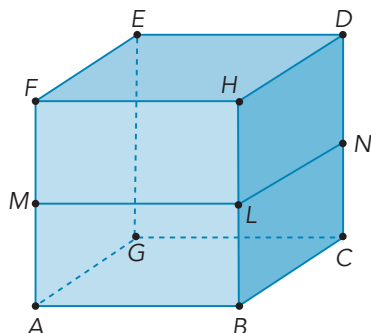
Como $BC = 10$ m, temos:

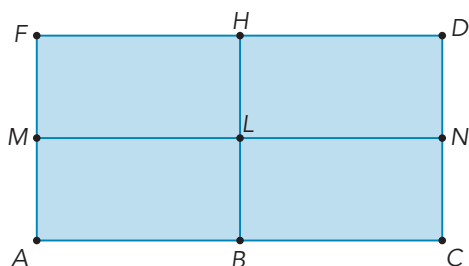
$14 - 2r = 10 \Rightarrow r = 2$; ou seja, 2 m.

Banco de imagens/Arquivo da editora

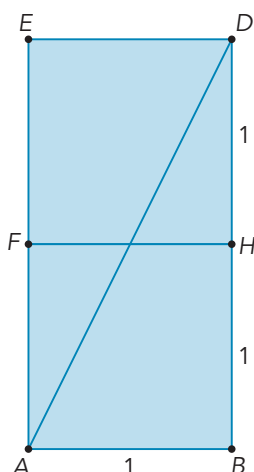
Na olimpíada (p. 155)

Formiga esperta

a) Como o cubo tem arestas de medida 1, a distância entre *A* e *B* mede 1 cm.

b) O menor caminho entre *M* e *N* é feito indo em linha reta de *M* até *L*, e, depois, novamente em linha reta, de *L* até *N*.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

A razão disso é simples: se colocarmos as faces *ABHF* e *BCDH* em um mesmo plano, o caminho $M \rightarrow L \rightarrow N$ é uma linha reta! Logo, é o menor caminho entre dois pontos. Note, na figura a seguir:

Logo, a distância a ser percorrida nesse caso mede 2 cm.

c) Repetindo a ideia do item anterior, vamos colocar as faces *ABHF* e *FHDE* em um mesmo plano como na figura a seguir:

Logo, a medida da menor distância entre *A* e *D* será dada pelo teorema de Pitágoras:

$AD^2 = 1^2 + (1 + 1)^2 \Rightarrow AD^2 = 5 \Rightarrow AD = \sqrt{5}$ (*AD* não pode ser negativo)

Como a formiga é esperta, ela fará o menor caminho e percorrerá $\sqrt{5}$ cm.

Na História

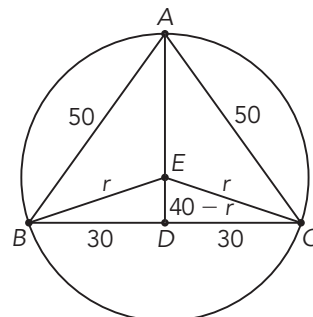
1. a) $32^2 + 65^2 \neq 97^2$

b) $90^2 + 56^2 = 106^2$

c) $10^2 + 13^2 \neq 19^2$

d) $7^2 + 24^2 = 25^2$

São triângulos retângulos os indicados nas alternativas **b** e **d**.

2. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo *ABD*, obtemos $AD = 40$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Como $r = AE$, temos $ED = 40 - r$.

Aplicando novamente o teorema de Pitágoras, agora ao triângulo *EDB*, temos:

$r^2 = 30^2 + (40 - r)^2 \Rightarrow r^2 = 900 + 1\,600 - 80r + r^2 \Rightarrow$

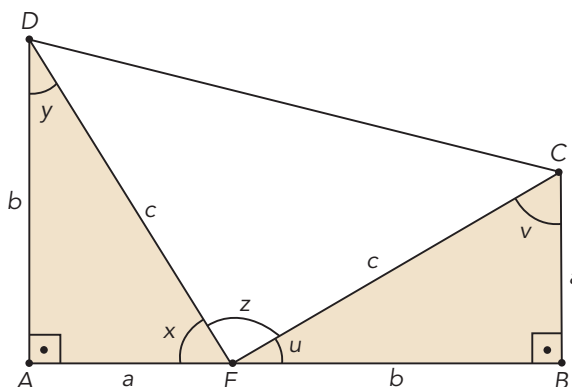
$\Rightarrow 80r = 2\,500 \Rightarrow r = \dfrac{2\,500}{80} \Rightarrow r = 31{,}25 \Rightarrow r = 31\dfrac{15}{60}$

Logo, o valor dado pelo escriba é o valor correto da medida do raio.

3. Não, o resultado usado é apenas o recíproco do teorema de Pitágoras em um caso particular. Efetivamente, não há elementos históricos que provem que os egípcios conheciam esse teorema.

4. Sejam *a* e *b* as medidas dos catetos e *c* a medida da hipotenusa; então $c^2 = a^2 + b^2$. Como o produto de dois números pares é par, temos que a^2 e b^2 são pares. Como a soma de dois números pares é par, então $a^2 + b^2$ é par, logo c^2 é par. Assim, *c* não pode ser ímpar, pois o quadrado de um número ímpar é ímpar.

5. a) Na figura a seguir, *x*, *y*, *z*, *u* e *v* denotam medidas dos ângulos.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Como $\triangle AED \sim \triangle BCE$, temos $x = v$ e $y = u$.

Então:

$x + u = v + u = 90°$

$z = 180° - (x + u) = 180° - 90° = 90°$

b) $A = \dfrac{(a + b) \cdot (a + b)}{2} = \dfrac{(a + b)^2}{2}$

c) $A = \dfrac{a \cdot b}{2} + \dfrac{a \cdot b}{2} + \dfrac{c \cdot c}{2} = \dfrac{2ab + c^2}{2}$

d) $\frac{(a+b)^2}{2} = \frac{2ab + c^2}{2} \Rightarrow (a+b)^2 = 2ab + c^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$

Na Unidade

1. $\frac{60}{20} = \frac{x}{15} \Rightarrow \frac{6}{2} = \frac{x}{15} \Rightarrow 2x = 90 \Rightarrow x = 45$. Logo, alternativa **d**.

2. $\frac{200}{150} = \frac{100 + x}{x} \Rightarrow \frac{4}{3} = \frac{100 + x}{x} \Rightarrow 4x = 300 + 3x \Rightarrow$
$\Rightarrow x = 300$
$AB + BC = 300 + 100 = 400$
Logo, alternativa **d**.

3. $\frac{2\,800 \text{ cm}}{250} = 11{,}2$ cm; $\frac{1\,200 \text{ cm}}{250} = 4{,}8$ cm. Logo, alternativa **c**.

4. $\frac{4}{x} = \frac{3}{2} \Rightarrow 3x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$
Como 1 cm na escala corresponde a 50 000 cm no real, temos:
$x = 50\,000 \text{ cm} \cdot \frac{8}{3} \simeq 133\,333{,}3 \text{ cm} = 1\,333{,}3$ m.
Logo, alternativa **a**.

5. $\frac{15}{6} = \frac{20}{x} \Rightarrow 15x = 120 \Rightarrow x = \frac{120}{15} \Rightarrow x = 8$. Logo, alternativa **d**.

6. $\frac{21}{14} = 1{,}5$. Logo, as medidas dos lados do triângulo maior estão multiplicadas por 1,5. Assim, o perímetro medirá:
$7 \cdot 1{,}5 + 9 \cdot 1{,}5 + 14 \cdot 1{,}5 = (7 + 9 + 14) \cdot 1{,}5 = 45$. Logo, alternativa **a**.

7. $\frac{a}{20} = \frac{1{,}8}{15} \Rightarrow 15a = 36 \Rightarrow a = \frac{36}{15} \Rightarrow a = 2{,}4$
$x = 20 - 2{,}4 = 17{,}6$
Logo, alternativa **a**.

8. $\frac{3{,}2}{3{,}2 + x} = \frac{0{,}8}{2{,}2} \Rightarrow 2{,}56 + 0{,}8x = 7{,}04 \Rightarrow 0{,}8x = 4{,}48 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{4{,}48}{0{,}8} \Rightarrow x = 5{,}6$. Logo, alternativa **d**.

9. $\frac{12 + 8}{6 - 4} = \frac{12}{y} \Rightarrow 20y = 24 \Rightarrow y = \frac{24}{20} \Rightarrow y = 1{,}2$
Assim, a altura do suporte *B* medirá 4 m + 1,2 m = 5,2 m. Logo, alternativa **d**.

10. $10^2 = 6^2 + y^2 \Rightarrow 100 = 36 + y^2 \Rightarrow y^2 = 64 \Rightarrow$
$\Rightarrow y = \sqrt{64} \Rightarrow y = 8$ (*y* não pode ser negativo)
$5^2 = 3^2 + x^2 \Rightarrow 25 = 9 + x^2 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \sqrt{16} \Rightarrow x = 4$ (*x* não pode ser negativo)
Então, o perímetro do retângulo *ABCD* medirá:
$6 + 8 + 3 + 4 + 6 + 8 + 3 + 4 = 42$. Logo, alternativa **a**.

11. a) Como os triângulos *ABD* e *ADC* são semelhantes, temos a seguinte proporção: $\frac{a}{c} = \frac{c}{n} \Rightarrow c^2 = a \cdot n$.

b) Como os triângulos *ABD* e *ADC* são semelhantes, temos a seguinte proporção: $\frac{a}{b} = \frac{b}{m} \Rightarrow b^2 = a \cdot m$.

c) Como o triângulo *ABC* é retângulo em *A*, podemos aplicar o teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$.

d) Como os triângulos *ABD* e *ADC* são semelhantes, temos a seguinte proporção: $\frac{a}{c} = \frac{b}{h} \Rightarrow a \cdot h = b \cdot c$.

Unidade 6

Abertura (p. 161)

Exemplo de resposta: Ações que podem ser tomadas pelo governo: desenvolvimento de campanhas nacionais e capacitação de profissionais. Ações que podem ser tomadas pela sociedade: apoio psicológico nas escolas.

Capítulo 12

Atividades

1. a)

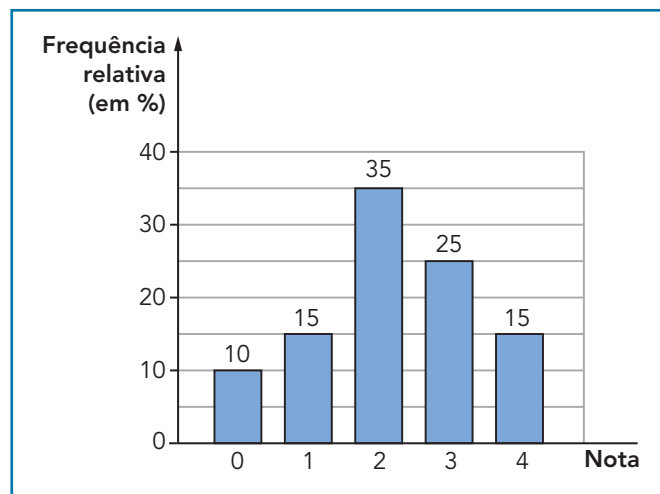
Nota dos estudantes na prova

Nota	Frequência	Frequência relativa (em %)
0	4	10
1	6	15
2	14	35
3	10	25
4	6	15
Total	**40**	**100**

Dados elaborados para fins didáticos.

b)

Nota dos estudantes na prova

Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

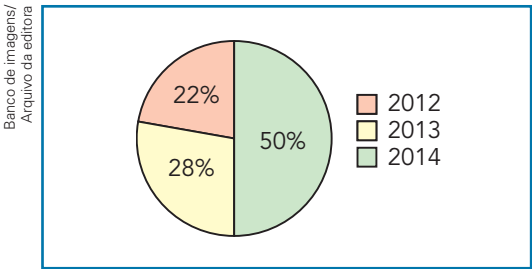
2. a) $\frac{189}{562} \simeq 0{,}34 = 34\%$

b) Calculamos a medida do ângulo de cada setor do gráfico:

Receita (em milhões de dólares) de passagens aéreas no exterior com destino ao Brasil

Ano	Receita (em milhões de dólares)	Frequência relativa (em %)	Medida do ângulo
2012	245	22	79°
2013	310	28	101°
2014	562	50	180°
Total	**1 117**	**100**	**360°**

Fonte dos dados: FRIAS, Maria C. Aéreas faturam US$ 562 mi com voos do exterior para o Brasil. *Folha de S.Paulo*, B2 mercado, 13 fev. 2015. Disponível em: https://acervo.folha.com.br/leitor.do?numero=20134&keyword=companhias%2Caereas&anchor=5980461&origem=busca&originURL=&pd=1f323289efa4a46eb7b3c57fffaca8. Acesso em: 30 abr. 2022.

Receita (em milhões de dólares) de passagens aéreas no exterior com destino ao Brasil

Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados: FRIAS, Maria C. Aéreas faturam US$ 562 mi com voos do exterior para o Brasil. *Folha de S.Paulo*, B2 mercado, 13 fev. 2015. Disponível em: https://acervo.folha.com.br/leitor.do?numero=20134&keyword=companhias%2Caereas&anchor=5980461&origem=busca&originURL=&pd=1f323289efa4a46eb7b3c57fffaca8. Acesso em: 30 abr. 2022.

3. a) Calculando as frequências relativas, temos:

$$\frac{25}{3} = \frac{100\%}{x\%} \Rightarrow x = 3 \cdot \frac{100\%}{25} \Rightarrow x = 12\%$$

As demais são: $5 \cdot 4\% = 20\%$; $4 \cdot 4\% = 16\%$; $10 \cdot 4\% = 40\%$; $2 \cdot 4\% = 8\%$; $1 \cdot 4\% = 4\%$.

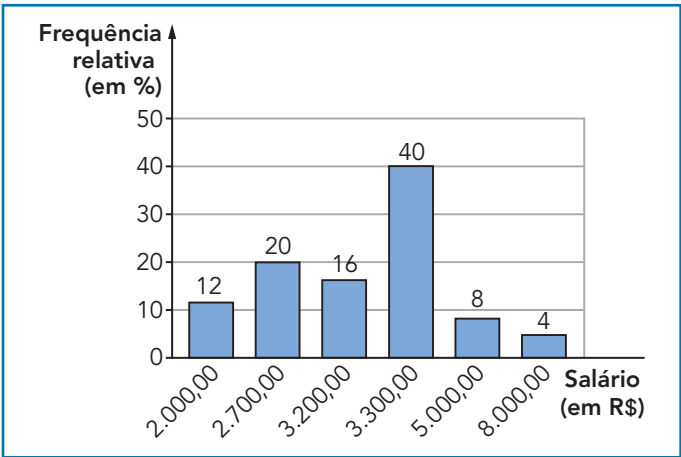
Salário dos funcionários

Salário (em R$)	Frequência	Frequência relativa (em %)
2.000,00	3	12
2.700,00	5	20
3.200,00	4	16
3.300,00	10	40
5.000,00	2	8
8.000,00	1	4
Total	**25**	**100**

Dados elaborados para fins didáticos.

b)

Salário dos funcionários

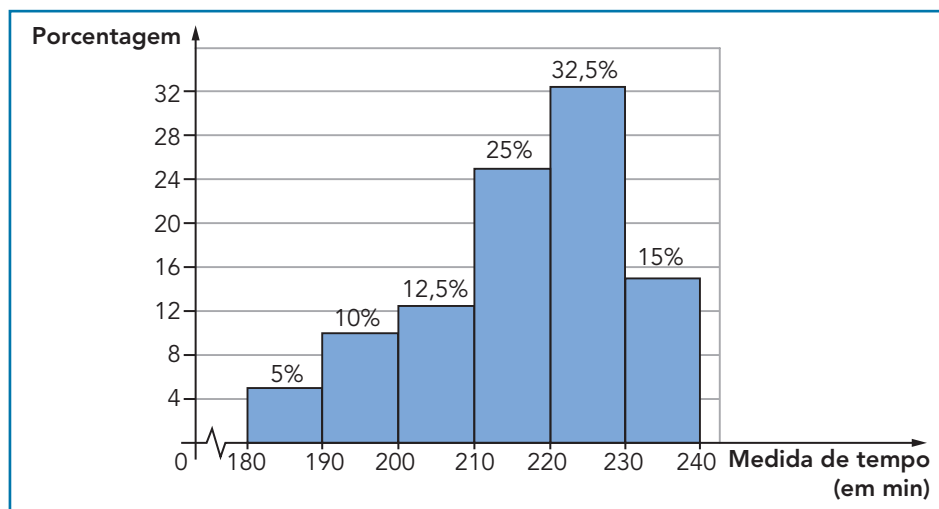
Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

4. a) Soja e trigo somam 50%.

b) Não. Porque não sabemos qual foi a produção em números absolutos de cada estado.

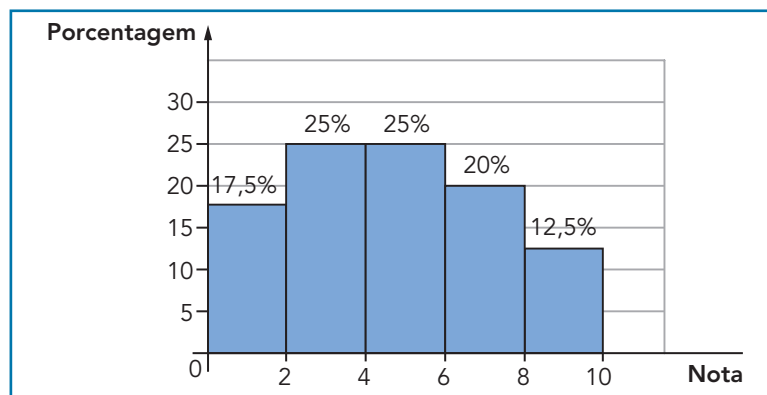
5. $\frac{4}{80} \cdot 100\% = 4 \cdot \frac{100}{80}\% = 4 \cdot \frac{5}{4}\% = 5\%$

Assim: $8 \cdot \frac{5}{4}\% = 10\%$; $10 \cdot \frac{5}{4}\% = 12{,}5\%$; $20 \cdot \frac{5}{4}\% = 25\%$; $26 \cdot \frac{5}{4}\% = 32{,}5\%$; $12 \cdot \frac{5}{4}\% = 15\%$.

Medidas de tempo na prova

Dados elaborados para fins didáticos.

6. a) $\frac{14}{80} \cdot 100\% = 14 \cdot \frac{100}{80}\% = 14 \cdot \frac{5}{4}\% = 17{,}5\%$

Assim: $20 \cdot \frac{5}{4}\% = 25\%$; $16 \cdot \frac{5}{4}\% = 20\%$; $10 \cdot \frac{5}{4}\% = 12{,}5\%$.

Notas dos estudantes

Dados elaborados para fins didáticos.

b) Como a classe de notas de 4 a 6 tem 25% dos estudantes, dividindo-a em 2 partes, estimamos 12,5% dos estudantes com notas de 4 a 5 e 12,5% com notas de 5 a 6. Assim, temos: 12,5% + 20% + 12,5% = 45%. Cerca de 45% dos estudantes tiraram nota igual ou superior a 5.

7. a)

Nota dos estudantes

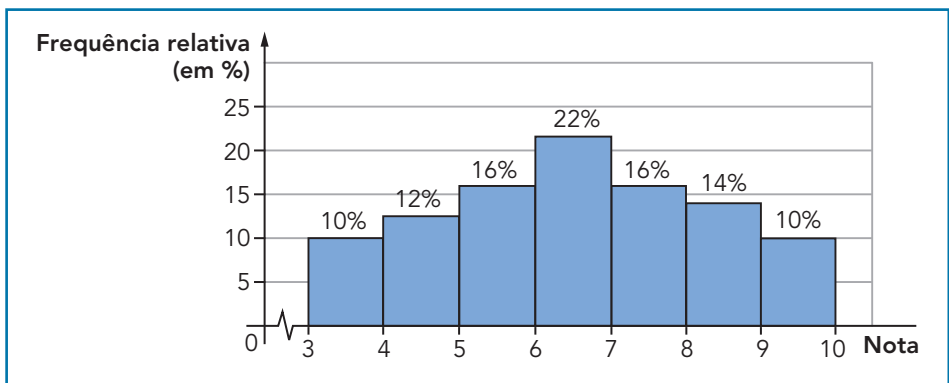
Nota	Frequência (nº de estudantes)	Frequência relativa (em %)
3,0 ⊢ 4,0	5	10
4,0 ⊢ 5,0	6	12
5,0 ⊢ 6,0	8	16
6,0 ⊢ 7,0	11	22
7,0 ⊢ 8,0	8	16
8,0 ⊢ 9,0	7	14
9,0 ⊢⊣ 10,0	5	10
Total	**50**	**100**

Dados elaborados para fins didáticos.

b)

Nota dos estudantes

Dados elaborados para fins didáticos.

Banco de imagens/Arquivo da editora

c) Como 7,5 é o ponto médio do intervalo 7,0 ⊢ 8,0, uma estimativa da porcentagem de estudantes que tirou nota 7,5 ou mais é: 8% + 14% + 10% = 32%.

8. Tabulação dos dados:

Pesquisa de opinião sobre o filme

Resultado	Frequência	Frequência relativa (em %)
Sim	360	45
Não	280	35
Não sei	160	20
Total	**800**	**100**

Dados elaborados para fins didáticos.

Resposta pessoal. O estudante deve ser capaz de construir gráficos como os exemplos a seguir.

Gráfico de colunas:

Pesquisa de opinião sobre o filme

Dados elaborados para fins didáticos.

Banco de imagens/Arquivo da editora

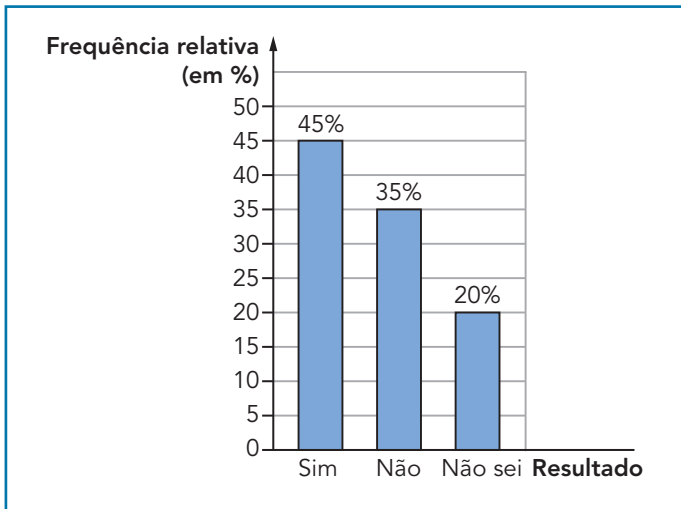



Gráfico de setores: Para a construção, vamos calcular a medida do ângulo de cada setor.

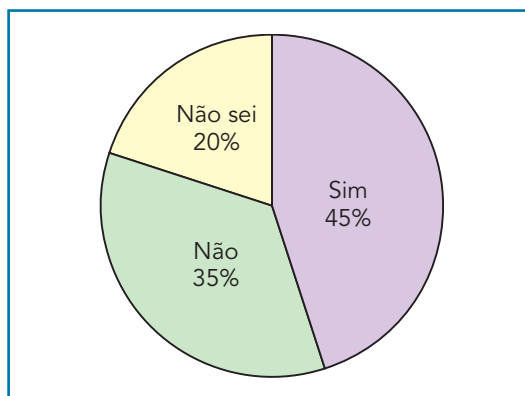
Sim: $45\% \cdot \frac{360°}{100} = 162°$

Não: $35\% \cdot \frac{360°}{100} = 126°$

Não sei: $20\% \cdot \frac{360°}{100} = 72°$

Pesquisa de opinião sobre o filme

Não sei 20%
Sim 45%
Não 35%

Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

9. a) Exemplo de resposta: Pela leitura do gráfico, acompanhando o ano de 2017, percebe-se que a porcentagem de viagens coletivas (54,1%) é maior do que a de viagens individuais (45,9%), como ocorreu nas duas pesquisas anteriores.

b) Resposta esperada: Verificar as variações ocorridas ao longo dos anos no uso de transporte motorizado. Essas variações podem ser justificadas de várias maneiras, uma delas é o aumento na produção e venda de carros particulares, aumentando também o número de veículos nas ruas, com isso o trânsito também se intensificou, e a procura por transporte coletivo voltou a crescer.

c) Resposta pessoal. Depende do deslocamento do estudante para ir e retornar à escola.

10. a) Safra 2004/2005 com 1 362 mil toneladas = 1,362 milhão de toneladas.

b) 1 151 − 895 = 256. Na safra 2017/2018, foram exportadas 256 mil toneladas a mais do que na safra anterior, um aumento de aproximadamente 28%, pois $\frac{256}{895} \simeq 0{,}2860 = 28{,}6\%$.

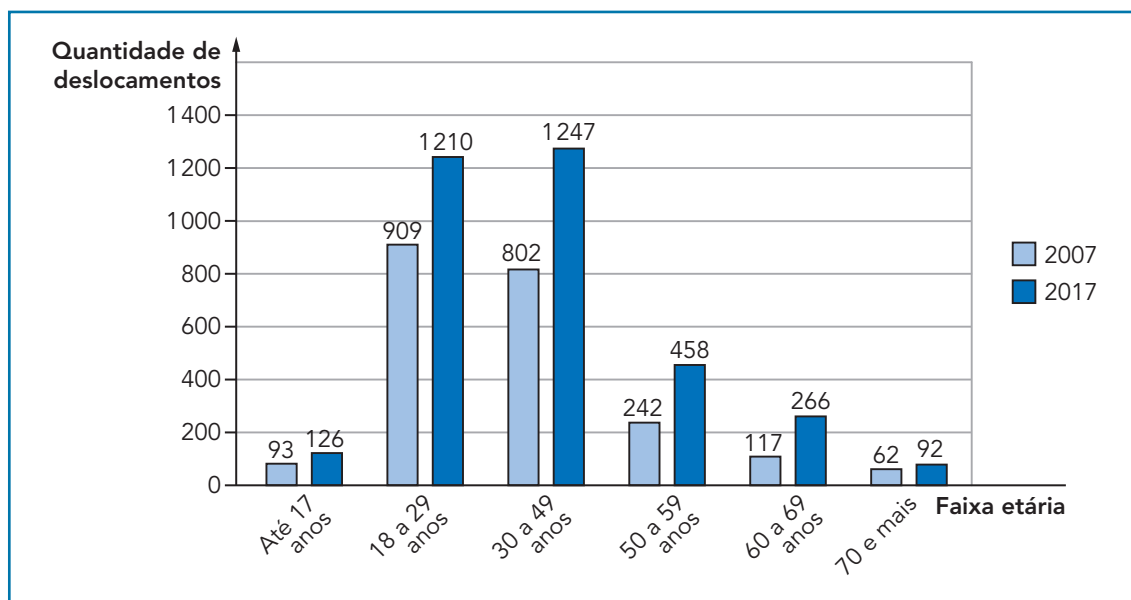
11. a) Houve crescimento de 2005 a 2008; de 2009 a 2011 e de 2016 a 2018.

b) Resposta pessoal. Pesquisando o valor do dólar americano (comercial), os estudantes devem multiplicar 209,2 bilhões pela cotação do dólar.

12. a) $\frac{3{,}94}{9{,}07} \simeq \frac{4}{9}$ ou 4 : 9; $\frac{7{,}32}{8{,}31} \simeq \frac{7}{8}$ ou 7 : 8.

b) Em 2003, para cada 9 estudantes do Ensino Médio, havia 4 no Ensino Superior. Em 2013, para cada 8 estudantes do Ensino Médio, havia 7 no Ensino Superior.

13.

Quantidade de deslocamentos de metrô (em milhares) por faixa etária – RMSP – 2007-2017

Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados: SÃO PAULO (Estado). Secretaria dos Transportes Metropolitanos. *Pesquisa origem e destino 2017*. São Paulo: [Metrô], [2017?]. Disponível em: https://web.archive.org/web/20220122073432if_/http://www.metro.sp.gov.br/pesquisa-od/arquivos/Caracteriza%C3%A7%C3%A3o_Socioecon%C3%B4mica_dos_Deslocamentos_2017.pdf. Acesso em: 6 abr. 2022.

O maior aumento porcentual é o da faixa etária de 60 a 69 anos, único maior do que 100%.

14. Exemplo de resposta: Analisando o gráfico, segundo o grau de escolaridade, percebe-se que de 2007 a 2017 houve diminuição na quantidade de deslocamentos por automóvel por pessoas não alfabetizadas, com Ensino Fundamental incompleto ou com Ensino Fundamental. No entanto, para pessoas que já concluíram o Ensino Médio ou Ensino Superior essa quantidade de deslocamentos aumentou.

15. Na rede privada, a relação entre o número de matrículas entre 2020 e 2019 é $\frac{8\,791\,186}{9\,134\,785} = 0{,}962$, o que implica redução de 3,8%. Na rede pública, a relação entre o número de matrículas entre 2020 e 2019 é $\frac{38\,504\,108}{38\,739\,461} = 0{,}994$, o que implica redução de menos de 1%. Logo, a redução foi percentualmente maior na rede privada.

16. Resposta pessoal.

17. A coluna que representa o custo econômico do terrorismo em 2000 apresenta um fator multiplicativo de 10 vezes para atingir a linha tracejada na altura da coluna de 2014. Como são colunas de mesma largura, significa que o custo em 2014 foi o de 2000 multiplicado por 10. Assim, o gráfico indica que o custo em 2000 foi da ordem de 5,29 bilhões de dólares.

18. a) A partir dos anos 2000.

b) O espaçamento entre os anos não está proporcional no gráfico. Por exemplo, de 1980 a 1990 decorrem 10 anos; de 2018 a 2020, apenas 2 anos.

c) Resposta pessoal. Em 2018 a bancada feminina Câmara dos Deputados era de apenas 15%. (Fonte dos dados: https://www.camara.leg.br/noticias/550935-bancada-feminina-na-camara-sera-composta-por-77-deputadas-na-nova-legislatura. Acesso em: 11 jun. 2022.)

19. Resposta esperada: O gráfico **I**.

20. a) Resposta esperada: Faltam o título do gráfico e a fonte dos dados.

b) A medida de altura da primeira barra deveria ser $\frac{40^{:20}}{60_{:20}} = \frac{2}{3}$ da medida da altura da segunda. No gráfico do jornal X, essa razão é menor do que $\frac{2}{3}$, então o candidato B está sendo favorecido. No gráfico do jornal Y, essa razão é maior do que $\frac{2}{3}$, então o candidato A está sendo favorecido.

21. No gráfico **I**, não haveria prejuízo visual se a legenda estivesse correta, pois as cores estão trocadas. As alturas são as mesmas e as larguras estão na razão correta. No gráfico **II**, como A tem 40% das intenções de voto, o setor devia ter 40% de 360°, logo 144°, mas está com pouco mais de 90°. Então, o candidato A está com prejuízo visual no gráfico **II**.

22. a) Respostas pessoais.

b) Respostas pessoais.

23. A comparação realizada no pictograma não apresenta precisão, pois ele não segue uma escala, e pode causar erro de interpretação do leitor.

24. a) O time D é o que apresenta maior torcida.

b) Os times A e B parecem apresentar as menores torcidas, porém não é possível afirmar qual é o que tem menor torcida em valores absolutos.

c) Não é possível ter precisão sobre a quantidade de torcedores de cada time, pois o pictograma não apresenta uma escala bem definida e pode induzir a um erro quando comparamos as dimensões das figuras.

25. O impacto visual é causado pela área do círculo. Na comparação, as razões $\frac{\text{medida de área}}{\text{porcentual}}$ devem ser iguais. Assim:

$\frac{\pi \cdot 3^2}{9\%} = \frac{\pi \cdot r^2}{64\%} \Rightarrow r^2 = 64 \Rightarrow r = 8$ (r não pode ser negativo); ou seja, o raio deve medir 8 cm.

26. Média: $\frac{0 \cdot 4 + 1 \cdot 6 + 2 \cdot 14 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 6}{40} = \frac{88}{40} = 2{,}2$.

Mediana: os termos centrais são o 20º e o 21º termos, e ambos correspondem ao número 2, logo, a mediana é $\frac{2+2}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Moda: 2, pois é a nota com maior frequência.

27. Média:

$$\frac{2\,000 \cdot 3 + 2\,700 \cdot 5 + 3\,200 \cdot 4 + 3\,300 \cdot 10 + 5\,000 \cdot 2 + 8\,000 \cdot 1}{25} =$$

$$= \frac{83\,300}{25} = 3\,332\text{; ou seja, R\$ 3.332,00.}$$

O salário mediano é o que está na 13ª posição, ou seja, R$ 3.300,00; Salário modal: R$ 3.300,00, pois é o salário que aparece com maior frequência.

28.

Medida de tempo de cada estudante na prova

Medida de tempo (em min)	Ponto médio	Nº de candidatos	Produto
100 ⊢ 120	110	12	1 320
120 ⊢ 140	130	20	2 600
140 ⊢ 160	150	16	2 400
160 ⊢ 180	170	14	2 380
180 ⊢ 200	190	8	1 520
200 ⊢ 220	210	6	1 260
220 ⊢ 240	230	4	930
Total	-	**80**	**12 400**

Dados elaborados para fins didáticos.

A medida de tempo média gasta pelos candidatos foi 155 minutos, pois $\frac{12\,400}{80} = 155$.

29. Na abscissa 137 min (a mediana da medida de tempo gasta determinada a partir do histograma, pois deixa 50% deles abaixo e 50% acima).

30. a) Não, pois as porcentagens ultrapassam 100%.

b) A moda do período foi violação por negligência.

31. A menor nota é 3,0 e a maior é 10,0. A amplitude é $10{,}0 - 3{,}0 = 7{,}0$.

32. a) Média: $\frac{148 + 152 + 153 + 153 + 154}{5} = \frac{760}{5} = 152$; ou seja, 152 cm.

Amplitude: $154 - 148 = 6$; ou seja, 6 cm.

b) Média: $\frac{152 + 156 + 157 + 157 + 158}{5} = \frac{780}{5} = 156$; ou seja, 156 cm.

Amplitude: $158 - 152 = 6$; ou seja, 6 cm.

Logo, se todos crescerem 4 cm, a média vai aumentar 4 cm e a amplitude permanecerá a mesma, portanto a nova média será 156 cm e a amplitude continuará 6 cm.

33. a) Maior amplitude: Diretor de *marketing*.

b) Em todas as categorias, a média dos salários é maior do que a média entre o menor e o maior valor.

34. a) Considerando as notas em ordem monótona não decrescente, temos que a mediana é o 16º termo, que é o 5, então: $Q_1 = 4$; $Q_2 = 5$ e $Q_3 = 7$.

b) Média:

$$\frac{2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 5 \cdot 6 + 4 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 9 + 10}{31} =$$

$$= \frac{4 + 9 + 24 + 30 + 30 + 28 + 16 + 18 + 10}{31} = \frac{169}{31} \simeq 5{,}45$$

Como a mediana é 5, temos que a média é maior do que a mediana.

c) Com base na diferença entre a maior e a menor nota, temos que a amplitude $10 - 2 = 8$, logo, a amplitude do intervalo é 8. O intervalo interquartil pode ser obtido por meio de: $Q_3 - Q_1 = 3$.

35. a) 25% de 20,8 milhões corresponde a 5,2 milhões.

Pelo gráfico, notamos que abaixo de 18 anos havia cerca de 5,1 milhões de pessoas ($1{,}5 + 1{,}3 + 2{,}3 = 5{,}1$). Portanto, 18; representa o 1º quartil.

b) $Q_3 - Q_1 = 51 - 18 = 33$; ou seja, 33 anos.

Participe (p. 182)

Resposta pessoal.

Na olimpíada (p. 182)

Os números esquecidos

A média deve ser calculada com a soma dos 15 primeiros termos: $\frac{(1 + 2 + 3 + \ldots + 15)}{15} = \frac{120}{15} = 8$.

A soma dos 15 primeiros termos deveria ser 120.

Pelo enunciado, a soma dos 13 números é $7 \cdot 15 = 105$. Então, $120 - 105 = 15$, que corresponde à soma dos dois números esquecidos. Como esses números devem ser consecutivos, eles são 7 e 8, pois $7 + 8 = 15$. Multiplicando $7 \cdot 8 = 56$. Logo, alternativa **b**.

Educação financeira

I. Pagando à vista, financiando, fazendo um consórcio, fazendo *leasing*, etc.

II. Pesquisar. Isso depende das medidas adotadas pelo governo, podendo variar em função das políticas econômicas de curto, médio e longo prazo.

III. Consórcio – é uma forma de investimento com finalidade específica. De modo geral, funciona assim: a pessoa guarda o dinheiro (um valor fixo por mês) numa conta coletiva. Ao final do prazo combinado, recebe de volta o valor que investiu, geralmente em forma de carta de crédito, que deve ser usada para a compra do bem. Durante o período do contrato, ela pode ser sorteada ou então dar um valor maior, chamado lance, para pegar a carta de crédito mais cedo, adquirindo o bem e continuando a pagar as prestações restantes.

IV. Pode-se dar parte do valor como entrada, financiando o saldo, ou financiar o valor total. Geralmente, a instituição financeira solicita alguns documentos, entre os quais um comprovante de renda.

V. A pessoa paga um valor para usar o carro por determinado período. Dependendo do contrato, paga um valor único por dia ou uma taxa diária mais uma taxa por quilômetro rodado. Geralmente, o valor do aluguel inclui seguro e manutenção.

VI. Pesquisar. Pode haver variação de estado para estado, além de mudanças na legislação.

VII. O cálculo do valor do seguro de um veículo considera diferentes informações. Dentre elas, podemos citar a marca e o modelo do veículo segurado, o ano de fabricação dele, a quilometragem atual, a região de circulação, se o automóvel terá uso para trabalho ou para lazer, se passará a noite em garagem ou não, o tipo de cobertura que o condutor está contratando, a idade do condutor principal, seu endereço de domicílio, endereço de trabalho, entre outras características. (fonte dos dados: CALCULAR Seguro do Carro: entenda como calcular o valor do seu seguro. *Minuto Seguros*, [*s. l.*], 13 abr. 2022. Disponível em: https://www.minutoseguros.com.br/blog/calcular-seguro-auto-entenda-a-precificacao/. Acesso em: 28 jun. 2022).

VIII. Resposta pessoal.

1. e **2.** Basicamente, em relação ao financiamento, o consórcio tem a vantagem de cobrar menos taxas, mas a pessoa paga antes de obter o bem. No entanto, os estudantes podem levantar outros argumentos.

3. Resposta pessoal. Depende dos valores levantados na pesquisa dos itens anteriores.

4. $36 \cdot 1\,980 - 40\,000 = 31\,280$. A pessoa terá pagado R$ 31.280,00 de juros.

5. $40\,000 \cdot 9\% = 3\,600$; $40\,000 + 3\,600 = 43\,600$. Portanto, retirou R$ 43.600,00 da renda anual.

Capítulo 13 – Contagem e Probabilidade

Atividades

1. a) $6 + 8 = 14$; portanto, 14 modos.
b) $8 \cdot 3 = 24$; portanto, 24 modos.
c) $6 \cdot 8 = 48$; portanto, 48 modos.
d) Há 3 possibilidades para a escolha de duas coberturas: chocolate e morango, ou chocolate e caramelo, ou morango e caramelo. O número de modos de montar a taça é: $8 \cdot 3 = 24$, portanto 24 modos.

2. a) $5 + 6 = 11$; portanto, 11 modos.
b) $6 \cdot 5 = 30$; portanto, 30 modos.

3. a) $3 \cdot 3 = 9$; ou seja, 9 pares.
b) $3 \cdot 2 = 6$; ou seja, 6 pares.

4. $6 \cdot 6 = 36$; ou seja, 36 pares.

5. $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$; ou seja, 8 sequências.

6. a) $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$; ou seja, 45 segmentos de reta.
b) $\frac{n \cdot (n - 1)}{2} = 120 \Rightarrow n^2 - n - 240 = 0 \Rightarrow n = \frac{1 \pm 31}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow n = -15$ (não serve) ou $n = 16$.
São necessários 16 pontos.

7. a) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$; são 10 resultados possíveis.
$A = \{9, 10\}$
$B = \{2, 3, 5, 7\}$

8. $S = \{$domingo, segunda-feira, terça-feira, quarta-feira, quinta-feira, sexta-feira, sábado$\}$; são 7 resultados possíveis.
$A = \{$domingo$\}$

9. $S = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$; são 12 resultados possíveis.
$A = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$
$B = \{(1, 3), (3, 1)\}$
$C = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$
$D = \{(1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)\}$

10. $P(A) = \frac{2^{:2}}{10_{:2}} = \frac{1}{5}$; $P(B) = \frac{4^{:2}}{10_{:2}} = \frac{2}{5}$.

11. $P(A) = \frac{6^{:6}}{12_{:6}} = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{2^{:2}}{12_{:2}} = \frac{1}{6}$; $P(C) = \frac{6^{:6}}{12_{:6}} = \frac{1}{2}$;
$P(D) = \frac{4^{:4}}{12_{:4}} = \frac{1}{3}$.

12. a) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
b) $\frac{1}{6}$
c) $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1$
d) $A = \{3, 4, 5, 6\} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

13. a) $A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\} \Rightarrow P(A) = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$
b) Os primos de 1 a 20 são: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 e 19. Como há 8 números primos, não são primos: $20 - 8 = 12$; ou seja, 12 números. A probabilidade é: $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$.

14. a) Uma possibilidade em 7. A probabilidade é $\frac{1}{7}$.
b) Os resultados desejados são: quarta-feira, quinta-feira. A probabilidade é $\frac{2}{7}$.

15. a) C: cara, K: coroa.
$S = \{(C, C, C), (C, C, K), (C, K, C), (C, K, K), (K, C, C), (K, C, K), (K, K, C), (K, K, K)\}$

b) $A = \{(C, C, C), (C, C, K), (K, K, C), (K, K, K)\} \Rightarrow P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

c) $B = \{(C, K, K), (K, C, K), (K, K, C), (K, K, K)\} \Rightarrow P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

16. Número de resultados possíveis: 250; número de resultados desejados: $250 - 4 = 246$. Probabilidade: $\frac{246}{250} = 0{,}984 = 98{,}4\%$.

17. $\frac{12}{300} = \frac{4}{100} = 4\%$

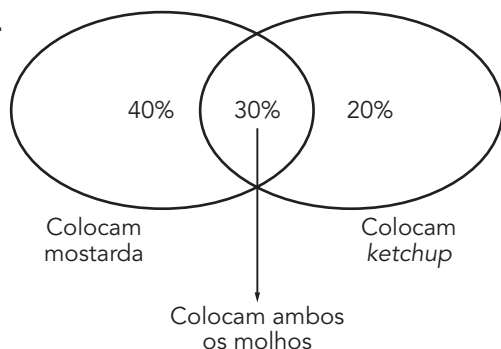
18. $P(\text{não canhoto}) = 1 - P(\text{canhoto}) = 1 - \frac{4}{32} = \frac{28}{32} = \frac{7}{8}$

19. a) $S = \{(C, C, C), (C, C, K), (C, K, C), (C, K, K), (K, C, C), (K, C, K), (K, K, C), (K, K, K)\}$
$P(\text{não ocorrer coroa nos 3}) = 1 - P(\text{ocorrer coroa nos 3}) =$
$= 1 - P((K, K, K)) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

b) $P(\text{ocorrer cara em pelo menos 1}) = 1 - P(\text{ocorrer cara em nenhum}) =$
$= 1 - P((K, K, K)) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

20. a) $100\% - 70\% = 30\%$

b) 100%

21.

Colocam apenas um dos molhos:

- só mostarda: $70\% - 30\% = 40\%$;
- só *ketchup*: $50\% - 30\% = 20\%$.

40% colocam só mostarda; 30% colocam ambos os molhos; 20% colocam só *ketchup*. Como $40\% + 30\% + 20\% = 90\%$, então 10% não colocam molho algum.

40% colocam só mostarda e 20% só *ketchup*; então: $40\% + 20\% = 60\%$ colocam apenas um dos molhos.

22. a) H: homem, M: mulher
Casos possíveis: HH, HM, MH, MM; casos desejados: MM. Probabilidade: $\frac{1 \text{ caso}}{4 \text{ casos}} = \frac{1}{4}$ ou 25%.

b) 25%

23. Sabendo que o total de estudantes das 3 turmas é $37 + 38 + 40 = 115$, temos:

a) $\frac{15 + 22}{115} = \frac{37}{115}$

b) $\frac{18}{115}$

c) $\frac{22 + 20 + 23}{115} = \frac{65^{:5}}{115_{:5}} = \frac{13}{23}$

24. Sabendo que saiu um número de dois algarismos, as possibilidades são: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20. Destes, os resultados desejados (múltiplos de 3) são: 12, 15 e 18. A probabilidade é: $\frac{3}{11}$.

25. a) São 12 bolas (pois $3 + 4 + 5 = 12$), sendo 4 azuis. A probabilidade é: $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

b) Sabendo que saiu azul na primeira retirada, sobraram 3 bolas azuis em 11 bolas. A probabilidade é: $\frac{3}{11}$.

c) Pela regra da multiplicação, é a probabilidade de sair azul na primeira retirada vezes a de sair azul na segunda, supondo azul na primeira: $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{11} = \frac{1}{11}$.

26. Com a reposição, a primeira bola retirada é devolvida à urna.

a) $P(\text{azul na 1ª retirada}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

b) $P(\text{azul na 2ª retirada}) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

c) Nesse caso, os eventos "azul na primeira retirada" e "azul na segunda retirada" são independentes. A probabilidade de que ambos ocorram é: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$

27. Os eventos "número maior do que 3 no primeiro lançamento" e "número maior do que 3 no segundo lançamento" são independentes: A probabilidade de que ambos ocorram é: $\frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

28. a) Retiradas com reposição (nesse caso, são eventos independentes):
$P(A) = \frac{1}{3}$; $P(B) = \frac{1}{3}$ e $P(A \cap B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$.

b) Retiradas sem reposição:

1ª retirada	2ª retirada	resultado
branca	preta	(b, p)
	vermelha	(b, v)
preta	branca	(p, b)
	vermelha	(p, v)
vermelha	branca	(v, b)
	preta	(v, p)

Banco de imagens/Arquivo da editora

$A = \{(b, p), (b, v)\} \Rightarrow P(A) = \frac{2^{:2}}{6_{:2}} = \frac{1}{3}$

$B = \{(p, b), (v, b)\} \Rightarrow P(B) = \frac{2^{:2}}{6_{:2}} = \frac{1}{3}$

Em nenhum resultado possível temos branca na 1ª retirada, e branca na 2ª retirada, uma vez que são retiradas sem reposição (se sair branca na 1ª vez, ela não volta para a urna). Desse modo, a probabilidade de que ambos os eventos, A e B, ocorram é 0. Portanto: $P(A \cap B) = 0$.

Outro modo: pela regra da multiplicação:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A) = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0$.

Na História

a) Se o jogo tivesse prosseguido e, no lançamento da moeda, Aldo tivesse obtido coroa, ele ficaria com 3 pontos e, portanto, Bruno com 1 ponto. Logo, a divisão das apostas seria: 20 e 0.

b) Mas, se Aldo tivesse obtido cara, ele ficaria com 2 pontos e Bruno ficaria com 2 pontos. Logo, a divisão seria 10 e 10.

c) Assim, pode-se concluir que, quando da interrupção do jogo, Aldo já fizera jus a 10 figurinhas.

d) Mas, se o jogo prosseguisse, quando Aldo lançasse a moeda, a probabilidade de sair cara ou coroa é a mesma, portanto, o restante das apostas (10 figurinhas) deve ser dividido igualmente, da seguinte maneira: 5 e 5.

e) Logo, a divisão das apostas, ao ser interrompido o jogo, deve ser a seguinte: Aldo ⟶ 15 figurinhas; Bruno ⟶ 5 figurinhas.

Na mídia

1. As novas recomendações para criação de senha são a utilização de uma sentença com mais palavras que façam sentido ao usuário e que não sejam diretamente ligadas a ele. A modificação do modelo de “senha segura” se deve à constatação de que frases como as recomendadas no texto demorariam muito mais tempo para serem quebradas por um *hacker*.

2.

Caracteres	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
Possibilidades	5	4	3	2	1

$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$; ou seja, serão 120 senhas diferentes e, portanto, no máximo, 120 tentativas.

3.

Posição	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª
Possibilidades	10	10	10	10	10	10

$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000\,000$; ou seja, 1 000 000 de senhas possíveis.

Na Unidade

1. $3 + 4 + 6 + 5 + 2 = 20$; ou seja, 20 estudantes. Logo, alternativa **d**.

2. Média: $\dfrac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 5 \cdot 4 + 2 \cdot 5}{20} = \dfrac{59}{20} = 2{,}95$. Logo, alternativa **c**.

3. No gráfico **1**, a razão é $\dfrac{30}{70} = \dfrac{3}{7}$. No gráfico **2**, é $\dfrac{1}{5}$. A diferença é: $\dfrac{3}{7} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{15 - 7}{35} = \dfrac{8}{35}$. Logo, alternativa **e**.

4. a)

Número de erros na primeira página

Número de erros	Número de dias	Frequência relativa
0	170	85%
1	18	9%
2	10	5%
3	2	1%
Total	**200**	**100%**

Dados elaborados para fins didáticos.

b) Para a construção do gráfico de setores, vamos calcular a medida do ângulo de cada setor para cada valor de frequência apresentado.

$a = 85\% \cdot \dfrac{360°}{100} = 306°$

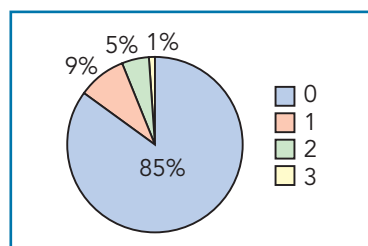
$b = 9\% \cdot \dfrac{360°}{100} = 32{,}4°$

$c = 5\% \cdot \dfrac{360°}{100} = 18°$

$d = 1\% \cdot \dfrac{360°}{100} = 3{,}6°$

Número de erros na primeira página

Dados elaborados para fins didáticos.

Banco de imagens/Arquivo da editora

5. a) Média: $\dfrac{5 + 5 + 7 + 8 + 9 + 10}{6} = \dfrac{44}{6} \simeq 7{,}3$;

mediana: $\dfrac{7 + 8}{2} = 7{,}5$.

b) Média: $\dfrac{4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 8}{6} = \dfrac{38}{6} \simeq 6{,}3$;

mediana: $\dfrac{6 + 7}{2} = 6{,}5$.

c) Média: $\dfrac{4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9}{6} = \dfrac{39}{6} \simeq 6{,}5$;

mediana: $\dfrac{6 + 7}{2} = 6{,}5$.

d) Média: $\dfrac{5 + 5 + 5 + 7 + 7 + 9}{6} = \dfrac{38}{6} \simeq 6{,}3$;

mediana: $\dfrac{5 + 7}{2} = 6$.

e) Média: $\dfrac{5 + 5 + 10 + 10 + 10 + 10}{6} = \dfrac{50}{6} \simeq 8{,}3$;

mediana: $\dfrac{10 + 10}{2} = 10$.

Logo, ocorre média maior do que a mediana apenas na alternativa **d**.

6. São 5 opções de lanche e 4 de bebida. O número de pedidos possíveis é: $5 \cdot 4 = 20$. Logo, alternativa **d**.

7. Sabendo que saiu cara três vezes, os resultados possíveis são: (C, C, C, K), (C, C, K, C), (C, K, C, C), (K, C, C, C). Portanto, são 2 resultados desejados entre 4 resultados possíveis.

A probabilidade pedida é: $\dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$. Logo, alternativa **c**.

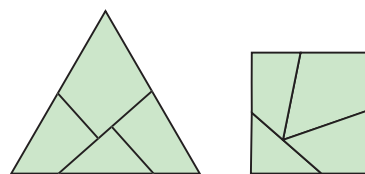
Unidade 7

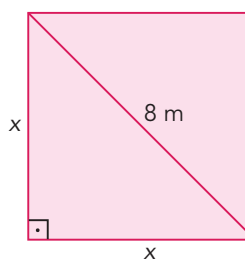
Capítulo 14

Abertura (p. 199)

Resposta pessoal. Exemplo de resposta: A técnica de ladrilhamento pode ser encontrada nas escamas de peixe, além de ser usada também em papéis de parede, em pisos de cerâmica ou pedra, entre outros exemplos.

Participe (p. 200)

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Atividades

1. a) $A = x \cdot x = x^2$; pelo teorema de Pitágoras:

$x^2 + x^2 = 8^2 \Rightarrow 2x^2 = 64 \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 = 32$
Portanto, $A = 32$ m².

Banco de imagens/Arquivo da editora

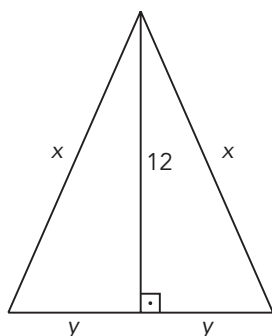
b) Pelo teorema de Pitágoras:
$x^2 + 8^2 = 17^2 \Rightarrow x^2 = 225 \Rightarrow x^2 = 15^2 \Rightarrow x = 15$ (x não pode ser negativo)
$A = x \cdot 8 = 15 \cdot 8 = 120$; ou seja, 120 m².

2. Cálculo de ℓ^2 pelo teorema de Pitágoras:
$\ell^2 + \ell^2 = 10^2 \Rightarrow 2\ell^2 = 100 \Rightarrow \ell^2 = 50$
Medida de área colorida, em cm²: $\frac{\ell^2}{2} = \frac{50}{2} = 25$; ou seja, 25 cm².

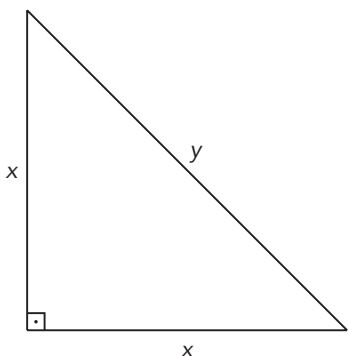
3. Se o perímetro mede 30 m, então o lado mede: 30 m : 3 = 10 m.
Logo: $A = \frac{10^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$, em m².

4. $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 6 = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \ell = \frac{12}{\sqrt{3}} \Rightarrow \ell = \frac{12\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$
$\Rightarrow \ell = 4\sqrt{3}$
Logo, $A = \frac{(4\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 12\sqrt{3}$, em m².

5. Pelo teorema de Pitágoras: $y^2 + 12^2 = x^2$. Da medida de perímetro, temos:
$2x + 2y = 36 \Rightarrow x + y = 18$

Banco de imagens/Arquivo da editora

Logo:
$y^2 + 144 = (18 - y)^2 \Rightarrow y^2 + 144 = 324 - 36y + y^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow 36y = 180 \Rightarrow y = 5$
Então: $A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{10 \cdot 12}{2} = \frac{120}{2} = 60$; ou seja, 60 m².

6. Cálculo de x:

Banco de imagens/Arquivo da editora

$A = \frac{x \cdot x}{2} = 8 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$ (x não pode ser negativo)
Cálculo de y:
$y^2 = x^2 + x^2 = 2x^2 = 2 \cdot 4 \Rightarrow y = 4\sqrt{2}$ (y não pode ser negativo)
Logo, a medida de perímetro é: $2x + y = 2 \cdot 4 + 4\sqrt{2} = 8 + 4\sqrt{2}$, em cm.

7. $A = b \cdot h + 2 \cdot \frac{b \cdot h}{2} = 5 \cdot 2 + 2 \cdot \frac{2 \cdot 2{,}5}{2} = 10 + 5 = 15$; ou seja, 15 cm².

8. a) $A_{ADC} = \frac{AD \cdot h}{2} = \frac{b}{4} \cdot \frac{h}{2} = \frac{bh}{8}$

$A_{AEC} = \frac{AE \cdot h}{2} = \frac{b}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{bh}{4}$

$A_{AFC} = \frac{AF \cdot h}{2} = \frac{3b}{4} \cdot \frac{h}{2} = \frac{3bh}{8}$

$A_{ABC} = \frac{AB \cdot h}{2} = \frac{bh}{2}$

b) $\frac{A_{CDE}}{A_{ABC}} = \frac{A_{ADC}}{A_{ABC}} = \frac{bh}{8} : \frac{bh}{2} = \frac{bh}{8} \cdot \frac{2}{bh} = \frac{1}{4}$

Na mídia

1. A precisão dos cálculos divulgados pela mídia é muito importante, pois, quando se trata de uma manifestação, o número de pessoas presentes mostra a adesão ou não a determinado protesto. Dessa maneira, quanto maior o número de pessoas presentes, maior o indício de que essa manifestação reflete reivindicações de muitas pessoas.

2. 1,15 km = 1 150 m; 1 150 · 40 = 46 000; ou seja, 46 000 m². Então: 46 000 · 4 = 184 000
A região foi ocupada, em média, por 184 000 pessoas.

3. a) 22 · 3 = 66; ou seja, 66 m²; 528 : 66 = 8; ou seja, 8 pessoas por m².

b) Especialistas apontam que o limite suportável é de 6 pessoas por metro quadrado. (Fonte dos dados: http://memoria.ebc.com.br/agenciabrasil/noticia/2011-04-23/metro-de-sao-paulo-ainda-e-mais-lotado-do-mundo. Acesso em: 11 abr. 2022.)

c) O trem estava lotado, pois havia 2 passageiros a mais do que o limite suportável por m².

Capítulo 15

Participe (p. 208)

I. a) 180°; 180°; 180°. Cada par de ângulos dado é igual a 180°, pois forma uma reta, um ângulo raso.

b) 180° + 180° + 180° = 540°

c) 180°, pois a soma das medidas desses ângulos é a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo.

d) 540° − 180° = 360°

II. a) 180° + 180° + 180° + 180° = 720°

b) 360°, pois a soma das medidas desses ângulos é a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero.

c) 720° − 360° = 360°

Atividades

1. Número de diagonais por vértice: $n - 3 = 10 - 3 = 7$.
Número de diagonais para $n = 10$: $d = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{10 \cdot 7}{2} = 35$.

2. Para $n = 9$, o número de diagonais é:
$d = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{9(9-3)}{2} = 27$.

3. Para $d = 44$, o número de lados é:
$44 = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow n^2 - 3n - 88 = 0$
$s = 3$ e $p = -88$.
$n = -8$ (não serve) ou $n = 11$; ou seja, 11 lados.

4. Para $n = 12$, temos: $S_i = (n - 2) \cdot 180° = (12 - 2) \cdot 180° = 1\,800°$.

5. Para $n = 9$, temos: $S_i = (n - 2) \cdot 180° = (9 - 2) \cdot 180° = 1\,260°$.

6. $S_i = (n - 2) \cdot 180° \Rightarrow 900° = (n - 2) \cdot 180° \Rightarrow 5 = n - 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 7$. O polígono é um heptágono.

7. Como a figura é um hexágono, temos: $S_i = (6 - 2) \cdot 180° = 4 \cdot 180° =$
$= 720°$.

8. $180° - 60° - 70° = 50°$; os ângulos internos do triângulo medem $50°$, $60°$ e $70°$.
Os ângulos externos medem $180° - 50° = 130°$; $180° - 60° = 120°$; e $180° - 70° = 110°$.

Participe (p. 210)

a) Mediatriz de $\overline{AB}$.
b) São iguais.
c) Q pertence à reta r.
d) Bissetriz de $C\hat{O}D$.
e) São iguais.
f) $S \in \overrightarrow{OR}$.

9. a) $h = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} = \dfrac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$, em m.

b) $R = \dfrac{2}{3} \cdot h = \dfrac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$, em m.

c) $r = \dfrac{1}{3} \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$, em m.

d) $a = r = \sqrt{3}$, em m.

10. a) $d = \ell\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$, em m.

b) $R = \dfrac{d}{2} = \dfrac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$, em m.

c) $r = \dfrac{\ell}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$, em m.

d) $a = r = 4$, em m.

11. a) $D = 2R = 2\ell = 2 \cdot 6 = 12$, em m.

b) $R = \ell = 6$, em m.

c) $r = \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} = \dfrac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$, em m.

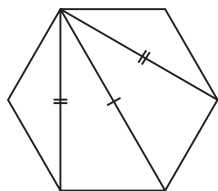
d) $d = 6\sqrt{3}$, em m.

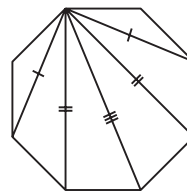
e) $a = r = 3\sqrt{3}$, em m.

12. $a_c = \dfrac{360°}{n} \Rightarrow 18° = \dfrac{360°}{n} \Rightarrow n = 20$. O polígono é um icoságono.

13. $a_i = \dfrac{(n-2) \cdot 180°}{n} \Rightarrow 170° = \dfrac{(n-2) \cdot 180°}{n} \Rightarrow$
$\Rightarrow 18n - 36 = 17n \Rightarrow n = 36$; ou seja, 36 lados.

14. $a_e = \dfrac{360°}{n} \Rightarrow 40° = \dfrac{360°}{n} \Rightarrow n = 9$; ou seja, 9 lados.

15. a) 2 medidas diferentes.

Banco de imagens/Arquivo da editora

b) 3 medidas diferentes.

Banco de imagens/Arquivo da editora

16. Se o perímetro mede $12\sqrt{3}$ cm, então o semiperímetro mede $6\sqrt{3}$ cm.
Logo: $A = p \cdot a = 6\sqrt{3} \cdot 2 = 12\sqrt{3}$, em cm².

17. $A = p \cdot a \Rightarrow 256 = p \cdot 8 \Rightarrow p = 32$. Logo, o perímetro mede $2p = 2 \cdot 32 = 64$, em cm.

18. $\ell = 4 \Rightarrow p = \dfrac{6 \cdot 4}{2} \Rightarrow p = 12$

$A = p \cdot \dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} = 12 \cdot \dfrac{4\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$, em cm²

19. $S_i = (n - 2) \cdot 180° \Rightarrow 1\,440° = (n - 2) \cdot 180° \Rightarrow 8 = n - 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 10$

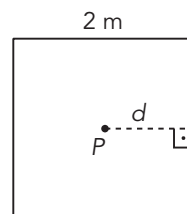
$a_c = \dfrac{360°}{n} = \dfrac{360°}{10} = 36°$

20.

Polígono regular inscrito	Medida do lado	Medida da apótema
Triângulo	$r\sqrt{3}$	$\dfrac{r}{2}$
Quadrado	$r\sqrt{2}$	$\dfrac{r\sqrt{2}}{2}$
Hexágono	r	$\dfrac{r\sqrt{3}}{2}$

21. Cálculo de ℓ: $\ell = r\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 5 \cdot 2 = 10$, em m.

Cálculo de a: $a = \dfrac{r\sqrt{2}}{2} = \dfrac{5\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = 5$, em cm.

22. $d = \dfrac{\ell}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$. O paliteiro fica a 1 m da borda da mesa.

Banco de imagens/Arquivo da editora

23. Como $\ell = \dfrac{80}{4} = 20$, temos: $r\sqrt{2} = 20 \Rightarrow r = \dfrac{20}{\sqrt{2}} \Rightarrow$
$\Rightarrow r = 10\sqrt{2}$, em cm.

24. Como $\ell = 2R = 2 \cdot 5 = 10$, temos: $A = \ell^2 = 10^2 = 100$, em cm².

25. A medida do apótema do hexágono regular é igual à medida do raio da circunferência inscrita, então:

$\dfrac{\ell\sqrt{3}}{2} = 253 \Rightarrow \ell\sqrt{3} = 2 \cdot 253 \Rightarrow \ell = \dfrac{506}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ell = \dfrac{506\sqrt{3}}{3}$

Logo, a medida de comprimento da pista é:

$6 \cdot \dfrac{506\sqrt{3}}{3} \simeq 1\,012 \cdot 1{,}732 \simeq 1753$; ou seja, aproximadamente 1 753 m.

26. Como $\ell = 20$, temos que a medida de semiperímetro é $3 \cdot 20 = 60$.

Logo: $A = p \cdot a = 60 \cdot \frac{20\sqrt{3}}{2} = 600\sqrt{3} \simeq 600 \cdot 1{,}732 \simeq 1\,039$.

São necessários aproximadamente 1 039 m² de grama.

27. No hexágono regular inscrito, temos $r = \ell_6 = 8\sqrt{2}$. No quadrado inscrito na mesma circunferência, temos $\ell_4 = r\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 16$ e o apótema mede: $\frac{\ell_4}{2} = \frac{16}{2} = 8$, em cm.

28. a) $a = \ell\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}$, em cm.

b) $r = a = \frac{5\sqrt{3}}{2}$, em cm.

c) Como $\triangle AOB \sim \triangle BOC$, temos:

$AC = 2 \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot a = 2 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$, em cm.

29. a) O pentágono tem 5 lados ($n = 5$), então:

$S_i = (n - 2) \cdot 180° = (5 - 2) \cdot 180° = 3 \cdot 180° = 540°$

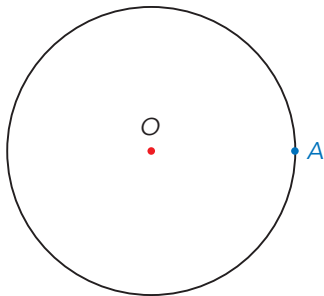
$a_i = \frac{S_i}{n} = \frac{540°}{5} = 108°$

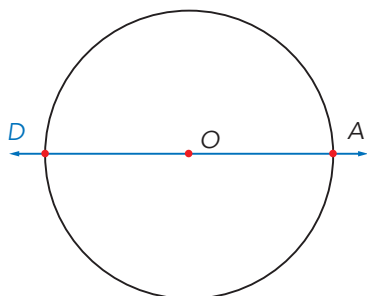
Como são 3 pentágonos, temos: $3 \cdot 108° = 324°$.

Logo, não é possível, pois ao juntar os vértices de 3 pentágonos, a soma das medidas dos ângulos internos é 324°, faltando 36° para uma volta completa, o que significa que haveria um espaço, não formando um ladrilhamento.

b) Exemplo de resposta: É possível fazer um ladrilhamento com triângulos equiláteros, usando 6 desses triângulos, pois cada ângulo interno de um triângulo equilátero mede 60° e $6 \cdot 60° = 360°$ (uma volta completa).

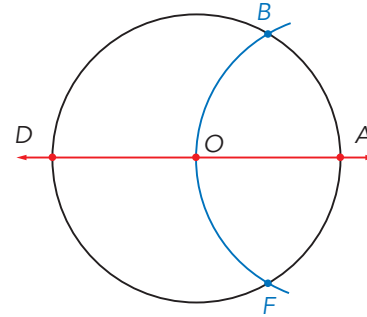
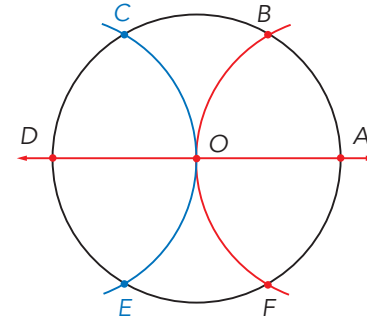
Participe (p. 217)

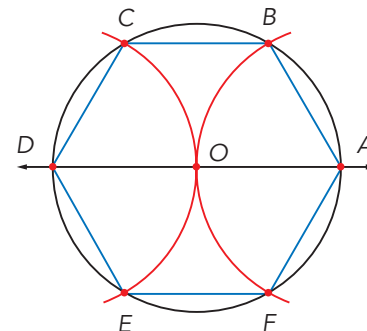
1. Marcamos um ponto *A* em qualquer lugar da circunferência.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Traçamos a reta $\overleftrightarrow{OA}$ e chamamos de *D* o outro ponto em que essa reta intersecta a circunferência.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Com centro em *A* e raio $\overline{AO}$, construímos um arco de circunferência que a intersecta nos chamados pontos *B* e *F*.

Com centro em *D* e raio $\overline{DO}$, construímos um arco de circunferência que a intersecta nos chamados pontos *C* e *E*.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Ligamos os pontos obtendo o polígono *ABCDEF*.

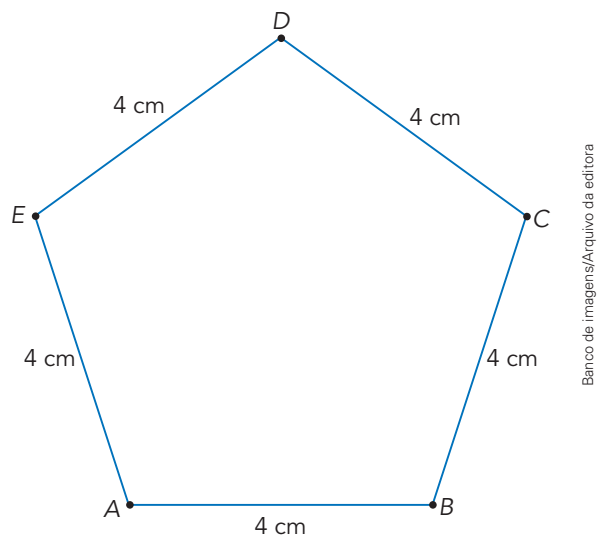
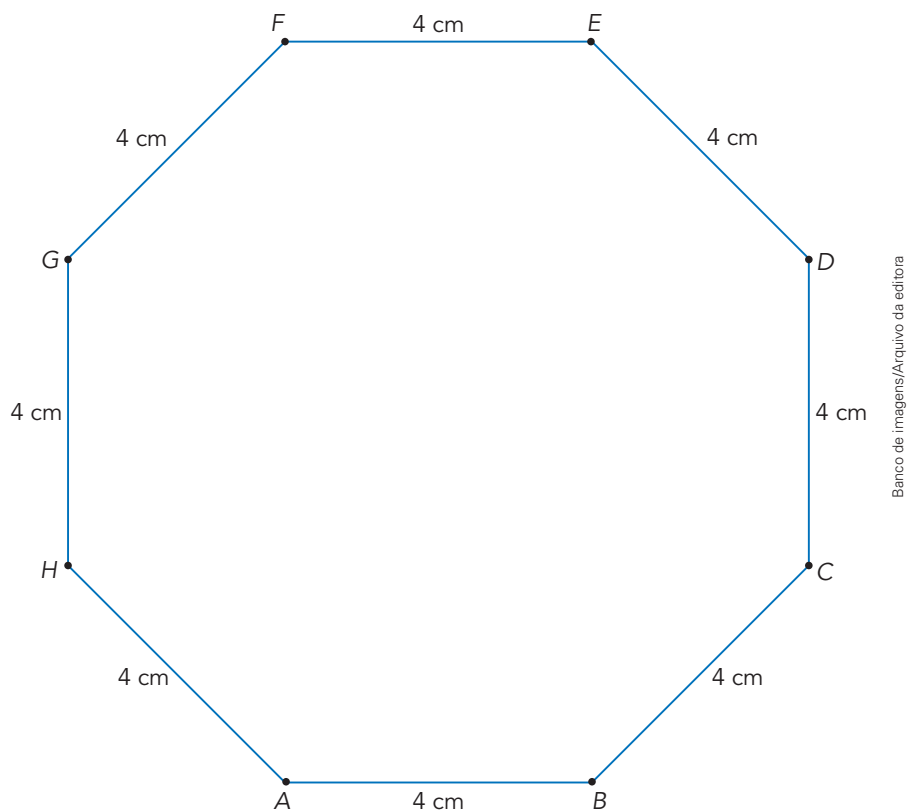
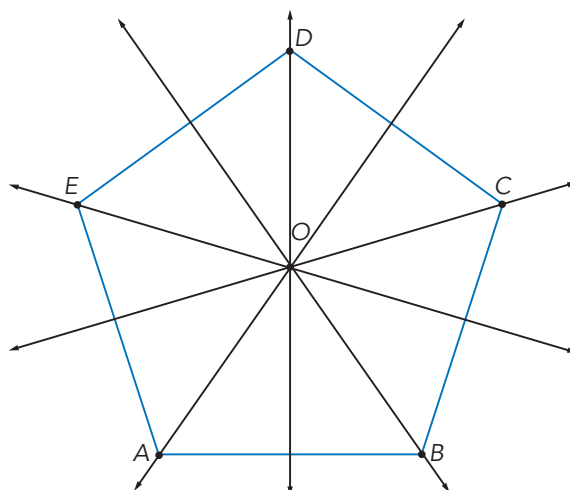
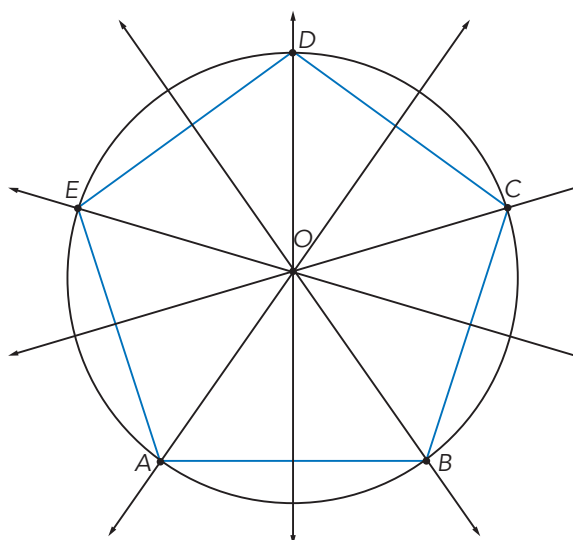
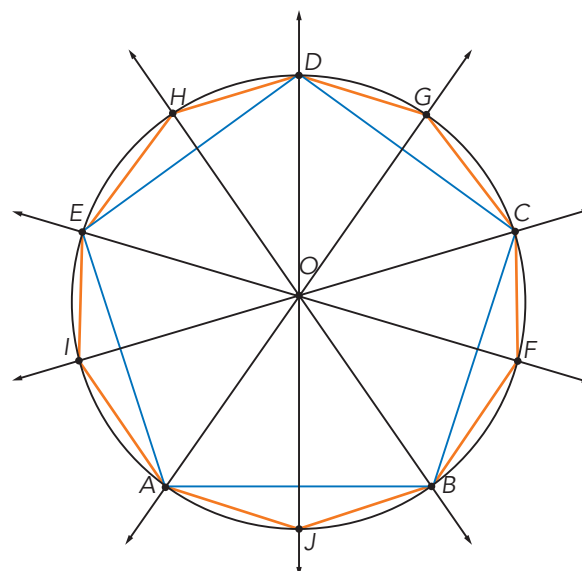
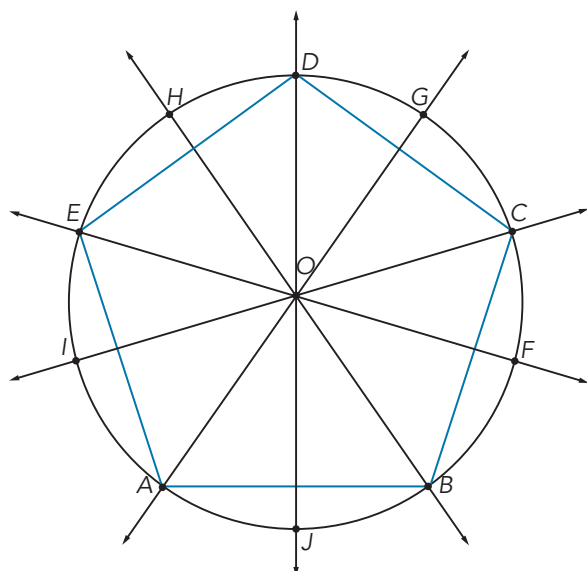
2. O polígono construído é o hexágono regular, pois é um polígono convexo que tem todos os 6 lados congruentes e todos os 6 ângulos internos congruentes.

Participe (p. 220)

1. O robô tem que girar 90° para a esquerda.

2. Andar para frente 3 metros.
Girar para a esquerda 90°.
Andar para frente 3 metros.
Girar para a esquerda 90°.
Andar para frente 3 metros.

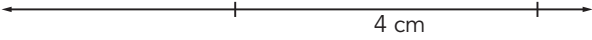
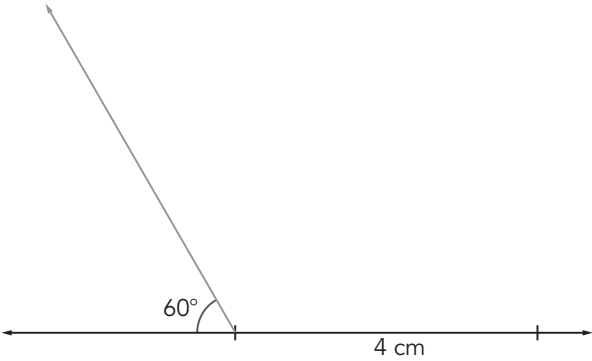
3. Andar para frente 3 metros.
Girar para a esquerda 120°.
Andar para frente 3 metros.
Girar para a esquerda 120°.
Andar para frente 3 metros.

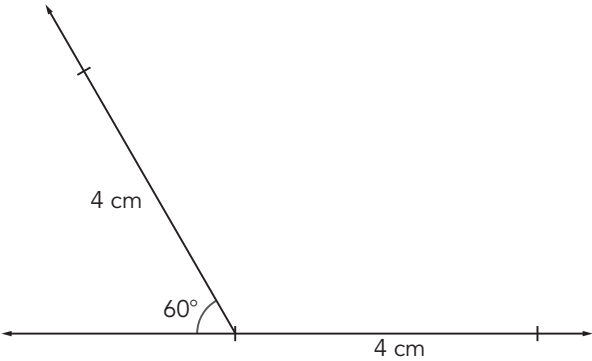
4. Para o giro do robô foi utilizado o ângulo externo do polígono regular.

30. Seguindo os passos da construção de um polígono regular de 5 lados, com medida do lado 4 cm, obtemos:

31. Seguindo os passos da construção de um polígono regular de 8 lados, com medida do lado 4 cm, obtemos:

32. Construímos a mediatriz de cada um dos lados do pentágono regular *ABCDE* a seguir. Chamamos de *O* o ponto de encontro dessas mediatrizes.

Com a ponta-seca do compasso em *O* e abertura de *O* até um dos vértices do pentágono, traçamos uma circunferência que passará por todos os vértices do pentágono.

Cada uma das mediatrizes intersecta a circunferência em um ponto que não pertence ao pentágono. Chamamos esses pontos de *F*, *G*, *H*, *I* e *J*. Unindo os pontos consecutivos da circunferência, temos o decágono regular *AJBFCGDHEI*.

33. Para construir um hexágono regular de lado medindo 4 cm, devemos seguir os seguintes passos:

1º) Calculamos a medida do ângulo externo do hexágono. Sendo $n = 6$ o número de lados do hexágono, a medida do ângulo externo será $a_e = \frac{360°}{n} = \frac{360°}{6} = 60°$.

2º) Construímos uma reta suporte e, sobre ela, marcamos um segmento de reta de medida 4 cm.

Banco de imagens/Arquivo da editora

3º) Construímos uma semirreta com origem em uma das extremidades do segmento de reta e que forma um ângulo (externo do polígono) de medida 60° com a reta suporte e forma, com o segmento de reta, o ângulo interno correspondente.

4º) Marcamos sobre a semirreta um segmento de reta de medida 4 cm com extremidade na origem dela.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

5º) Repetimos o procedimento do 3º e do 4º passo até fechar o hexágono.

34.

INÍCIO → Considerar $n = 9$ e cada lado medindo 3 cm. → A medida de cada ângulo externo é 40°. → Construir uma reta suporte e, sobre ela, marcar um segmento de reta de medida 3 cm. → Construir uma semirreta com origem em uma das extremidades do segmento de reta e de modo que forme, com a reta suporte, um ângulo externo do eneágono de medida 40° e, com o segmento de reta, o ângulo interno correspondente. → Marcar um segmento de reta de medida 3 cm sobre a semirreta construída, com extremidade na origem dela. → Os segmentos de reta construídos formam um eneágono?

Sim → FIM

Não → Construir uma semirreta com origem em uma das extremidades do segmento de reta e de modo que forme, com a reta suporte, um ângulo externo do eneágono de medida 40° e, com o segmento de reta, o ângulo interno correspondente.

35. a) Como o ângulo externo mede 36° e $n = 10$, $\left(\text{pois } a_e = \dfrac{360°}{n} \Rightarrow 36° = \dfrac{360°}{n} \Rightarrow n = \dfrac{360°}{36°} \Rightarrow n = 10\right)$, temos que o polígono construído é um decágono regular com lado medindo 2.

b) Para construir um polígono regular de 10 lados (decágono) com cada lado medindo 2 (em centímetros, por exemplo), devemos seguir os seguintes passos:

1º) Calculamos a medida do ângulo externo do decágono. Sendo $n = 10$ o número de lados do decágono, a medida do ângulo externo será: $a_e = \dfrac{360°}{n} = \dfrac{360°}{10} = 36°$.

2º) Construímos uma reta suporte e, sobre ela, marcamos um segmento de reta de medida 2 cm.

3º) Construímos uma semirreta com origem em uma das extremidades do segmento de reta e que forma um ângulo (externo do polígono) de 36° com a reta suporte e forma, com o segmento de reta, o ângulo interno correspondente.

4º) Marcamos sobre a semirreta um segmento de reta de medida 2 cm com extremidade na origem dela.

5º) Repetimos o procedimento do 3º e do 4º passo até fechar o decágono.

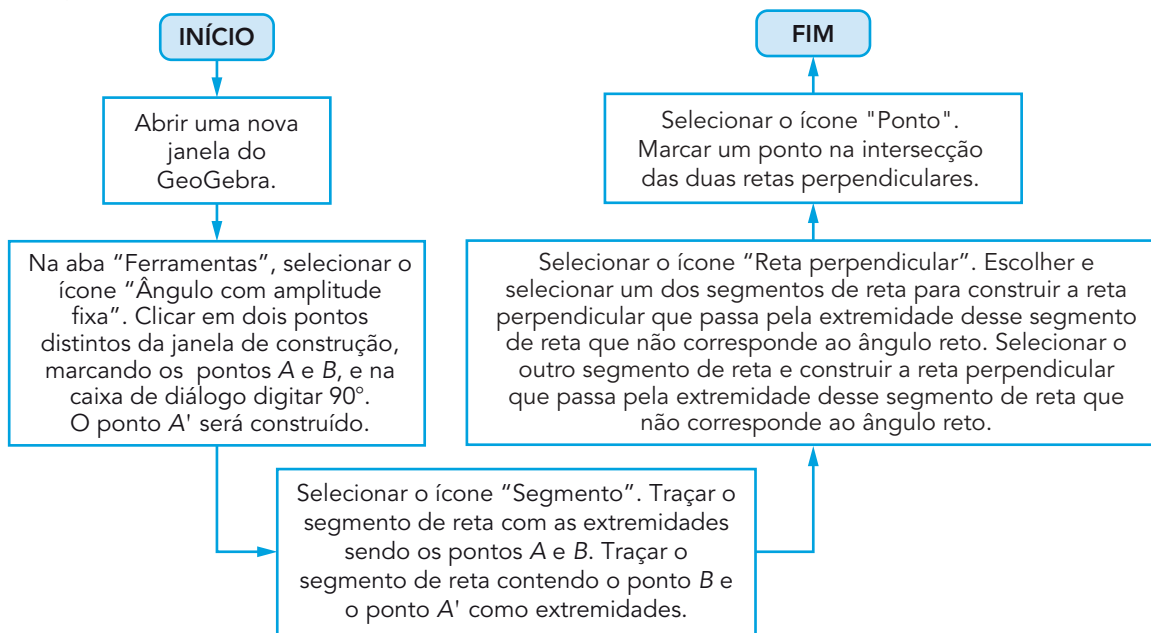
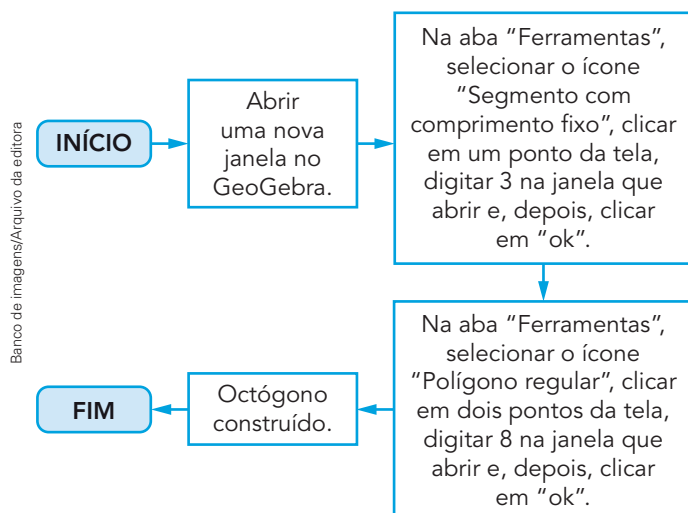
Matemática e tecnologias

1. Para construir um quadrado de lado medindo 3 cm, devemos seguir os seguintes passos:

1º) Abra uma nova janela do GeoGebra.

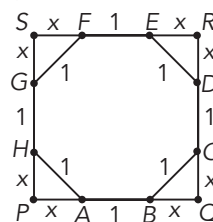
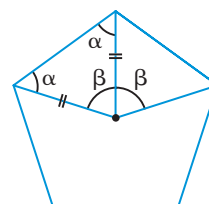
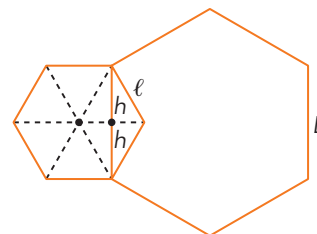
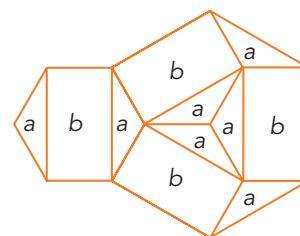
2º) Na aba "Ferramentas", selecione o ícone "Segmento com o comprimento fixo" e clique em um ponto qualquer da tela e depois preencha no campo o tamanho do segmento, que nesse caso será igual a 3 cm.

3º) Clique na aba "Polígono Regular" e em seguida nos dois pontos obtidos no passo anterior. Na janela que abrir, digite 4 e depois, clique em "OK". O quadrado de lado medindo 3 cm será formado.

2.

3. O fluxograma que apresenta a construção de um octógono regular com medida de lado igual a 3 é:

Na História

1. $\frac{c^2}{12} = \pi r^2 \Rightarrow \frac{4\pi^2 r^2}{12} = \pi r^2 \Rightarrow \pi = \frac{12}{4} \Rightarrow \pi = 3$
2. Roma e Cartago, esta última uma cidade-Estado que estava localizada no golfo de Túnis, na atual Tunísia. Foram três Guerras Púnicas e, na terceira, ocorrida entre 149 e 146 a.C., Roma destruiu Cartago. Durante a Segunda Guerra Púnica (218-201 a.C.), Roma sitiou Siracusa, a cidade natal de Arquimedes, que se aliara a Cartago. Considerando a desproporção de forças, a tomada de Siracusa seria uma tarefa relativamente fácil para os romanos, não fosse a engenhosidade de Arquimedes. De fato, além de grande matemático, ele era inventor: criou vários artefatos de guerra que permitiram a Siracusa resistir ao cerco romano por quase 3 anos. No entanto, Siracusa acabou sendo invadida e, contra a vontade do comandante romano Marcelo, um dos soldados assassinou Arquimedes.
3. Respectivamente, terceira, segunda e primeira casas decimais.
4. Significa que π não pode ser expresso por um número na forma $\frac{p}{q}$ com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$.
5. Pelo procedimento egípcio, aproximadamente 3,16 km², e, pelo procedimento moderno, aproximadamente 3,14 km². Logo, a diferença das medidas de área é 0,02 km². Pelo procedimento egípcio, a medida de área obtida é aproximadamente 0,64% maior.
6. $p = 2\pi r \Rightarrow \frac{31}{2} = 4\pi \Rightarrow \pi = \frac{31}{8}$

Na Unidade

1. O lado do quadrado mede ℓ tal que $\ell^2 = 64$ cm²; então, $\ell = 8$ cm.
   O retângulo tem comprimento medindo $\ell + 2$ cm $= 10$ cm e largura medindo $\ell - 2$ cm $= 6$ cm.
   A área do retângulo mede $(10 \text{ cm}) \cdot (6 \text{ cm}) = 60$ cm². Logo, alternativa **a**.
2. $2 \cdot 6^2 + 2 \cdot \frac{3 \cdot 6}{2} = 2 \cdot 36 + 18 = 90$. Logo, alternativa **a**.
3. $AP = 0{,}25$ m
   $A_{clara} = 4 \cdot A_{APB} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}5}{2}\ \text{m}^2 = 0{,}25\ \text{m}^2$
   $A_{escura} = 1\ \text{m}^2 - 0{,}25\ \text{m}^2 = 0{,}75\ \text{m}^2$
   Custo: 0,75 · R$ 30,00 + 0,25 · R$ 50,00 = R$ 35,00
   Logo, alternativa **b**.
4. $d = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{13 \cdot 10}{2} = 65$. Logo, alternativa **c**.
5. A imagem não está representada com medidas reais.

   Os triângulos retângulos *APH*, *BQC*, *DRE* e *FSG* são congruentes entre si. Além disso, eles são isósceles com cateto medindo *x*, tal que $x^2 + x^2 = 1^2$. Então, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ dm.
   Cada lado do quadrado mede: $1 + 2x = 1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$.
   Então, a área mede: $(1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}$, em dm². Logo, alternativa **c**.
6.

   $$\left.\begin{array}{l}\beta = \frac{360°}{5} = 72° \\ 2\alpha + \beta = 180°\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha = 54°$$
   $\alpha + \beta = 54° + 72° = 126°$
   Logo, alternativa **a**.
7.

   $\frac{6 \cdot \ell^2\sqrt{3}}{4} = 10$
   $$\left.\begin{array}{l}h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \\ L = 2h\end{array}\right\} \Rightarrow L^2 = 4h^2 = 4\frac{\ell^2 \cdot 3}{4} = 3\ell^2$$
   $\frac{6 \cdot L^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6 \cdot 3\ell^2\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{6\ell^2\sqrt{3}}{4} = 3 \cdot 10 = 30$; ou seja, 30 cm².
   Outro modo:

   $2a + b = 10$
   $6a + 3b = 3(2a + b) = 3 \cdot 10 = 30$; ou seja, 30 cm².
   Logo, alternativa **b**.

Unidade 8

Abertura (p. 227)

1. As respostas poderão ser produzidas de duas maneiras.

a) Sem considerar as emendas, a medida do comprimento da chapa será proporcional à medida do diâmetro da base do silo; considerando uma proporção entre as medidas, um silo com medida de diâmetro de 2 metros poderá ser construído com uma chapa de aproximadamente 7 metros de medida do comprimento.

b) Por outro lado, se o estudante utilizar a relação entre a medida do comprimento de circunferência e a medida do diâmetro, ele fará $C = 2\pi r \simeq 6{,}3$ m. Logo, o comprimento da chapa medirá de 6 a 7 metros.

2. De acordo com a informação dada no texto, com uma chapa de 11 metros de medida de comprimento, um agricultor poderá construir um silo cuja base tem o formato de um círculo de 3 metros de medida do diâmetro ou de 1,5 metro de medida do raio. Nessas condições, a medida de área da base do silo será $\pi \cdot (1{,}5\text{ m})^2 \simeq 7\text{ m}^2$.

Capítulo 16

Atividades

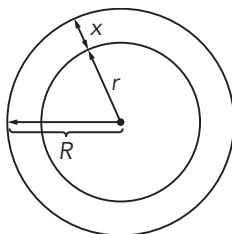
1. $3 \cdot C = 3 \cdot 2\pi r \simeq 6 \cdot 3{,}14 \cdot 40 \simeq 753{,}6$. Ela anda aproximadamente 753,6 m.

2. $C = 60 \cdot 8 = 480$ e $C = d\pi \Rightarrow d = \dfrac{C}{\pi} \Rightarrow d = \dfrac{480}{3{,}14} \Rightarrow d \simeq 152{,}9$.

O diâmetro deve medir aproximadamente 152,9 cm.

3. Em uma volta da roda, o carro percorre o comprimento da circunferência da roda, que é: $\pi \cdot (0{,}6)\text{ m} \simeq 3{,}14 \cdot 0{,}6\text{ m} \simeq 1{,}884$ m. Em um percurso de 60 km = 60 000 m, a roda dá $\dfrac{60\,000}{1{,}884} \simeq 31\,847$. Aproximadamente 31 847 voltas.

4. Seja x a medida da largura da pista, em que $x = R - r$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Cálculo de R:

$C = 2 \cdot \pi \cdot R = 1\,028 \Rightarrow R = \dfrac{1\,028}{2\pi}$

Cálculo de r:

$C = 2 \cdot \pi \cdot r = 965 \Rightarrow r = \dfrac{965}{2\pi}$

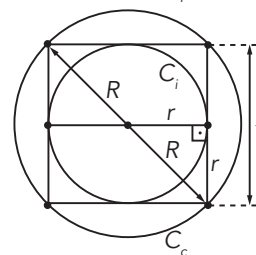
Cálculo de x:

$x = R - r = \dfrac{1\,028}{2\pi} - \dfrac{965}{2\pi} = \dfrac{63}{2\pi} = \dfrac{63}{6{,}28} \simeq 10$

Portanto, a largura da pista mede aproximadamente 10 m.

5. $C = 3r + 3r + 2\pi r = 6r + 2\pi r = (6 + 2\pi)r \simeq$
$\simeq (6 + 6{,}28) \cdot 40 = 491{,}2$. Logo, o comprimento da pista mede aproximadamente 491,2 m.

6. Cálculo da medida de comprimento C_i da circunferência inscrita:

Banco de imagens/Arquivo da editora

Como $\ell = 2$, temos $r = 1$:

$C_i = 2\pi r = 2\ \pi \cdot 1 \simeq 2 \cdot 3{,}14 = 6{,}28$; ou seja, aproximadamente 6,28 cm.

Cálculo da medida do comprimento C_c da circunferência circunscrita:

Da figura, temos que $R = r\sqrt{2} = 1\sqrt{2}$. Então:

$C_c = 2\pi R \simeq 2 \cdot 3{,}14 \cdot \sqrt{2} \simeq 6{,}28 \cdot \sqrt{2} \simeq 8{,}85$; ou seja, aproximadamente 8,85 cm.

7. $D = 2\pi \cdot R - 2\pi r = 2\pi \cdot (R - r) = 2\pi \cdot (1{,}5 - 1{,}0) =$
$= 2\pi \cdot 0{,}5 = \pi \simeq 3{,}14$; ou seja, aproximadamente 3,14 cm.

8. Medida de distância percorrida: $8\,000 \cdot 2\pi r = 16\,000 \cdot \pi \cdot 0{,}32 =$
$= 5\,120 \cdot 3{,}14 \simeq 16\,077$; ou seja, aproximadamente 16 077 m.

9. Medida de comprimento de cada roda: $C = 2\pi r = 2\pi \cdot 40 \simeq 251{,}2$; ou seja, aproximadamente 251,2 cm.

Número total de voltas: 2 600 000 cm : 251,2 cm ≃ 10 350; aproximadamente 10 350 voltas no total.

Número de voltas por minuto: 10 350 voltas : 1 h 50 min =
= 10 350 voltas : 110 min ≃ 94 voltas por minuto.

10. Quando o caminhão anda, as rodas dianteiras e as traseiras percorrem a mesma distância.

A medida de distância percorrida pelas rodas dianteiras, em 25 voltas, é calculada por: $25\pi \cdot 2 \cdot (50\text{ cm}) = 2\,500\pi$ cm.

Enquanto isso, as rodas traseiras percorrem a mesma distância dando apenas 20 voltas. Então, $2\,500\pi = 20\pi d$, em que d é a medida do diâmetro da roda traseira.

Portanto, $d = \dfrac{2\,500\text{ cm}}{20} = 125$ cm.

11. $x = \dfrac{75}{360} \cdot 2\pi \cdot 5 = \dfrac{75\pi}{36} = \dfrac{25\pi}{12} \simeq 6{,}5$; ou seja, aproximadamente 6,5 cm.

12. a) $x = \dfrac{90}{360} \cdot 2\pi \cdot 90 = \dfrac{90\pi}{2} = 45\pi \simeq 141{,}3$; ou seja, aproximadamente 141,3 cm.

b) $x = \dfrac{60}{360} \cdot 2\pi \cdot 90 = \dfrac{60\pi}{2} = 30\pi \simeq 94{,}2$; ou seja, aproximadamente 94,2 cm.

c) $x = \dfrac{72}{360} \cdot 2\pi \cdot 90 = \dfrac{72\pi}{2} = 36\pi \simeq 113{,}04$; ou seja, aproximadamente 113,04 cm.

13. Para um ângulo de medida 60°, temos, genericamente, que:

$\text{med}(\text{arco}) = \dfrac{60}{360} \cdot 2\pi \cdot r = \dfrac{\pi \cdot r}{3}$

Para $r = 3 + 2 + 4 = 9$, temos: $\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = \dfrac{\pi \cdot 9}{3} = 3\pi \simeq 9{,}42$; ou seja, aproximadamente 9,42 m.

Para $r = 2 + 4 = 6$, temos: $\text{med}(\overset{\frown}{CD}) = \dfrac{\pi \cdot 6}{3} = 2\pi \simeq 6{,}28$; ou seja, aproximadamente 6,28 m.

Para $r = 4$, temos: $\text{med}(\overset{\frown}{EF}) = \dfrac{\pi \cdot 4}{3} = \dfrac{4\pi}{3} \simeq 4{,}19$; ou seja, aproximadamente 4,19 m.

Total aproximado: 9,42 m + 6,28 m + 4,19 m = 19,89 m.

14. Medida de comprimento do arco: $\frac{\alpha \cdot \pi \cdot r}{180}$; então:

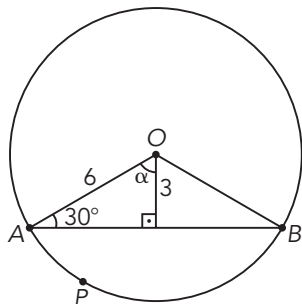
$$2\pi = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot 1{,}5}{180} \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi \cdot 180}{1{,}5\pi} \Rightarrow \alpha = \frac{360}{1{,}5} \Rightarrow \alpha = 240$$

O arco mede 240°.

15. a) Como a volta completa do ponteiro corresponde a 60 min, em 20 min o ponteiro andou $\frac{1}{3}$ da volta. Então, a distância percorrida mede: $\frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 12 = 8\pi \simeq 25{,}12$; ou seja, aproximadamente 25,12 cm.

b) Como 75 min = 60 min + 15 min, temos que 75 min corresponde a uma volta completa mais $\frac{1}{4}$ de volta. Então, a distância percorrida mede: $2\pi \cdot 12 + \frac{2\pi \cdot 12}{4} = 24\pi + 6\pi = 30\pi \simeq 94{,}2$; ou seja, aproximadamente 94,2 cm.

16. $x = \frac{\alpha\pi r}{180} \Rightarrow 50 = \frac{72\pi r}{180} \Rightarrow r = \frac{750}{6\pi} \Rightarrow r = \frac{125}{\pi} \Rightarrow r \simeq 39{,}81$; ou seja, aproximadamente 39,81 m.

17.

Banco de imagens/Arquivo da editora

$\alpha + 30° + 90° = 180° \Rightarrow \alpha = 60°$

$\text{med}(A\hat{O}B) = 2\alpha = 2 \cdot 60° = 120°$

Medida do arco $\overset{\frown}{APB}$: 120° (medida do menor arco desse círculo).

$\text{med(arco menor)} + \text{med(arco maior)} = 360° \Rightarrow 120° + \text{med(arco maior)} = 360° \Rightarrow$

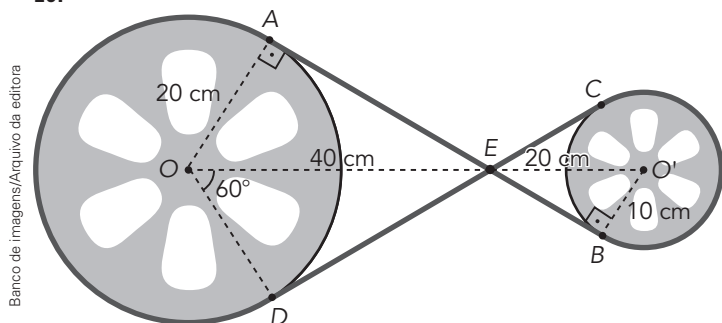
$\Rightarrow \text{med(arco maior)} = 240°$

Logo, a razão entre as medidas desses arcos é: $\frac{\text{med(arco maior)}}{\text{med(arco menor)}} = \frac{240°}{120°} = 2$, independentemente da medida (de comprimento ou angular).

18. As duas semicircunferências menores equivalem a uma circunferência de medida de comprimento $C_1 = 2\pi r = 2\pi \cdot 12$ cm $= 24\pi$ cm.
A semicircunferência maior tem raio medindo 24 cm e comprimento medindo:
$C_2 = \pi \cdot r = \pi \cdot 24$ cm $= 24\pi$ cm
O comprimento da linha cheia é igual à soma desses comprimentos, ou seja: $C_1 + C_2 = 24\pi + 24\pi = 48\pi \simeq 150{,}72$. Aproximadamente 150,72 cm.

19.

Banco de imagens/Arquivo da editora

$\triangle ODE \sim \triangle O'CE$:

$\frac{OE}{O'E} = \frac{20}{10} \Rightarrow OE = 2 \cdot O'E$

$OE + O'E = 60 \Rightarrow 2 \cdot O'E + O'E = 60 \Rightarrow O'E = 20$; ou seja, $O'E = 20$ cm e, então, $OE = 40$ cm.

Imaginando uma reta tangente que passa pelo ponto D, pela propriedade de Reta e circunferência tangentes, temos que toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio dessa circunferência no ponto de tangência. Assim: $\text{med}(O\hat{D}E) = 90°$.

Pelo caso especial: triângulos retângulos, $\triangle DOE \cong \triangle AOE$. Logo, $\text{med}(D\hat{O}E) = 60°$ e $\text{med}(A\hat{O}E) = 60°$. Desta maneira, temos que o maior arco definido por $\overset{\frown}{AD}$ mede $360° - 2 \cdot 60° = 240°$. E a medida de comprimento dele é dada por:

$C = \frac{\alpha\pi r}{180} = \frac{240\pi \cdot 20}{180} = \frac{80\pi}{3}$; ou seja, $\frac{80\pi}{3}$ cm.

O mesmo raciocínio vale para a roda menor: o maior arco definido por $\overset{\frown}{BC}$ também mede 240° e a medida de comprimento dele é metade da medida de comprimento do arco $\overset{\frown}{AD}$, portanto, $\frac{40\pi}{3}$ cm.

Cálculo da medida de $\overline{AE}$, em cm:

$(OE)^2 = (OA)^2 + (AE)^2 \Rightarrow 40^2 = 20^2 + (AE)^2 \Rightarrow 1\,600 = 400 + (AE)^2 \Rightarrow (AE)^2 = 1\,200 \Rightarrow AE = \sqrt{1\,200} \Rightarrow AE = 20\sqrt{3}$ (pois $AE > 0$)

Cálculo da medida de $\overline{BE}$, em cm:

$(O'E)^2 = (BE)^2 + (BO')^2 \Rightarrow 20^2 = (BE)^2 + 10^2 \Rightarrow 400 = (BE)^2 + 100 \Rightarrow (BE)^2 = 300 \Rightarrow BE = \sqrt{300} \Rightarrow BE = 10\sqrt{3}$ (pois $BE > 0$)

Cálculo da medida de comprimento total da corrente:

$C_{total} = 2(AE + BE) + C_{maior} + C_{menor} = 2 \cdot (20\sqrt{3} + 10\sqrt{3}) + \frac{80\pi}{3} + \frac{40\pi}{3} = 60\sqrt{3} + 40\pi = 20(3\sqrt{3} + 2\pi) \simeq 229$; ou seja, aproximadamente 229 cm ou 2,29 m.

Participe (p. 233)

I. $\alpha = \dfrac{\text{med}(\overset{\frown}{AOB})}{2} = \dfrac{120°}{2} = 60°$

II. a) $x = \dfrac{\text{med}(\overset{\frown}{MN})}{2} = \dfrac{180°}{2} = 90°$

b) A medida do ângulo inscrito em qualquer semicircunferência é sempre igual à metade do ângulo de 180°.

III. a) $\alpha = \dfrac{\text{med}(\overset{\frown}{AB})}{2} = \dfrac{80°}{2} = 40°$ e $\beta = \dfrac{\text{med}(\overset{\frown}{AB})}{2} = \dfrac{80°}{2} = 40°$.

b) Concluímos que ângulos inscritos determinados pelo mesmo arco têm a mesma medida angular, sendo, assim, congruentes.

20. a) $x = \dfrac{\text{med}(\overset{\frown}{AB})}{2} = \dfrac{64°}{2} = 32°$

b) $x = \text{med}(\overset{\frown}{AB}) = 120°$ e $y = \dfrac{\text{med}(\overset{\frown}{AB})}{2} = \dfrac{120°}{2} = 60°$.

c) $\text{med}(\overset{\frown}{AB}) = 2 \cdot 40° = 80°$

d) $\text{med}(\overset{\frown}{CD}) = 2 \cdot 30° = 60°$

$3x = \dfrac{\text{med}(\overset{\frown}{CD})}{2} \Rightarrow 3x = \dfrac{60°}{2} \Rightarrow 3x = 30° \Rightarrow x = 10°$

e) $\text{med}(\overset{\frown}{BC}) = 100° \Rightarrow 2x = \dfrac{\text{med}(\overset{\frown}{BC})}{2} \Rightarrow 2x = \dfrac{100°}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x = 50° \Rightarrow x = 25°$

f) $\text{med}(\overset{\frown}{BC}) = 88° \Rightarrow x = \dfrac{\text{med}(\overset{\frown}{BC})}{2} \Rightarrow x = \dfrac{88°}{2} \Rightarrow x = 44°$

21. $\text{med}(A\hat{P}B) = \dfrac{\text{med}(\overset{\frown}{AB})}{2} = \dfrac{170°}{2} = 85°$. A medida do ângulo de visão de Gabriela foi igual a 85°.

22. $x = 2 \cdot 46° = 92°$

23. Da figura, temos que a $\text{med}(A\hat{O}B) = 120°$, então todos os ângulos inscritos na circunferência que tenham os arcos correspondentes a ele medem 60°, portanto, $x = y = z = t = 60°$.

24. a) $A_{base} = \dfrac{10^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$

$V = A_{base} \cdot (\text{medida da altura}) = 25\sqrt{3} \cdot 5 = 125\sqrt{3}$

A medida de volume é $125\sqrt{3}$ cm³.

b) Há várias soluções possíveis. Pode ser pela divisão da base, transformando-a em quatro triângulos equiláteros semelhantes ao original, cujos lados são a metade da medida original, ou pode ser pela divisão da altura, dividindo-a em quatro segmentos de reta com um quarto da medida original.

25. a) O prisma tem 18 arestas, 12 vértices e 8 faces.

b) $A_{base} = 6 \cdot \dfrac{6^2\sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3}$; ou seja, $54\sqrt{3}$ cm².

$V = A_{base} \cdot h = 54\sqrt{3} \cdot 10 = 540\sqrt{3}$; ou seja, $540\sqrt{3}$ cm³.

26. $A_{base} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (10 \text{ cm})^2 = 100\pi \text{ cm}^2$

$V = A_{base} \cdot h = 100\pi \cdot 3 \text{ cm} = 300\,\pi \text{ cm}^3$

27. $V = A_{base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot (15 \text{ cm})^2 \cdot 40 \text{ cm} =$

$= \pi \cdot (1{,}5 \text{ dm})^2 \cdot 4 \text{ dm} = 9 \cdot \pi \text{ dm}^3 = 9 \cdot \pi \text{ L} \simeq 9 \cdot 3{,}14 \text{ L} \simeq 28 \text{ L}$

28. a) $V = A_{base} \cdot h \Rightarrow h = \dfrac{V}{\pi r^2} \Rightarrow h = \dfrac{100}{2{,}25\pi} \Rightarrow h \simeq 14$; ou seja, aproximadamente 14 cm.

b) Exemplo de resposta: A medida de volume de um cilindro é proporcional à medida da altura. Medindo, com uma régua, basta retirar uma medida de volume correspondente a $\dfrac{1}{4}$ da medida da altura do líquido no vidro. No caso, essa medida da altura é 3,5 cm.

29. $V_{lata} = 23 \text{ cm} \cdot 23 \text{ cm} \cdot 3{,}41 \text{ cm} \simeq 18\,000 \text{ cm}^3 = 18 \text{ L}$

$V_{galão} = \pi \cdot (8 \text{ cm})^2 \cdot 18 \text{ cm} \simeq 3\,600 \text{ cm}^3 = 3{,}6 \text{ L}$

Número de galões: $\dfrac{18 \text{ L}}{3{,}6 \text{ L}} = 5$; ou seja, 5 galões.

30. a) $a + \underbrace{(a+1)}_{b} + \underbrace{(a+2)}_{c} + \underbrace{(a+3)}_{d} = 18 \Rightarrow a = 3,\ b = 4,$ $c = 5,\ d = 6$ (pois $5^2 = 25$ e $3^2 + 4^2 = 25$), então, a base desse prisma é um triângulo retângulo cujos lados medem a, b e c.

b) $V = \dfrac{3 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm}}{2} \cdot 6 \text{ cm} = 36 \text{ cm}^3$

c) $A_{total} = 2 \cdot A_{base} + A_{lateral} = 2 \cdot 6 + (3 + 4 + 5) \cdot 6 =$

$= 12 + 72 = 84$; ou seja, 84 cm².

31. Sendo r a medida do raio da base do cilindro e h a medida da altura, temos:

$V_{cilindro} = \pi \cdot r^2 \cdot h$

$V_{prisma} = \left(\dfrac{2\pi r}{4}\right)^2 h = \dfrac{\pi^2}{4} r^2 h = \dfrac{\pi}{4} \cdot \pi r^2 h = \dfrac{\pi}{4} \cdot V_{cilindro}$

Como $\dfrac{\pi}{4} < 1$, temos $V_{prisma} < V_{cilindro}$, ou seja, a medida de volume do cilindro é maior do que a medida de volume do prisma.

32. Exemplo de resposta: Quanto tempo leva para encher uma caixa d'água com o formato de um bloco retangular cujas medidas das dimensões são 1 m × 1 m × 0,6 m, com uma torneira que despeja 30 litros de água por minuto? Resposta: 20 min.

33. Exemplo de resposta: Medida de volume do silo trincheiro: $5 \text{ m} \times 2 \text{ m} \times 1{,}5 \text{ m} = 15 \text{ m}^3$. O agricultor pode montar um silo cincho de dimensões medindo $r = 1{,}5$ m e altura medindo $h = 2{,}13$ m, pois a medida de volume do silo cincho é:

$\pi \cdot r^2 \cdot h \simeq 3{,}14 \cdot (1{,}5 \text{ m})^2 \cdot 2{,}13 \text{ m} \simeq 15 \text{ m}^3$.

Matemática e tecnologias

1. Exemplo de resposta: A medida do ângulo é sempre 45° porque é um ângulo inscrito na circunferência. Logo, a medida dele é a metade da medida do arco menor $\overset{\frown}{BC}$, que é 90°.

Capítulo 17

Participe (p. 242)

I. Exemplo de resposta: Ambos os sólidos geométricos têm vista laterais na forma triangular, mas os sólidos são diferentes: uma pirâmide e um cone. Como essas vistas são regiões poligonais, elas podem ser encontradas em diferentes sólidos geométricos.

II. O cubo, pois as 3 vistas são regiões poligonais quadradas; o cilindro, pois as 2 vistas laterais são regiões poligonais quadradas e vista superior é uma região circular.

III. Como as vistas são regiões planas, existem sólidos diferentes com vistas iguais. Por isso, para caracterizar um sólido geométrico usando suas vistas, é preciso que ele seja projetado em 3 planos não paralelos; em outras palavras, são necessárias 3 vistas ortogonais distintas e não paralelas.

Atividades

1. **A**-**I**; **B**-**III**; **C**-**II**.
2. As imagens não estão representadas com medidas reais.

E
D

Banco de imagens/Arquivo da editora

3. a)

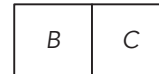
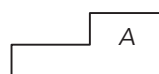
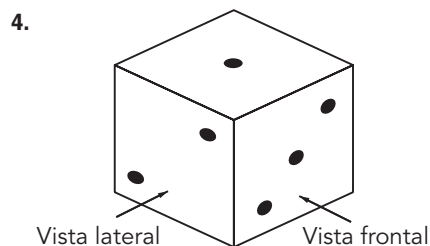
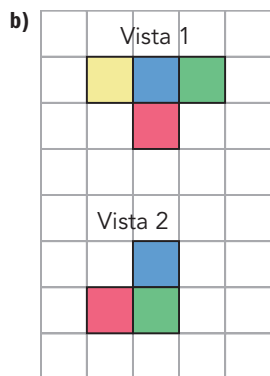
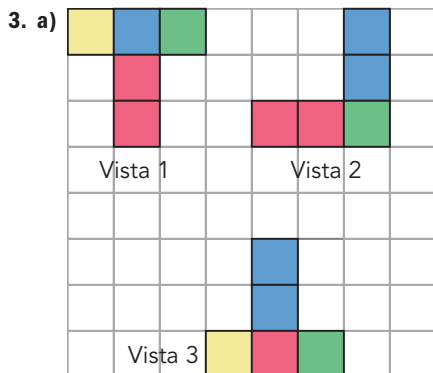
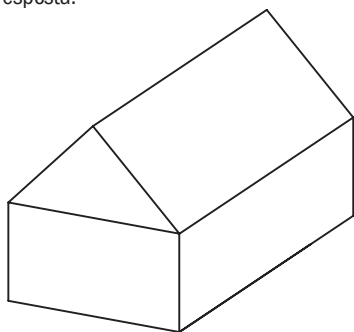
Banco de imagens/Arquivo da editora

b)

Banco de imagens/Arquivo da editora

4.

Banco de imagens/Arquivo da editora

5. Exemplo de resposta:

Banco de imagens/Arquivo da editora

Na Unidade

1. Medida de comprimento inicial: $2\pi r = 8 \Rightarrow r = \dfrac{4}{\pi}$.

Medida de comprimento final: $2\pi R = 14 \Rightarrow$

$\Rightarrow R = \dfrac{7}{\pi} = \dfrac{4}{\pi} + \dfrac{3}{\pi} \Rightarrow R = r + \dfrac{3}{\pi}$. Logo, alternativa **b**.

2. $\dfrac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 2 + \dfrac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 4 + \dfrac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 8 = \pi + 2\pi + 4\pi = 7\pi$.

Logo, alternativa **c**.

3. A medida de área da região destacada é a diferença entre a medida de área do triângulo equilátero (A) e a medida de área do setor circular (B). Temos:

$$A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$$

$$B = \frac{1}{6}\pi r^2 = \frac{1}{6}\pi 3^2 = \frac{9\pi}{6}$$

$$A - B = 9\sqrt{3}\ \text{cm}^2 - \frac{9\pi}{6}\ \text{cm}^2 = 9\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}\right)\text{cm}^2$$

Logo, alternativa **e**.

4. $8 \cdot 8 \cdot 5\ \text{cm}^3 - \pi(1{,}5\ \text{cm})^2 \cdot 5\ \text{cm} \simeq 320\ \text{cm}^3 - 35\ \text{cm}^3 = 285\ \text{cm}^3$.
Logo, alternativa **d**.

5. $A_{base} = 4 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2 = 12 + 6 + 8 = 26$; ou seja, 26 cm^2
$V_{prisma} = 26 \cdot 5 = 130$; ou seja, 130 cm^3.
Logo, alternativa **e**.

6. Medida de distância percorrida: $10 \cdot 2\pi r = 20 \cdot \pi \cdot 0{,}5 \simeq$
$\simeq 10 \cdot 3{,}14 = 31{,}4$; ou seja, aproximadamente 31,4 m.

7. $x = \dfrac{\alpha\pi r}{180} \Rightarrow 20 = \dfrac{80\pi r}{180} \Rightarrow 4\pi r = 180 \Rightarrow 2r = \dfrac{90}{\pi}$; ou seja, a medida de diâmetro é $\dfrac{90}{\pi}$ cm.

8. a) $A = \dfrac{40°}{360°} \cdot \pi \cdot 6^2 = \dfrac{36\pi}{9} = 4\pi$; ou seja, 4π m^2.

b) $A = \dfrac{70°}{360°} \cdot \pi \cdot 6^2 = \dfrac{70\pi}{10} = 7\pi$; ou seja, 7π m^2.

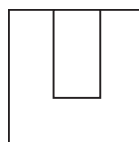
c) Cálculo de α: $\dfrac{2\pi \cdot 6}{10} = \dfrac{360°}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \dfrac{300°}{\pi}$

Cálculo de A: $A = \dfrac{\frac{300°}{\pi}}{360°} \cdot \pi \cdot 6^2 = \dfrac{300}{\pi} \cdot \dfrac{\pi}{10} = 30$; ou seja, 30 m^2.

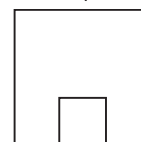
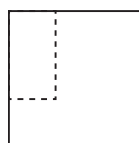
d) Cálculo de α: $\dfrac{2\pi \cdot 6}{6} = \dfrac{360°}{\alpha} \Rightarrow \alpha = \dfrac{180°}{\pi}$

Cálculo de A: $A = \dfrac{\frac{180°}{\pi}}{360°} \cdot \pi \cdot 6^2 = \dfrac{180}{\pi} \cdot \dfrac{\pi}{10} = 18$; ou seja, 18 m^2.

9. **A**-**III**; **B**-**I**; **C**-**II**.

10. Vista frontal:

Vista superior:

Vista lateral:

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Logo, alternativa **e**.

Unidade 9

Abertura (p. 249)

Respostas pessoais. Exemplos de respostas: As desvantagens para ambos podem estar relacionadas à segurança e, para os passageiros, ao preço mais elevado do que o cobrado em transportes públicos, por exemplo.

Capítulo 18

Atividades

1.

2. **a)** $A(5, 2)$; $B(2, 5)$; $C(-2, 5)$; $D(-5, 2)$; $E(-5, -2)$; $F(-2, -5)$; $G(2, -5)$; $H(5, -2)$.

b) $A(6, 0)$; $B(5, 3)$; $C(3, 5)$; $D(0, 6)$; $E(-3, 5)$; $F(-5, 3)$; $G(-6, 0)$; $H(-5, -3)$; $I(-3, -5)$; $J(0, -6)$; $K(3, -5)$; $L(5, -3)$.

3. **a)** G **b)** H **c)** D **d)** E

4. **a)** D **b)** K **c)** B **d)** L **e)** F **f)** B, C, D, E, F. **g)** H, I, J, K, L. **h)** A, G.

5. Não. Porque $AB = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ e $BC = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$, logo $AB \neq BC$.

6.

$AB = 4 - (-5) = 9$

$BC = 6 - (-3) = 9$

$CD = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

$DA = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$

7. $AB = 2 - (-1{,}2) = 3{,}2$

$BC = \sqrt{(0{,}8)^2 + 3^2} = \sqrt{9{,}64} \simeq 3{,}1$

$CA = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

$3{,}2 + 3{,}1 + 5 = 11{,}3$

A medida de perímetro é aproximadamente 11,3.

8. $AB = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$

$BC = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18}$

$CA = \sqrt{1^2 + 4^2} = \sqrt{17}$

O maior lado é $\overline{BC}$, então o maior ângulo é $\hat{A}$.

9. $x_M - (-5) = 4 - x_M \Rightarrow x_M = \dfrac{4 + (-5)}{2} = -0{,}5$

$y_M - 2 = 9 - y_M \Rightarrow y_M = \dfrac{9 + 2}{2} = 5{,}5$

Então, $M(-0{,}5; 5{,}5)$.

10. **a)** $x_M = \dfrac{3 + 7}{2} = 5$

$y_M = \dfrac{-1 + 5}{2} = 2$

Então, $M(5, 2)$.

b) $x_M = \dfrac{-2 + 2}{2} = 0$

$y_M = \dfrac{3 + (-3)}{2} = 0$

Então, $M(0, 0)$.

11. Para o lado $\overline{AB}$, temos:

$x_M = \dfrac{-2 + 7}{2} = \dfrac{5}{2}$

$y_M = \dfrac{5 + 0}{2} = \dfrac{5}{2}$

Então, $M_{\overline{AB}}\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{2}\right)$.

Para o lado $\overline{CA}$, temos:

$x_M = \dfrac{-2 + (-1)}{2} = -\dfrac{3}{2}$

$y_M = \dfrac{5 + (-9)}{2} = -2$

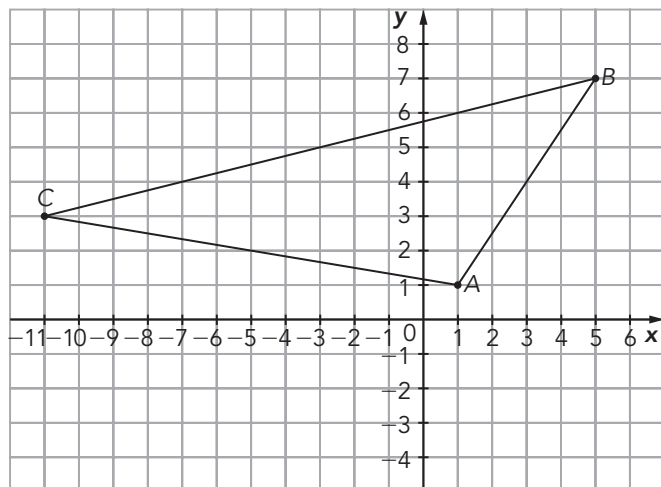
Então, $M_{\overline{CA}}\left(-\dfrac{3}{2}, -2\right)$.

Para o lado $\overline{BC}$, temos:

$x_M = \dfrac{7 + (-1)}{2} = 3$

$y_M = \dfrac{0 + (-9)}{2} = -\dfrac{9}{2}$

Então, $M_{\overline{BC}}\left(3, -\dfrac{9}{2}\right)$.

12.

O ponto médio do lado $\overline{BC}$ é dado por:

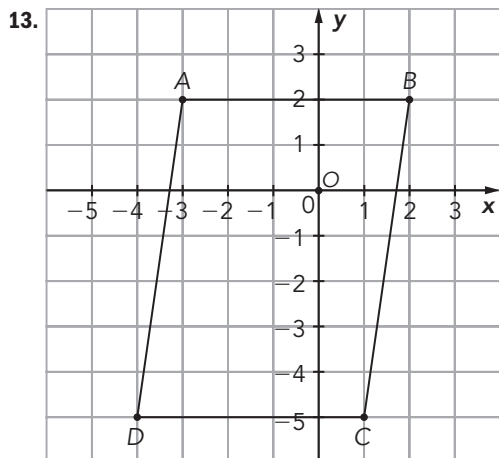
$x_M = \dfrac{5 + (-11)}{2} = -3$ $\qquad y_M = \dfrac{7 + 3}{2} = 5$

Então, $M(-3, 5)$.

A medida da mediana $\overline{AM}$ é dada pela medida de distância entre os pontos $A(1, 1)$ e $M(-3, 5)$.

$AM = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$

13.

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Em todo paralelogramo, as diagonais se cruzam no ponto médio de cada uma. Para a diagonal $\overline{AC}$, temos:

$$x_M = \frac{-3 + 1}{2} = -1$$

$$y_M = \frac{2 + (-5)}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$M\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$$

Confirmando, para a diagonal $\overline{BD}$, temos:

$$x_M = \frac{2 + (-4)}{2} = -1$$

$$y_M = \frac{2 + (-5)}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$M\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$$

As diagonais cruzam-se no ponto $M\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$.

b) $AB = CD = x_C - x_D = 1 - (-4) = 5$

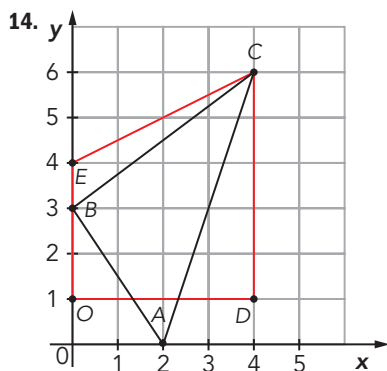
$BC = DA = \sqrt{1^2 + 7^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

O perímetro mede:

$5 + 5\sqrt{2} + 5 + 5\sqrt{2} = 10 + 10\sqrt{2}$

c) A medida de área é o produto das medidas da base e da altura: $5 \cdot 7 = 35$.

14.

Banco de imagens/Arquivo da editora

$A_{\triangle ABC} = A_{\text{trapézio } BODC} - A_{\triangle ABO} - A_{\triangle ACD}$

$$A_{\text{trapézio } BODC} = \frac{4 \cdot (4 + 6)}{2} = 20$$

$$A_{\triangle ABO} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4$$

$$A_{\triangle ACD} = \frac{2 \cdot 6}{2} = 6$$

Logo, $A_{\triangle ABC} = 20 - 4 - 6 = 10$.

Há outro modo de expressar a medida de área pedida:

$A_{\triangle ABC} = A_{\text{trapézio } ACEO} - A_{\triangle ABO} - A_{\triangle BCE}$

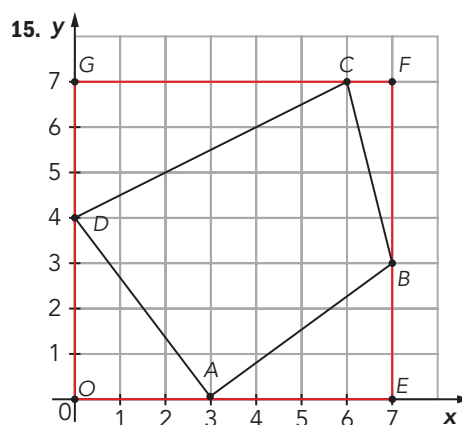
$$A_{\text{trapézio } ACEO} = \frac{(4 + 2) \cdot 6}{2} = 18$$

$$A_{\triangle ABO} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4$$

$$A_{\triangle BCE} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4$$

Logo, $A_{\triangle ABC} = 18 - 4 - 4 = 10$.

15.

Banco de imagens/Arquivo da editora

$A_{\text{quadrilátero } ABCD} = A_{\text{quadrilátero } OEFG} - A_{\triangle OAD} - A_{\triangle AEB} - A_{\triangle BFC} - A_{\triangle CGD} =$

$$= 7 \cdot 7 - \frac{3 \cdot 4}{2} - \frac{4 \cdot 3}{2} - \frac{4 \cdot 1}{2} - \frac{6 \cdot 3}{2} =$$

$$= 49 - 6 - 6 - 2 - 9 = 26$$

Capítulo 19

Atividades

1. a)
- $11 \cdot 5 = 55$; ou seja, 55 pontos.
- $14 \cdot 5 = 70$; ou seja, 70 pontos.
- $x \cdot 5 = 5x$; ou seja, $5x$ pontos.

b) Sim. A cada x corresponde uma única nota y.

2. a) 5 cópias: $5 \cdot$ R\$ 0,25 = R\$ 1,25;
20 cópias: R\$ 2,50 + $10 \cdot$ R\$ 0,20 = R\$ 4,50.

b) 50 cópias: R\$ 2,50 + $40 \cdot$ R\$ 0,20. Preço médio da cópia:

$\frac{\text{R\$ } 10{,}50}{50}$ = R\$ 0,21. Pagará, em média, R\$ 0,21 por cópia.

3. a) $100 \cdot 2 = 200$. Percorrerá 200 km.

b) $y = 100 \cdot x$

c) Como 90 min = 1,5 h, temos: $y = 100 \cdot x = 100 \cdot 1{,}5 = 150$. Percorrerá 150 km.

4. a)

Nº de acertadores	1	2	5	8	20	40
Prêmio de cada um (em R$)	1.200,00	600,00	240,00	150,00	60,00	30,00

b) Do número de acertadores.

c) Exemplo de resposta: p: prêmio (em R\$); n: nº de acertadores; $p = \frac{1\,200}{n}$.

5. Exemplo de respostas: Sendo ℓ a medida do lado e A a medida de área do quadrado, temos:

a) $A = \ell^2$

b) $\ell = \sqrt{A}$

c) $\ell = \sqrt{20}\ \text{cm}^2 \Rightarrow \ell = 2\sqrt{5}$ cm

6. a) $2 \cdot 15 + 5y = 10 \Rightarrow 5y = -20 \Rightarrow y = -4$

b) $2x + 5 \cdot 20 = 10 \Rightarrow 2x = -90 \Rightarrow x = -45$

c) $5y = 10 - 2x \Rightarrow y = \frac{10 - 2x}{5}$

d) $2x = 10 - 5y \Rightarrow x = \frac{10 - 5y}{2}$

7. a) $8^2 + y^2 = 100 \Rightarrow y^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow y = 6$ ou $y = -6$

b) Não. Existe valor de x (por exemplo, 8) para o qual correspondem 2 valores de y.

8. a) Sim. A cada x corresponde um único y.

b) Não. Quando $y = 9$, por exemplo, temos $x = 3$ ou $x = -3$. Então, há valor de y para o qual correspondem 2 valores de x.

9. $f(x) = 10x^2 + 1\,000x$

a) $f(10) = 10 \cdot 10^2 + 1\,000 \cdot 10 = 1\,000 + 10\,000 = 11\,000$

Percorre 11 000 m = 11 km.

b) $f(60) = 10 \cdot 60^2 + 1\,000 \cdot 60 = 36\,000 + 60\,000 = 96\,000$

Percorre 96 000 m = 96 km.

É a medida de distância percorrida em 60 min = 1 h.

c) $200\,000 = 10 \cdot x^2 + 1\,000 \cdot x \Rightarrow x^2 + 100x - 20\,000 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = -200$ ou $x = 100$.

Como $x \geqslant 0$, temos $x = 100$, isto é, levará 100 min (ou 1 h 40 min) para percorrer 200 km.

10. a) $f(15) = (0{,}10) \cdot 15 = 1{,}5$. O volume mede 1,5 L.

b) $f(10) = (0{,}10) \cdot 10 = 1$; ou seja, 1 L. Representa medida de volume (que é 1 L) quando a medida da altura da água é 10 cm.

c) $2 = 0{,}10 \cdot x \Rightarrow x = 20$. A altura medirá 20 cm.

11. a) $f(-2) = \frac{1}{-2 + 1} = -1$

b) $f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{\frac{3}{5} + 1} = \frac{1}{\frac{3 + 5}{5}} = \frac{1}{\frac{8}{5}} = \frac{5}{8}$

c) $f(\sqrt{3}) = \frac{1}{\sqrt{3} + 1} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{3 - 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$

d) $f(-1) = \frac{1}{-1 + 1} = \frac{1}{0}$; então $f(-1)$ não existe.

12. a) Se o diâmetro mede 24 cm, então, o raio mede 12 cm. Assim:

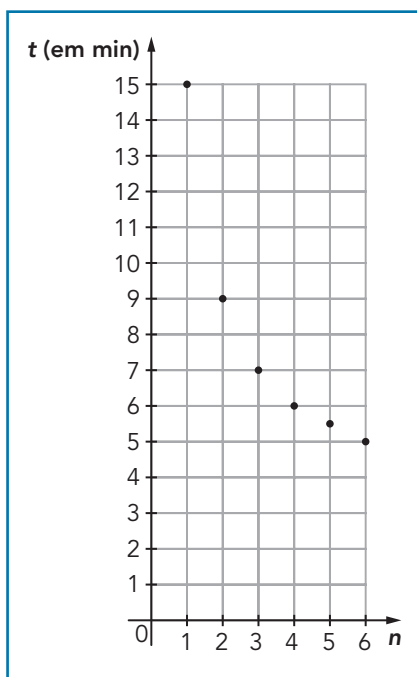
$V(12) = \frac{4}{3}\pi \cdot 12^3 = 2\,304\pi$, em cm³.

Usando $\pi = 3$, temos a medida de volume aproximada de 6 900 cm³; ou seja, aproximadamente 6,9 L.

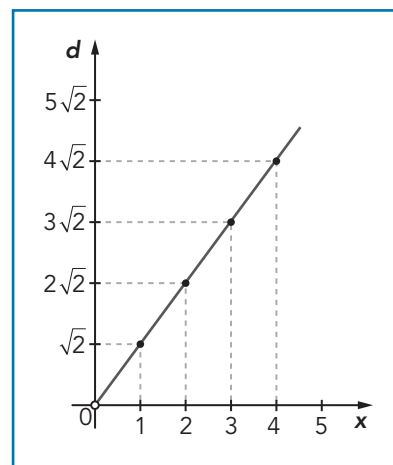
b) $V(3) = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi$, em cm³.

A medida de volume de 36π cm³ representa a medida de volume da bola de raio medindo 3 cm.

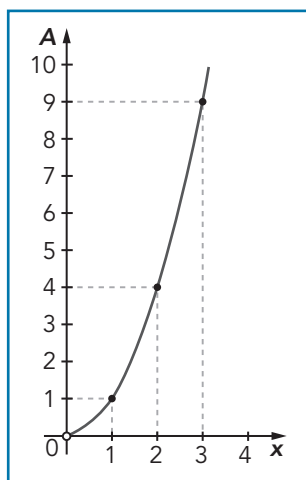
13.

n	$t = 3 + \frac{12}{n}$
1	$3 + \frac{12}{1} = 15$
2	$3 + \frac{12}{2} = 9$
3	$3 + \frac{12}{3} = 7$
4	$3 + \frac{12}{4} = 6$
5	$3 + \frac{12}{5} = \frac{27}{5} = 5{,}4$
6	$3 + \frac{12}{6} = 5$

Banco de imagens/Arquivo da editora

14. Como $d = x\sqrt{2}$, temos:

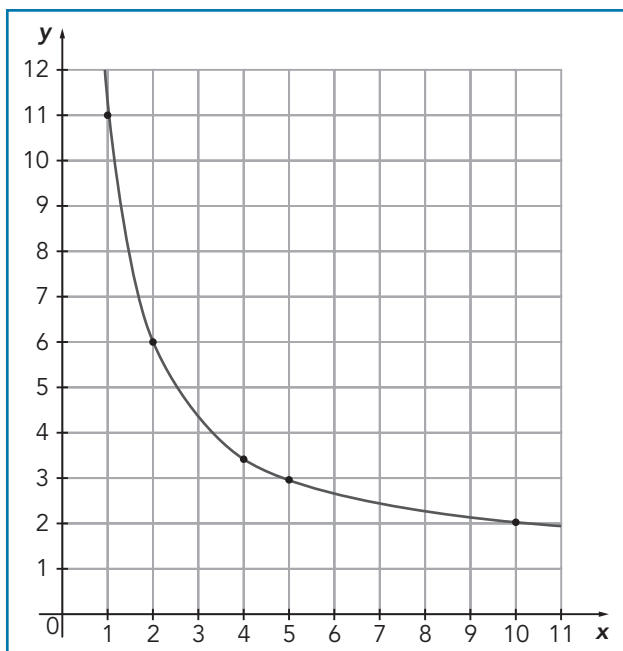
x	$d = x\sqrt{2}$
1	$\sqrt{2}$
2	$2\sqrt{2}$
3	$3\sqrt{2}$
4	$4\sqrt{2}$

Banco de imagens/Arquivo da editora

Como $A(x) = x^2$, temos:

x	$A(x) = x^2$
1	1
2	4
3	9
4	16

Banco de imagens/Arquivo da editora

15. a) $xy - x = 10 \Rightarrow xy = 10 + x \Rightarrow y = \frac{10 + x}{x}$, para $x > 0$.

b)

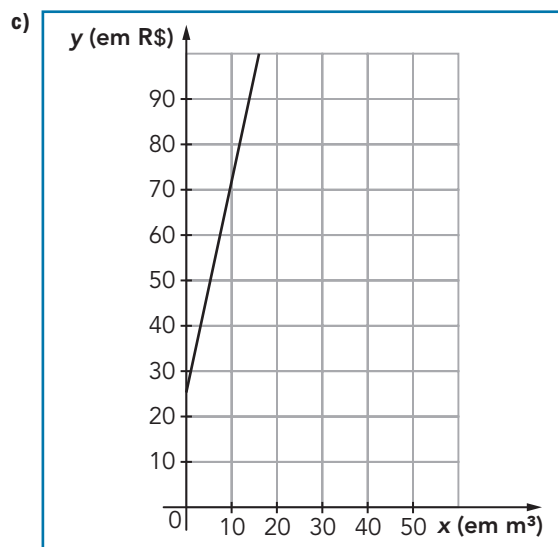
x	$y = \frac{10 + x}{x}$
1	$\frac{10 + 1}{1} = 11$
2	$\frac{10 + 2}{2} = 6$
4	$\frac{10 + 4}{4} = \frac{7}{2} = 3{,}5$
5	$\frac{10 + 5}{5} = 3$
10	$\frac{10 + 10}{10} = 2$

Banco de imagens/Arquivo da editora

16. Para resolver esta atividade, basta analisar o gráfico, encontrar no eixo x (eixo das abscissas) o valor correspondente à idade dada em cada item e localizar no gráfico o ponto com o valor do x. O valor de y (eixo das ordenadas) de cada um desses pontos é a medida de massa correspondente à idade de cada item. Assim, temos:

a) 20 kg **b)** 40 kg **c)** 60 kg **d)** 70 kg

17. a) O consumo de 20 m³ representa o consumo mínimo de 10 m³, que custa R$ 25,00, e um adicional de mais 10 m³, a um custo de R$ 3,91 por m³, o que implica num gasto de R$ 25,00 + 10 · R$ 3,91 = = R$ 64,10.

b) Em um mês em que o consumo excede o mínimo em x m³, sendo y o valor mensal a pagar, em reais, temos: $y = 25 + 3{,}91x$.

c)

Banco de imagens/Arquivo da editora

d) $y = 25 + 3{,}91x \Rightarrow 71{,}92 = 25 + 3{,}91x \Rightarrow x = 12$

Como o consumo excedido do mínimo (10 m³) foi de 12 m³, o consumo total nesse mês foi de 22 m³.

18. Considerando x a quantidade de quilômetros percorridos e y o valor pago para percorrer x quilômetros, temos:

$y = 5 + 0{,}75x \Rightarrow 11{,}15 = 5 + 0{,}75x \Rightarrow 11{,}15 - 5 = 0{,}75x \Rightarrow$ $\Rightarrow 0{,}75x = 6{,}15 \Rightarrow x = 6{,}15 : 0{,}75 \Rightarrow x = 8{,}2$; ou seja, 8,2 km percorridos diariamente por Joana.

Como no dia do engarrafamento, cada quilômetro percorrido passou a custar 1,64, temos:

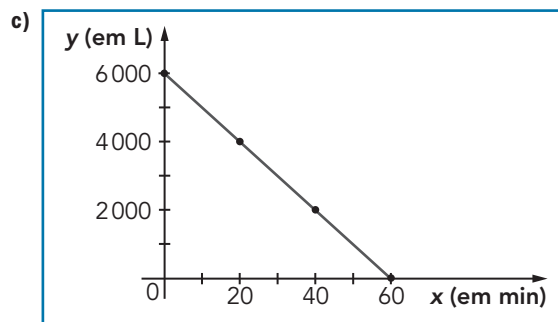
$y = 5 + 1{,}64x \Rightarrow y = 5 + 1{,}64 \cdot 8{,}2 \Rightarrow y \simeq 5 + 13{,}45 \Rightarrow y = 18{,}45$

O valor a pagar é, aproximadamente, R$ 18,45.

19. a) $y = 6\,000 - 100x$, para $0 \leqslant x \leqslant 60$.

b) Exemplo de resposta:

x	$y = 6\,000 - 100x$
0	$6\,000 - 100 \cdot 0 = 6\,000$
20	$6\,000 - 100 \cdot 20 = 4\,000$
40	$6\,000 - 100 \cdot 40 = 2\,000$
60	$6\,000 - 100 \cdot 60 = 0$

c)

Banco de imagens/Arquivo da editora

20. a) $y = 100\,000 + 50x$

b) $y = 100\,000 + 50 \cdot 10\,000 = 100\,000 + 500\,000 = 600\,000$

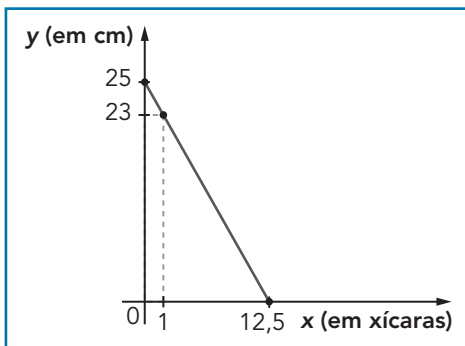
O custo é de R$ 600.000,00.

c) Sendo V o preço de venda, em reais, de cada unidade produzida, temos: $10\,000V - 600\,000 = 500\,000 \Rightarrow 10\,000V = 1\,100\,000 \Rightarrow$
$\Rightarrow V = 110$
O preço de venda de cada unidade deverá ser de R$ 110,00.

21. a) $y = 25 - 2x$, para $0 \leqslant x \leqslant 12{,}5$.

b)

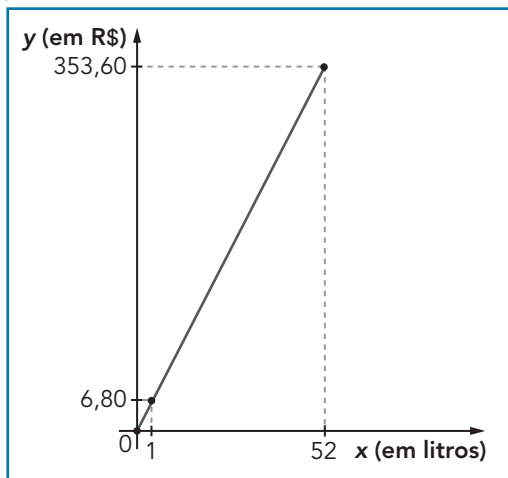
x	$y = 25 - 2x$
0	$25 - 2 \cdot 0 = 25$
1	$25 - 2 \cdot 1 = 23$
12,5	$25 - 2 \cdot 12{,}5 = 0$

Banco de imagens/Arquivo da editora

c) -2 cm/xícara

22. a) $52 \cdot 6{,}80 = 353{,}60$. O valor que se paga é R$ 353,60.

b) $y = 6{,}80 \cdot x$, para $0 \leqslant x \leqslant 52$.

c)

Banco de imagens/Arquivo da editora

d) 6,80 R$/L

23. a) $y = 0{,}68 \cdot x$

b) Sim. A razão $\dfrac{\text{custo}}{\text{medida de distância}}$ é constante.

24. a) **I**, **II**, **V**, **VI**.

b) **III**, **IV**.

c) Notamos que:

Tabela **I**:
$\dfrac{11}{1} \neq \dfrac{12}{2} \neq \dfrac{13}{3} \dots$

Tabela **II**:
$\dfrac{10}{1} = \dfrac{20}{2} = \dfrac{30}{3} \dots$

Tabela **III**:
$\dfrac{10}{1} \neq \dfrac{5}{2} \neq \dfrac{2{,}5}{4} \dots$

Tabela **IV**:
$\dfrac{8}{1} \neq \dfrac{7}{2} \neq \dfrac{6}{3} \dots$

Tabela **V**:
$\dfrac{0{,}1}{1} = \dfrac{0{,}2}{2} = \dfrac{0{,}3}{3} \dots$

Tabela **VI**:
$\dfrac{0{,}5}{1} \neq \dfrac{1{,}5}{2} \neq \dfrac{2{,}5}{3} \dots$

Portanto, y é proporcional a x nas funções **II** e **V**.

25. a) $d = (0{,}12)x$

b) $v = (1{,}00 - 0{,}12) \cdot x \Rightarrow v = (0{,}88)x$

c) Sim, pois as funções são do tipo $y = kx$, em que k é uma constante.

26. Na tabela **III** o produto xy é constante igual a 10, logo y é inversamente proporcional a x. A função da tabela **IV** é decrescente, mas o produto xy não é constante ($1 \cdot 8 \neq 2 \cdot 7$), logo y não é inversamente proporcional a x.

27. a) Dobrando x, y dobra; triplicando x, y triplica; e assim por diante. Portanto, y é diretamente proporcional a x e a função é crescente.

b) O produto np é constante igual a 1. Portanto, n é inversamente proporcional a p. Aumentando a medida de perímetro p, o número n de voltas diminui; logo, a função é decrescente.

28. a) Aumentando a medida x do ângulo aumenta a medida y de massa da fatia, logo y é função crescente de x.

b) Aumentando o número n de fatias, a medida y de massa da fatia diminui, logo y é função decrescente de n.

c) Em **a**, dobrando x, y dobra; triplicando x, y triplica, etc. y é diretamente proporcional a x.
Em **b**, o produto ny é constante, igual à massa do queijo. Então, y é inversamente proporcional a n.

29. De 2005 a 2010, o valor sofreu um aumento de R$ 600,00 (em 5 anos), portanto, R$ 120,00 por ano. Logo, o custo em 2025, 20 anos depois de 2005, será de R$ 3.600,00, pois $1\,200 + 20 \cdot 120 =$
$= 1\,200 + 2\,400 = 3\,600$.

30. Sendo x o valor, em reais, daqui a 5 anos, como a taxa de variação da função afim é constante, temos:
$$\frac{20\,000 - 15\,200}{2} = \frac{15\,200 - x}{5} \Rightarrow \frac{4\,800}{2} = \frac{15\,200 - x}{5} \Rightarrow$$
$\Rightarrow 2\,400 \cdot 5 = 15\,200 - x \Rightarrow x = 15\,200 - 12\,000 \Rightarrow x = 3\,200$
Daqui a 5 anos, a máquina valerá R$ 3.200,00.

Na mídia

1. a) $y = 0{,}03x$

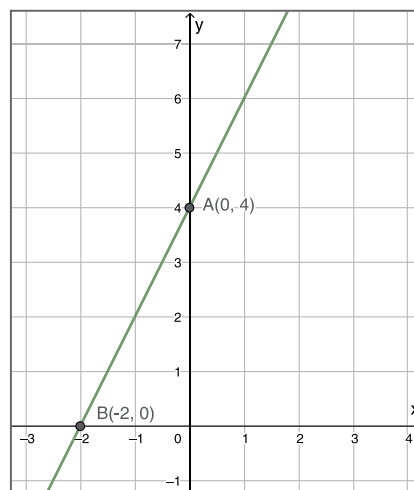
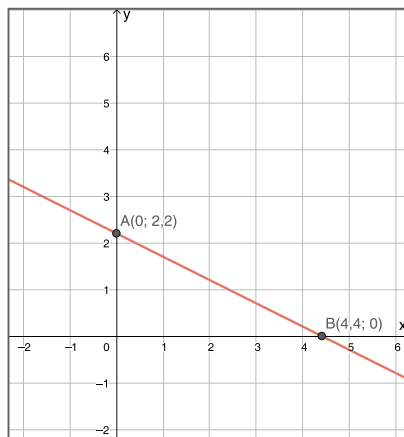
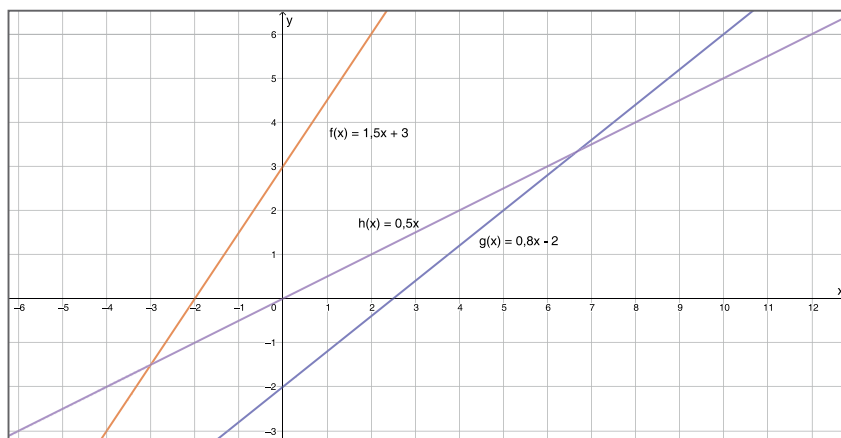
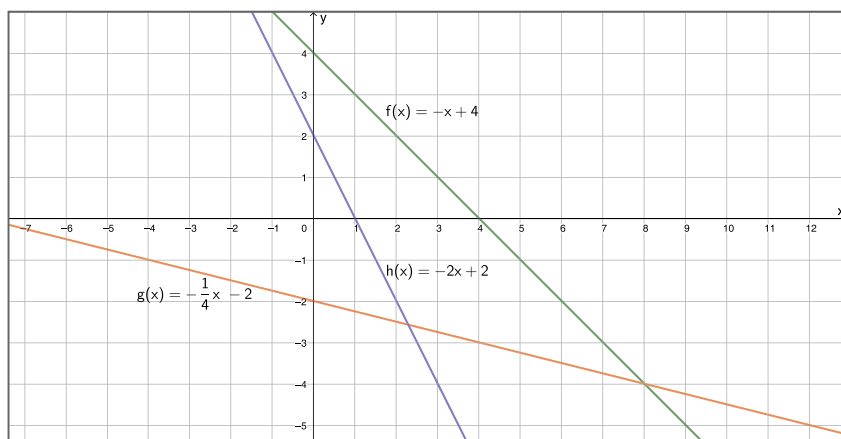
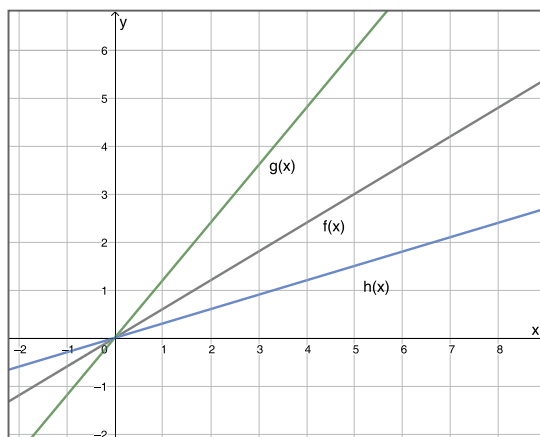
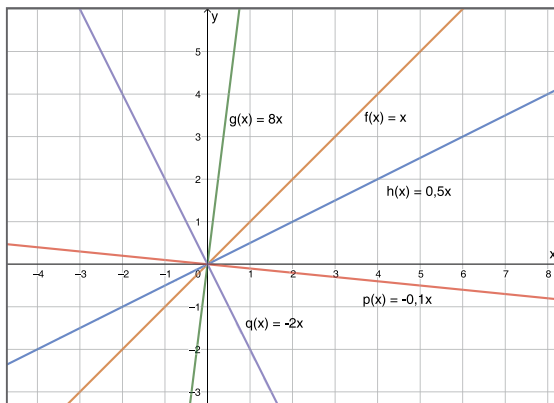
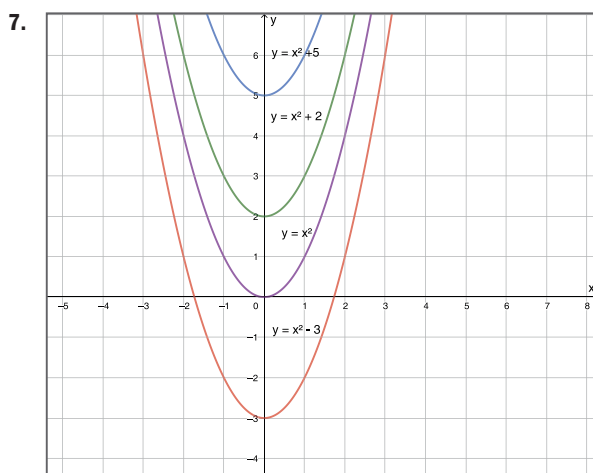
b) A função $y = 0{,}03x$ indica que y é diretamente proporcional a x. Quanto maior a medida de massa de uma pessoa, proporcionalmente maior será a quantidade de água recomendada para que ela beba por dia. Por exemplo, dobrando a medida de massa, dobra a quantidade de água.

c) $y = 0{,}03 \cdot 75 \Rightarrow y = 2{,}25$; ou seja, 2,25 litros.

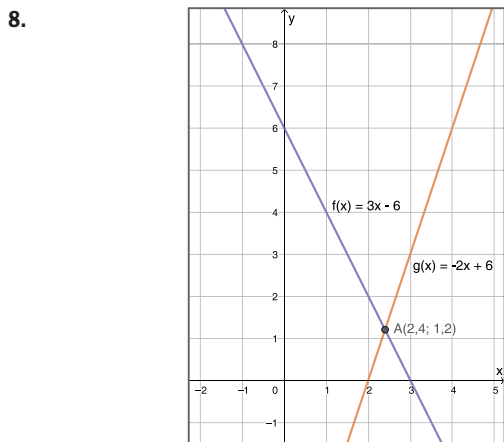
2. $y = 0{,}03 \cdot 82 \Rightarrow y = 2{,}46$; $2{,}46 : 2 = 1{,}23$; ou seja, 1,23 litro.

Matemática e tecnologias

1. Os pontos de intersecção com os eixos y e x são, respectivamente, $(0, 4)$ e $(-2, 0)$.

Reprodução/GeoGebra.org

2. Os pontos de intersecção com os eixos y e x são, respectivamente, $(0; 2{,}2)$ e $(4{,}4; 0)$.

3. Exemplo de resposta: Os gráficos são retas; as funções são crescentes.

4. Exemplo de resposta: Os gráficos são retas; as funções são decrescentes.

5. Ao multiplicar por 2, as ordenadas dos pontos do gráfico dobram; ao dividir por 2, ficam reduzidas à metade.

6. Resposta pessoal. Espera-se que formem funções do tipo $y = ax$, com a tomando 5 valores diferentes. As funções escolhidas podem ser, por exemplo, as que estão representadas no gráfico a seguir.

7.

O gráfico desloca-se, respectivamente, 2 unidades para cima, 5 unidades para cima e 3 unidades para baixo.

8.

O valor de x para que se tenha $f(x) = g(x)$ é $x = 2,4$.

Na Unidade

1. $f(1) = 1 = 2 \cdot 1 - 1$

$f(2) = 3 = 2 \cdot 2 - 1$

$f(3) = 5 = 2 \cdot 3 - 1$

$f(n) = 2n - 1$

Logo, alternativa **d**.

2. $f(m + n) - f(m - n) = (m + n)^2 - (m - n)^2 =$
$= m^2 + 2mn + n^2 - (m^2 - 2mn + n^2) =$
$= m^2 + 2mn + n^2 - m^2 + 2mn - n^2 = 4mn$

Logo, alternativa **c**.

3. **a)** $A(0, 15)$; $B(20, 9)$; $C(10, 0)$; $D(0, 3)$.

b) $AB = \sqrt{20^2 + 6^2} = \sqrt{400 + 36} = \sqrt{436} = \sqrt{2^2 \cdot 109} =$
$= 2\sqrt{109}$

$BC = \sqrt{10^2 + 9^2} = \sqrt{100 + 81} = \sqrt{181}$

$CD = \sqrt{10^2 + 3^2} = \sqrt{100 + 9} = \sqrt{109}$

$DA = 15 - 3 = 12$

c) $\left.\begin{array}{l} x_M - 0 = 20 - x_M \Rightarrow 2x_M = 20 \Rightarrow x_M = 10 \\ y_M - 9 = 15 - y_M \Rightarrow 2y_M = 24 \Rightarrow y_M = 12 \end{array}\right\} M_{\overline{AB}}(10, 12)$

$\left.\begin{array}{l} x_M - 10 = 20 - x_M \Rightarrow 2x_M = 30 \Rightarrow x_M = 15 \\ y_M - 0 = 9 - y_M \Rightarrow 2y_M = 9 \Rightarrow y_M = 4,5 \end{array}\right\} M_{\overline{BC}}(15; 4,5)$

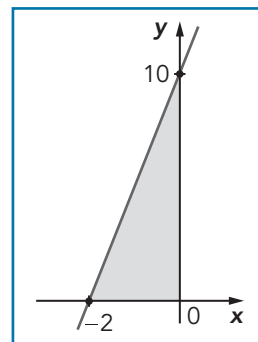
$\left.\begin{array}{l} x_M - 0 = 10 - x_M \Rightarrow 2x_M = 10 \Rightarrow x_M = 5 \\ y_M - 0 = 3 - y_M \Rightarrow 2y_M = 3 \Rightarrow y_M = 1,5 \end{array}\right\} M_{\overline{CD}}(5; 1,5)$

$\left.\begin{array}{l} x_M = 0 \\ y_M - 3 = 15 - y_M \Rightarrow 2y_M = 18 \Rightarrow y_M = 9 \end{array}\right\} M_{\overline{AD}}(0, 9)$

4. Cada 5 bolas inseridas acarretam acréscimo de 0,35 cm de altura do nível da água. Então, se retirássemos todas as bolas ($x = 0$), teríamos o nível 6,35 cm − 0,35 cm = 6 cm.

Como $\frac{0,35}{5} = 0,07$, para acréscimo de 1 bola, o nível sobe 0,07 cm (taxa de variação de y por unidade de variação de x). A função é $y = 0,07x + 6$. Logo, alternativa **e**.

5. Trace um segmento de reta paralelo ao eixo x, pelo ponto de ordenada 30 do eixo y. O gráfico que ela intersecta "mais à direita" é o de C. Isso implica que a proposta **C** é a que dá mais tempo de chamadas para o valor R$ 30,00. Logo, alternativa **c**.

6. O gráfico da função intersecta os eixos coordenados nos pontos $(0, 10)$ e $(-2, 0)$, conforme a figura.

A medida de área do triângulo é: $\frac{2 \cdot 10}{2} = 10$. Logo, alternativa **a**.

7. Por semelhança de triângulos: $\frac{k}{2} = \frac{10}{3} \Rightarrow k = \frac{20}{3} \Rightarrow k = 6\frac{2}{3}$.
Logo, alternativa **c**.

8. Como a função é crescente, $a > 0$. Como o gráfico intersecta o eixo y em um valor negativo, $b < 0$. Logo, alternativa **b**.

9. O gráfico representa uma função linear crescente, o que significa que as grandezas distância e tempo são diretamente proporcionais. Note que $d = 70t$ (d em metros e t em horas). Logo, alternativa **c**.

10. y é inversamente proporcional a x quando $y \cdot x$ é constante, o que ocorre somente em $y = \frac{2}{x}$. Logo, alternativa **c**.

MATEMÁTICA E REALIDADE

Gelson **IEZZI**
Osvaldo **DOLCE**
Antonio **MACHADO**

Componente curricular: Matemática
Ensino Fundamental – Anos Finais

Gelson Iezzi

Licenciado em Matemática pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP)

Engenheiro metalúrgico pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (Poli-USP)

Atuou como professor da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)

Atuou como professor do Ensino Médio na rede particular de ensino

Autor de materiais didáticos de Matemática para o Ensino Fundamental e o Ensino Médio

Osvaldo Dolce

Engenheiro civil pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (Poli-USP)

Atuou como professor dos Anos Finais do Ensino Fundamental na rede pública de ensino e de cursos pré-vestibulares na rede particular de ensino

Autor de materiais didáticos de Matemática para o Ensino Fundamental e o Ensino Médio

Antonio Machado

Mestre em Estatística pelo Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP)

Licenciado em Matemática pelo IME-USP

Atuou como professor do Ensino Superior no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP)

Atuou como professor do Ensino Médio na rede particular de ensino

Autor de materiais didáticos de Matemática para o Ensino Fundamental e o Ensino Médio

10ª edição, São Paulo, 2022

Direção executiva: Flávia Bravin
Direção de negócio: Volnei Korzenieski
Gestão editorial: Alice Ribeiro Silvestre
Gestão de planejamento: Eduardo Kruel Rodrigues
Gestão de projeto digital: Tatiany Renó
Gestão de área: Rodrigo Pessota
Coordenação de área: Pamela Hellebrekers Seravalli
Edição: Igor Nóbrega, Valéria Elvira Prete, Daniela Benites e Gabriela Barbosa da Silva (editores), Tainara Figueiredo Dias e Marcio Vieira de Almeida (assist.), Rogério Fernandes Cantelli e Nadili L. Ribeiro (digital)
Planejamento e controle de produção: Vilma Rossi, Camila Cunha, Adriana Souza e Isabela Salustriano
Revisão: Mariana Braga de Milani (ger.), Alexandra Costa da Fonseca, Ana Paula C. Malfa, Carlos Eduardo Sigrist, Flavia S. Venezio e Sueli Bossi
Arte: Claudio Faustino (ger.), Erika Tiemi Yamauchi (coord.), Patricia Mayumi Ishihara (edição de arte), FyB Arquitetura e Design (diagramação)
Iconografia e tratamento de imagens: Roberto Silva (ger.), Claudia Balista e Alessandra Pereira (pesquisa iconográfica), Emerson de Lima (tratamento de imagens)
Direitos autorais: Fernanda Carvalho (coord.), Emília Yamada, Erika Ramires e Carolyne Ribeiro (analistas adm.)
Licenciamento de conteúdos de terceiros: Erika Ramires e Tempo Composto Ltda.
Ilustrações: Alberto De Stefano, Artur Fujita, Ericson Guilherme Luciano, Estúdio Mil, Hélio Senatore, Ilustra Cartoon, Luigi Rocco, Marcelo Gagliano, Rodval Matias e Tiago Donizete Leme
Cartografia: Mouses Sagiorato e Vespúcio Cartografia
Design: Luis Vassallo (proj. gráfico, capa e Manual do Professor)
Foto de capa: Jonas Fuhrmann/EyeEm/Getty Images
Pré-impressão: Alessandro de Oliveira Queiroz, Pamela Pardini Nicastro, Débora Fernandes de Menezes, Fernanda de Oliveira e Valmir da Silva Santos

Alameda Santos, 960, 4º andar, setor 3
Cerqueira César – São Paulo – SP – CEP 01418-002
Tel.: 4003-3061
www.edocente.com.br
saceditorasaraiva@somoseducacao.com.br

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Iezzi, Gelson
Matemática e realidade : 9º ano / Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antonio Machado. -- 10. ed. -- São Paulo : Saraiva Educação S.A., 2022.
(Matemática e realidade)

Bibliografia
Suplementado pelo manual do professor
ISBN 978-65-5766-253-3 (aluno)
ISBN 978-65-5766-254-0 (professor)

1. Matemática (Ensino fundamental - Anos finais) I. Título II. Dolce, Osvaldo III. Machado, Antonio

22-2419 CDD 372.7

Angélica Ilacqua - CRB-8/7057

2022
Código da obra CL 820855
CAE 802099 (AL) / 802100 (PR)
10ª edição
1ª impressão
De acordo com a BNCC.

Impressão e acabamento

APRESENTAÇÃO

Esta coleção de Matemática foi elaborada pensando em você, estudante!

Na introdução de muitos conteúdos, apresentamos situações-problema ligadas às realidades que você vivencia. Procuramos promover sua participação constante e ativa na construção dos conhecimentos. Nos boxes ***Participe***, por exemplo, incentivamos que você e os colegas reflitam e exponham conhecimentos prévios à introdução de um novo tema.

Em vários momentos do livro, nos boxes ***Na olimpíada***, são reproduzidas questões da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (Obmep), com o objetivo de colocá-lo diante de situações que o levem a pensar e desenvolver soluções de modo leve e espontâneo.

Na seção de leitura ***Na mídia***, em que é reproduzido um texto de jornal, revista ou *site* relacionado à Matemática, procuramos mostrar que a aplicação dos conhecimentos matemáticos é indispensável para ter acesso aos meios de informação e comunicação, bem como para ter uma visão crítica dos temas.

Os conhecimentos de finanças são necessários para garantir qualidade de vida desde agora até a vida adulta. Na seção ***Educação financeira***, você encontra atividades individuais e coletivas para refletir sobre o consumo consciente e que podem torná-lo apto a contribuir para o planejamento financeiro de sua família.

Em todos os volumes desta coleção, também está presente a seção ***Matemática e tecnologias***, que explora o uso de *softwares* e aplicativos de Matemática para resolver e modelar problemas.

E, para mostrar que a Matemática é uma descoberta de diferentes pessoas, épocas e civilizações, na seção ***Na História*** expomos a história de descobertas matemáticas ligadas aos temas em estudo.

Esperamos que esta coleção o auxilie no entendimento de números, letras, figuras e diversas representações que compõem o universo matemático e a vida em sociedade.

Bons estudos!

Os autores

Conheça seu livro

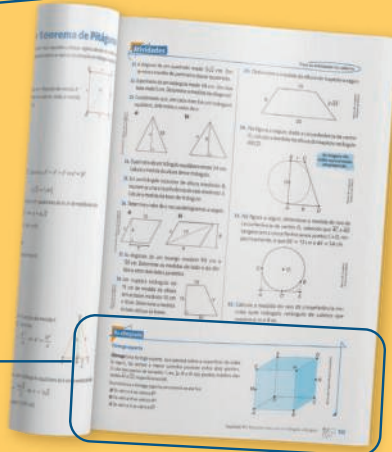
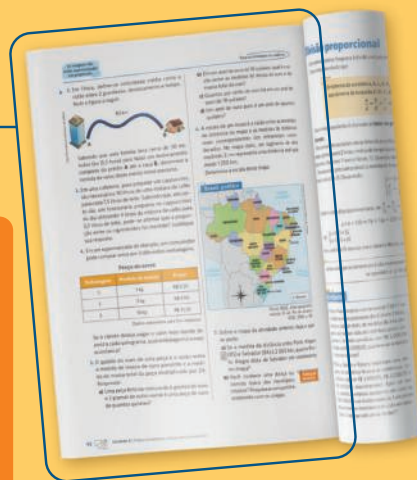
Abertura de Unidade

Organizada em uma dupla de páginas, a abertura traz uma ou mais imagens e textos relacionados a temas contemporâneos e interdisciplinares que vão despertar sua curiosidade. A relação entre o tema da abertura e os conteúdos matemáticos da Unidade é feita por meio de atividades contextualizadas na própria abertura e em outros momentos ao longo dos capítulos correspondentes.

Capítulo

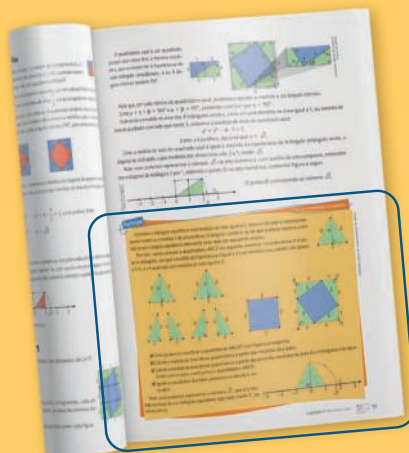
Dois ou mais capítulos estão reunidos em uma mesma Unidade e divididos em assuntos seguidos por blocos de atividades.

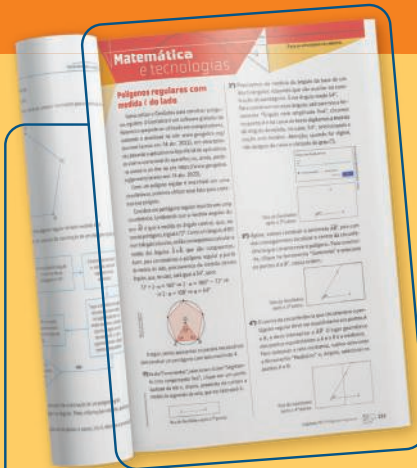
Atividades

As atividades, além de variadas, são apresentadas em gradação de dificuldade e permitirão que você aplique os conteúdos estudados. Ao longo desta seção, você encontrará atividades mais desafiadoras, bem como de resolução e elaboração de problemas.

Na olimpíada

Esta seção traz questões de provas oficiais da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (Obmep), que farão você analisar, pensar e relacionar conteúdos diversos.

Participe

Por meio das questões desta seção, você será incentivado a levantar hipóteses e resolver problemas utilizando estratégias pessoais e trabalhando individualmente ou em dupla.

Na História

Esta seção aborda temáticas da História da Matemática. Por meio dela, você terá contato com relatos históricos, questionamentos científicos e práticas de pesquisa relacionados a assuntos ligados ao conteúdo.

Matemática e tecnologias

Nesta seção, você terá a oportunidade de utilizar ferramentas tecnológicas, como *softwares* livres e aplicativos de Matemática, para modelar e resolver problemas.

Na mídia

Por meio de textos de jornais, revistas ou *sites* você poderá observar a realidade com visão crítica, utilizando a Matemática para comparar dados e interpretar textos, tabelas e gráficos divulgados pela mídia.

Educação financeira

Refletir sobre atitudes relacionadas à Educação financeira deve fazer parte de nossa rotina. Consumo excessivo e economia são alguns dos contextos abordados nesta seção, que poderá auxiliar você em sua organização financeira familiar.

Na Unidade

Nesta seção, são apresentadas atividades de revisão dos conteúdos abordados ao longo da Unidade, o que permitirá a você fazer uma autoavaliação das aprendizagens. Nela, também constam questões de avaliações oficiais.

ÍCONES

Convém usar a calculadora quando encontrar este ícone.

Indica o uso de régua, compasso, esquadro, entre outros instrumentos.

Indica momentos de trabalho com práticas de pesquisa relacionadas à História da Matemática e a fatos da realidade por meio de atividades individuais ou coletivas.

Indicam sugestões de leitura de livros e textos, acesso a *sites* e jogos, além de visitações guiadas e outras indicações para aprimorar seus estudos.

Sumário

Unidade 1

Unidade 2

Unidade 3

Unidade 4

Unidade 5

Unidade 6

Unidade 7

Unidade 8

Unidade 9

Orientações didáticas

Abertura

Na BNCC

A abertura desta Unidade permite mobilizar com maior ênfase a **CG01**, a **CG03**, a **CEMAT01** e a **CEMAT02** ao propor a análise de algumas obras de arte e construções arquitetônicas e relacioná-las à Matemática.

Aproveite o texto da abertura da Unidade e promova um trabalho interdisciplinar com professores de **Arte** e **História**, em que cada área pode dar suporte para aprofundamento dos assuntos citados como, por exemplo, sobre as obras apresentadas.

A leitura de obras de arte é um excelente contexto para explorar articulações com outras áreas de conhecimento. Faça a leitura da legenda, destacando o autor da obra, o local, a data, o tipo de pintura, bem como as dimensões da tela. Verifique se os estudantes têm noção dessas dimensões e, se julgar possível, proponha, em parceria com o professor de **Arte**, pesquisas sobre os artistas ou sobre a tendência artística da época.

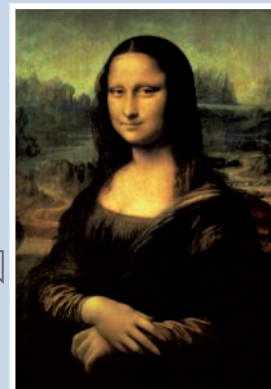
Construções arquitetônicas também são referências artísticas. Nelas, a presença e a utilização da matemática é mais evidente. Aproveite o contexto e sugira pesquisas que fomentem argumentações e inferências, e para isso proponha questões norteadoras, por exemplo: "Em cada época, quais conhecimentos matemáticos foram utilizados para produzir essas construções?"; "Como esses conhecimentos são ensinados atualmente na escola?", entre outras questões problematizadoras.

UNIDADE 1

Números e operações com raízes

Apresentamos 2 obras de arte:

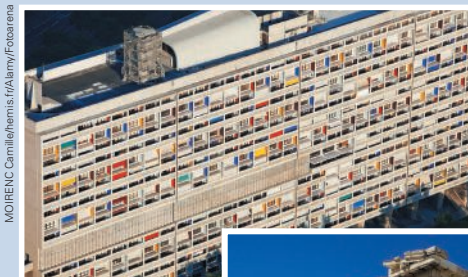
A última ceia, de Salvador Dalí, 1955 (óleo sobre tela de 167 cm × 268 cm).

As imagens não estão representadas em proporção.

Mona Lisa, de Leonardo da Vinci, 1503 (óleo sobre madeira de álamo de 77 cm × 53 cm).

NESTA UNIDADE VOCÊ VAI:

- reconhecer que existem segmentos de reta cujas medidas não são expressas por número racional;
- reconhecer que um número irracional é um número real cuja representação decimal é infinita e não periódica;
- resolver problemas com números reais;
- reconhecer e empregar unidades usadas para expressar medidas muito grandes ou muito pequenas.

CAPÍTULOS

Apresentamos 2 construções arquitetônicas:

Fachada da *Unité d'habitation*, do arquiteto e artista Le Corbusier, um renomado edifício modernista em Marselha (França). Foto de 2019.

Partenon, templo construído no século V a.C. em Atenas (Grécia). Foto de 2020.

Alguns estudiosos afirmam que cada obra mostrada nas fotografias mantém uma relação entre as medidas das dimensões, conhecida como **razão áurea**.

Proposta para o estudante

Proponha aos estudantes que se organizem em duplas e façam a leitura do texto indicado a seguir. Depois, solicite às duplas que construam a espiral áurea em uma folha de cartolina, para posterior exposição na sala.

VENTURA, Felipe. Os mitos e verdades sobre a proporção áurea. *Giz Modo* – Uol. Disponível em: https://gizmodo.uol.com.br/mitos-proporcao-aurea/. Acesso em: 10 maio 2022.

Número de ouro: será que está presente?

A razão áurea (ou número de ouro) é uma descoberta matemática que foi motivada pela observação de proporções existentes em muitos elementos da natureza, inclusive no corpo humano. Além disso, ela pode estar presente em criações humanas, como obras de arte e arquitetônicas.

A primeira menção ao que entendemos por razão áurea foi feita por Euclides (325 a.C.-265 a.C.). No livro VI da obra *Os Elementos*, essa razão foi definida como a divisão em média e extrema razão. A denominação "razão áurea" veio séculos depois.

Podemos comprovar que existe razão áurea nas obras apresentadas nas fotografias anteriores? Primeiro, vamos aprender como a razão áurea pode ser obtida.

Considere o retângulo *ADFE*. Ele é formado pela junção de um quadrado (à esquerda) com um retângulo (à direita) e foi construído de tal modo que $\frac{AE}{AD} = \frac{EF}{EB}$. Partindo dessa proporção, temos: $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ ou $1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$, que é chamada **proporção áurea**. Após alguns cálculos, encontramos um valor para a razão $\frac{a}{b}$, que podemos chamar de φ (letra grega fi) e, assim, reescrever a proporção como $1 + \frac{1}{\varphi} = \varphi$. Multiplicando a equação por φ, chegamos à equação do 2º grau $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$, que apresenta 2 soluções, sendo que a positiva é igual a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, chamada de **razão áurea** ou **número de ouro**, aproximadamente igual a 1,618.

Banco de imagens/Arquivo da editora

George Markowsky escreveu um artigo intitulado "Equívocos sobre a proporção áurea", em que trata da presença ou não da razão áurea na natureza. Sobre construções antigas como o *Partenon*, na Grécia, Markowsky defende que não existem evidências de que os gregos tenham utilizado conscientemente o retângulo áureo no planejamento dessa e de outras edificações ou em obras de arte da Antiguidade.

Até hoje não se sabe se Da Vinci utilizou ou não a razão áurea quando criou suas pinturas. Como ele fez as ilustrações do livro *De Divina Proportione* (1509), em que o autor Luca Pacioli (1447-1517) apresenta um estudo sobre a proporção áurea, algumas pessoas deduziram que ele havia adotado essa proporção em suas pinturas, como a *Mona Lisa*, mas não se pode afirmar que isso tenha acontecido.

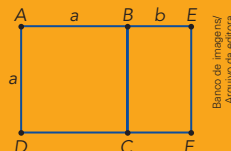
Já em obras modernas, como as do pintor Salvador Dalí (1904-1989) e as do arquiteto Le Corbusier (1887-1965), não há dúvidas de que houve o emprego da razão áurea. Por exemplo, na obra *A última ceia* ou *O sacramento da última ceia*, em uma tela com formato do retângulo de ouro, Dalí inseriu alguns elementos geométricos, como o dodecaedro regular, sólido geométrico cujas faces são limitadas por pentágonos e que está relacionado à proporção áurea.

O arquiteto Le Corbusier baseou-se na proporção áurea para desenvolver um sistema proporcional inteiro, a que deu o nome "Modulor". Com o Modulor, seria possível fornecer um sistema padronizado que automaticamente conferiria proporções harmoniosas a tudo, desde maçanetas até arranha-céus. Le Corbusier afirma ter utilizado esse sistema na construção do prédio *Unité d'habitation*, na cidade de Marselha, na França.

Além disso, existem figuras e sólidos geométricos que apresentam a proporção áurea, e é sempre bom verificar se, de fato, há uma relação entre o que é apresentado e a realidade. Como vimos, nem todas as indicações de ocorrência da proporção áurea podem ser comprovadas.

Fontes dos dados: VENTURA, Felipe. Os mitos e verdades sobre a proporção áurea. *Gizmodo Brasil*, [*s. l.*], 23 abr. 2015. Disponível em: https://gizmodo.uol.com.br/mitos-proporcao-aurea/; LIVIO, Mario. The golden ratio and aesthetics. *+ plus magazine*, [*s. l.*], 1º nov. 2022. Disponível em: https://plus.maths.org/content/golden-ratio-and-aesthetics; MARKOWSKY, George. Misconceptions about the Golden Ratio. *The College Mathematics Journal*, v. 23, n. 1, p. 2-19, 1992. Disponível em: https://www.goldennumber.net/wp-content/uploads/George-Markowsky-Golden-Ratio-Misconceptions-MAA.pdf. Acesso em: 8 abr. 2022.

Você já conhecia o conceito de razão áurea? Como se pode verificar se as obras de arte e construções têm essa relação?

Respostas pessoais.

Orientações didáticas

Abertura

Apresente e discuta com os estudantes a proporção áurea tomando como base o retângulo *ADFE* ilustrado no texto, e apresente o número de ouro. Ressalte para os estudantes que todo retângulo em que a razão de suas dimensões é o número de ouro é denominado retângulo áureo. Proponha aos estudantes que, em duplas, construam retângulos áureos em folhas de papel sulfite. Outra ideia de atividade é solicitar aos estudantes que pesquisem sobre o número de ouro e onde ele aparece e depois, junto com eles, verificar se as fontes são confiáveis e se é possível verificá-las.

Além de utilizar a história da matemática para dar significado a conceitos, bem como aplicá-los na vida real, esse texto ajuda a mostrar que as conquistas científicas são fruto do trabalho de muitas pessoas, e não de alguém individualmente. Nesse sentido, desenvolva estratégias de leitura que ajudem os estudantes a compreender esses aspectos. Por exemplo, sugerir que organizem as informações do texto em ordem cronológica, construindo esquemas e relacionando data, acontecimento, produto oriundo do acontecimento, etc. Organizar e representar informações por meio de esquemas contribui para o desenvolvimento do pensamento computacional e, consequentemente, de habilidades argumentativas.

Proposta para o professor

Para enriquecer e ampliar o trabalho com o texto "Número de ouro – será que ele está presente?", sugerimos os artigos a seguir, da *Revista RPM*:

ÁVILA, Geraldo. Retângulo áureo, divisão áurea e sequência de Fibonacci. *Revista RPM*, n. 6. Disponível em: https://www.rpm.org.br/cdrpm/6/2.htm.

WAGNER, Eduardo. O símbolo da SBM. *Revista RPM*, n. 20. Disponível em: https://www.rpm.org.br/cdrpm/20/3.htm.

Para explorar as aplicações não verificadas da razão áurea, sugerimos o material a seguir:

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE. *O número de ouro*. Disponível em: http://www.cdme.im-uff.mat.br/rza/rza-html/rza-br.html.

Como fonte de pesquisa para embasar as atividades propostas nesta abertura, sugerimos esta leitura:

AZEVEDO, Natália de Carvalho. *O número de ouro e construções geométricas*. Dissertação (mestrado). Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013. Disponível em: https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tde/2948/5/Natalia.pdf. Acesso em: 15 jun. 2022.

Orientações didáticas

Abertura

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento das habilidades **EF09MA01** e **EF09MA02** ao trazer atividades e orientações que buscam levar o estudante a identificar um número irracional como um número real, reconhecer que há segmentos de retas que não são expressos por um número racional (tal como a diagonal de um quadrado de lado unitário), e, por fim, efetuar os cálculos relativos a esses conteúdos.

Neste capítulo, tratamos da ampliação do campo numérico para os números reais, apresentando o conceito de número irracional. Iniciamos com uma recapitulação dos tipos de números já estudados em anos anteriores. Os temas desenvolvidos são: números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais; localização na reta numérica; e representação dos conjuntos numéricos estudados.

São retomados os conceitos de números naturais, inteiros e racionais e apresentamos exemplos de números irracionais e reais e localizações desses números na reta numérica.

Questione os estudantes acerca das propriedades e características dos conjuntos numéricos já trabalhados. Proponha a eles que explorem algumas afirmações para que compreendam as propriedades relacionadas, bem como o encadeamento lógico e matemático: “Todo número natural é inteiro, há números inteiros não naturais, todo número inteiro é racional, portanto todo número natural é racional”; “Há números racionais não inteiros”. Em seguida, pergunte: “Entre dois números inteiros há algum número inteiro? E entre dois números racionais há algum número racional? Com qual argumento você verifica sua resposta?”.

Verifique como os estudantes aplicam os conhecimentos já construídos sobre esse assunto. Depois, proponha a eles perguntas similares envolvendo a noção de número irracional e de número real, discutindo as hipóteses deles. Por exemplo: “Há algum número irracional que seja racional? E há algum número real que não seja nem racional nem irracional?”.

A partir da afirmação “todos eles são números reais”, observam-se exemplos e chega-se à conclusão de que “todos os números dos exemplos

Números reais

EF09MA01
EF09MA02
EF09MA03

Os números reais

Esses números existem mesmo?

Todos os números naturais, os inteiros, os racionais e os irracionais (que estudaremos adiante) são números reais. Alguns são representados simplesmente por algarismos, outros por operações, e ainda há aqueles que são representados por letras específicas, até porque não se conhecem seus infinitos dígitos.

Exemplos:

- 2 é um número natural;
- −2 é um número inteiro;
- 0,2 é um número racional;
- $\sqrt{2}$ é um número irracional.

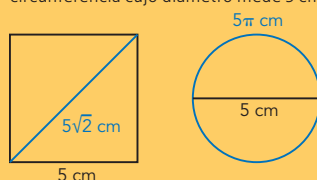
Todos os números dos exemplos são reais.

Participe

Faça as atividades no caderno.

I. Agora, escreva no caderno um exemplo de número real com infinitos dígitos. Resposta pessoal.

II. Note as figuras a seguir: um quadrado cujo lado mede 5 cm tem diagonal com medida igual a $5\sqrt{2}$ cm, e uma circunferência cujo diâmetro mede 5 cm tem medida de comprimento igual a 5π cm.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Qual desses números é maior: $\sqrt{2}$ ou π? Use um barbante para marcar essas medidas e posicione-o em uma régua, para ajudar você a decidir. π é maior do que $\sqrt{2}$.

É fato, também, que todos esses números podem ser representados em uma reta numérica, a **reta real**. Na reta real, há pontos que correspondem a valores que representam medidas de comprimento diversas, como diagonais de quadrados ou de comprimentos de circunferências, e outros que não são medidas de comprimento, como a constante de Euler, que é aproximadamente igual a 2,718.

A constante de Euler, representada pela letra **e**, recebeu esse nome em homenagem ao matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783), que estudou as propriedades desse número. Para saber mais desse matemático, consulte: https://www3.unicentro.br/petfisica/2016/06/29/leonhard-euler-1707-1783/. Acesso em: 20 abr. 2022.
Você pode também pesquisar em que áreas do conhecimento há aplicações para a constante de Euler.

Leonhard Euler, de Jakob Emanuel Handmann, c. 1756 (óleo sobre tela de dimensões desconhecidas).

Reprodução/Museu Alemão, Munique, Alemanha.

são reais”. Dessa maneira é possível desenvolver o letramento matemático a partir do trabalho com o raciocínio lógico e matemático. Nesse caso o tipo de raciocínio pode ser considerado uma “abdução”.

Participe

Os estudantes já exploram os conceitos de número irracional e de número real. Se julgar necessário, retome com eles a noção de diagonal de um quadrado, o conceito de circunferência e de seus elementos (como raio e diâmetro) e o que seria o comprimento de uma circunferência.

No boxe sobre a constante de Euler, os estudantes podem obter informações que indicam seu uso em várias áreas da própria Matemática, como na Matemática Financeira, na Trigonometria, na Estatística, na Probabilidade, na Geometria, etc., e em outras áreas do conhecimento, como na Arqueologia, na Biologia, na Física, etc. Dessa maneira é possível observar a matemática como algo que permeia toda a cultura humana por sua utilidade interdisciplinar.

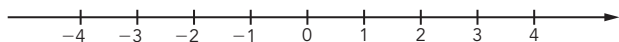
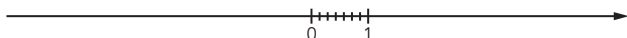
Se julgar adequado, proponha uma pesquisa complementar sobre o matemático e/ou sobre os objetos matemáticos envolvidos nessa informação.

Reta numérica

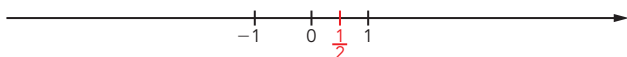
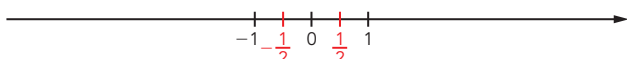
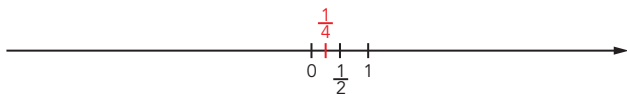
Vamos recordar como representar números na reta numérica.

Os números inteiros podem ser representados por pontos de uma reta. Na figura a seguir, estão representados os números inteiros de -4 a 4.

Estudante desenhando uma reta com auxílio da régua.

Julio Costa/Futura Press

Entre 2 números inteiros e consecutivos, não existe nenhum número inteiro. Isso significa que os pontos da reta situados entre a marca 0 e a marca 1, por exemplo, não representam números inteiros. Na reta estão destacados alguns dos pontos entre o 0 e o 1.

Os números racionais não inteiros também podem ser representados por pontos dessa reta.

Entre 2 números racionais, há infinitos números racionais. Por exemplo, entre 0 e 1, há o número $\frac{1}{2}$.

Para representar o número $\frac{1}{2}$, tomamos o ponto da reta que divide ao meio o segmento de reta de extremidades 0 e 1.

Para representar o número $-\frac{1}{2}$, tomamos o ponto situado a meia unidade de distância e à esquerda de 0.

Entre 0 e $\frac{1}{2}$, há outros números racionais. Por exemplo, o número $\frac{1}{4}$.

Entre 0 e $\frac{1}{4}$, há outros números racionais. Por exemplo, o número $\frac{1}{8}$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

> Entre 2 números racionais a e b, com $a \neq b$, sempre é possível encontrar outros números racionais distintos de a e b; por exemplo, $\frac{a+b}{2}$.

Considere, a seguir, a representação de outros números racionais na reta numérica:

Orientações didáticas

Reta numérica

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento das habilidades **EF09MA01** e **EF09MA02** ao propor o reconhecimento da existência de segmentos de reta que não são expressos por um número racional e quando é estimada a localização de números racionais expressos na forma de fração. Mobiliza-se, assim, com maior ênfase a **CEMAT03**.

Neste tópico, retomamos a construção de uma reta numérica e a localização de números naturais, números inteiros e números racionais expressos na forma de fração. Amplie o trabalho propondo que os estudantes localizem na reta numérica números racionais expressos na forma decimal.

O ponto médio de um segmento na reta numérica é a semissoma $\frac{(a+b)}{2}$ dos valores nas extremidades. É importante destacar que a intenção é localizar o ponto médio e não o seu comprimento, por isso utilizamos a semissoma dos extremos.

Proposta para o professor

Para ampliar seus conhecimentos e enriquecer seu trabalho docente, sugerimos a leitura desta reportagem sobre a Sala de Aula Invertida, uma das metodologias ativas de aprendizagem:

INSTITUTO GRPCOM. *Sala de Aula Invertida*: saiba mais sobre a metodologia e confira três livros para aprofundar o conhecimento. Disponível em: https://www.lerepensar.com.br/2020/sala-de-aula-invertida-saiba-mais-sobre-a-metodologia-e-confira-tres-livros-para-aprofundar-o-conhecimento/. Acesso em: 10 maio 2022.

O texto traz uma breve explicação desse tipo de metodologia e os resumos das três indicações de livros sobre o assunto.

Orientações didáticas

A diagonal do quadrado unitário

Este tópico apresenta aos estudantes o cálculo da medida da diagonal de um quadrado de lado 1 (unidade de comprimento), o dito quadrado unitário. Inicialmente, escreva o problema na lousa e peça que indiquem estratégias para determinar a medida *x* dessa diagonal. Discuta com a turma as hipóteses levantadas e suas validações ou refutações. Em seguida, solicite que acompanhem o desenvolvimento para esse cálculo apresentado no livro texto. Peça que anotem no caderno os conceitos que gerarem dúvidas para eles, e, depois de um tempo, faça a releitura do procedimento discutindo as dúvidas levantadas. Se julgar necessário, retome com os estudantes o cálculo da medida de área de um quadrado, de um triângulo e, em particular, de um triângulo retângulo.

A diagonal do retângulo 2 por 1

Neste tópico, o cálculo proposto é o da medida da diagonal de um retângulo de dimensões 2 e 1 (unidades de comprimento).

Explore o desenvolvimento apresentado reproduzindo as figuras em cartolina. Recorte os 4 triângulos verdes e o quadrado azul para que os estudantes observem a composição do quadrado grande de lado 3 (unidades de comprimento). Assim, eles podem constatar que a medida de área desse quadrado grande subtraída da medida de área dos 4 triângulos verdes resulta na medida de área do quadrado azul. Solicite aos estudantes que justifiquem os passos indicados, garantindo que todos compreendam.

Espera-se que os estudantes percebam que a medida $\sqrt{5}$ (unidades de comprimento) da diagonal desse retângulo também não é expressa por um número racional.

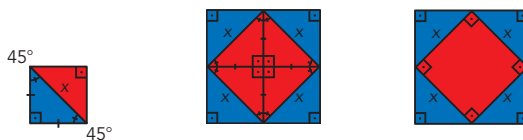
A construção dessa diagonal também pode ser feita pelos estudantes no caderno, para a localização de $\sqrt{5}$ na reta numérica.

Para contribuir com o desenvolvimento da argumentação matemática, proponha aos estudantes a seguinte questão: "O fato de um quadrilátero ter 4 lados de mesma medida é suficiente para garantir que ele é um quadrado?". Espera-se que os estudantes concluam que não, pois é necessário garantir também que os 4 ângulos internos sejam retos. Se não forem, teremos um losango.

A diagonal do quadrado unitário

Um quadrado unitário é um quadrado em que o lado mede 1 unidade de comprimento (u.c.). Como $1^2 = 1$, a medida de área desse quadrado é 1 unidade de área (u.a.). Um quadrado assim é denominado **quadrado unitário**. Quanto mede a diagonal de um quadrado unitário?

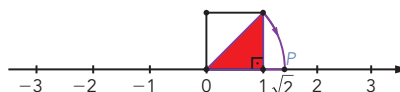
A diagonal divide o quadrado unitário em 2 triângulos retângulos isósceles, por ter cada um 2 lados com medida igual a 1, formando um ângulo reto. Cada triângulo tem medida de área $\frac{1}{2}$ e ângulos agudos de medida 45°.

Para facilitar o cálculo da medida *x* da diagonal, vamos considerar 4 quadrados unitários dispostos como a seguir. O quadrilátero vermelho é um quadrado porque os 4 lados têm a mesma medida *x*, que corresponde à hipotenusa de cada triângulo considerado, e a medida de cada ângulo interno é 90°, pois corresponde a 2 ângulos agudos do triângulo considerado.

Calculando a medida do lado do quadrado vermelho, teremos a medida da diagonal do quadrado unitário. Como a medida de área do quadrado vermelho corresponde à soma das medidas de área dos 4 triângulos vermelhos, podemos escrever a equação:

$x^2 = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$, e *x* é positivo. Então:

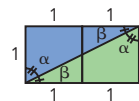
$x = \sqrt{2}$

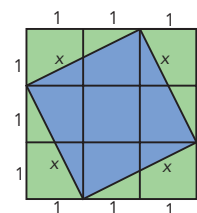
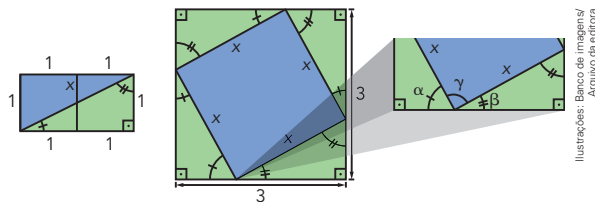
A diagonal do quadrado unitário mede $\sqrt{2}$.

Note como podemos representar o número $\sqrt{2}$ na reta numérica: considerando um dos vértices a origem da reta numérica, construímos um quadrado com lado que mede 1 e, com auxílio de um compasso, com a ponta-seca fixada na origem, rotacionamos a diagonal do quadrado unitário obtendo o ponto *P* na reta numérica, conforme figura a seguir.

O ponto *P* corresponde ao número $\sqrt{2}$ na reta numérica.

Agora, vamos analisar outra situação.

A diagonal do retângulo 2 por 1

Quanto mede a diagonal de um retângulo cujas medidas das dimensões são 2 e 1?

A diagonal divide o retângulo em 2 triângulos retângulos, congruentes, cada um com medida de área igual a 1. Note que, em cada triângulo, a soma das medidas dos ângulos agudos é $\alpha + \beta = 90°$.

Nesse caso, vamos considerar 4 desses triângulos, dispostos como nesta figura.

O quadrilátero azul é um quadrado porque seus lados têm a mesma medida x, que corresponde à hipotenusa de cada triângulo considerado, e os 4 ângulos internos medem 90°.

Note que, em cada vértice do quadrilátero azul, podemos calcular a medida γ do ângulo interno.

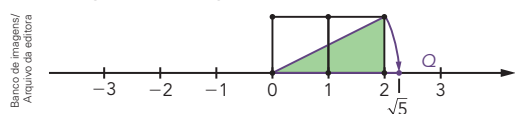
Como $\alpha + \gamma + \beta = 180°$ e $\alpha + \beta = 90°$, podemos concluir que $\gamma = 90°$.

Subtraindo a medida de área dos 4 triângulos verdes, cada um com medida de área igual a 1, da medida de área do quadrado com lado que mede 3, obtemos a medida de área do quadrado azul:

$$x^2 = 3^2 - 4 \cdot 1 = 5$$

Como x é positivo, decorre que $x = \sqrt{5}$.

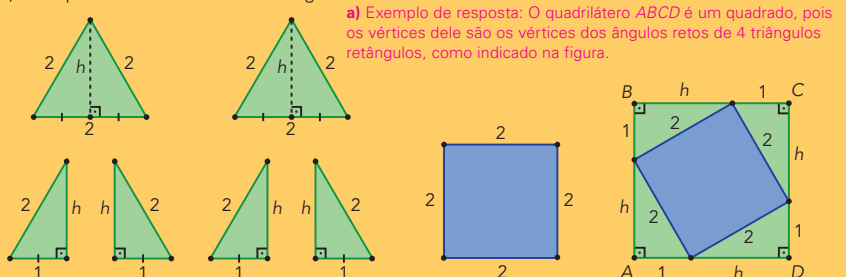
Como a medida do lado do quadrado azul é igual à medida da hipotenusa do triângulo retângulo verde, a diagonal do retângulo, cujas medidas das dimensões são 2 e 1, mede $\sqrt{5}$.

Note como podemos representar o número $\sqrt{5}$ na reta numérica: com auxílio de um compasso, rotacionamos a diagonal do retângulo 2 por 1, obtendo o ponto Q na reta numérica, conforme figura a seguir.

O ponto Q corresponde ao número $\sqrt{5}$.

Participe

Faça as atividades no caderno.

Considere o triângulo equilátero com medida do lado igual a 2. Vamos calcular e representar na reta numérica a medida h da altura desse triângulo. Lembre-se de que a altura relativa a um lado de um triângulo equilátero intersecta esse lado em seu ponto médio.

Para isso, vamos compor o quadrilátero $ABCD$ da seguinte maneira: consideramos 4 triângulos retângulos, em que a medida da hipotenusa é igual a 2 e as medidas dos catetos são iguais a 1 e h, e um quadrado com medida do lado igual a 2.

a) Exemplo de resposta: O quadrilátero $ABCD$ é um quadrado, pois os vértices dele são os vértices dos ângulos retos de 4 triângulos retângulos, como indicado na figura.

a) Como podemos classificar o quadrilátero $ABCD$? Justifique sua resposta.

b) Calcule a medida de área desse quadrilátero a partir das medidas dos lados. $A_{\text{quadrilátero}} = (h + 1)^2$

c) Calcule a medida de área desse quadrilátero a partir da soma das medidas de área dos triângulos e do quadrado com os quais construímos o quadrilátero $ABCD$. $A_{\text{quadrilátero}} = 2^2 + 4 \cdot \frac{h}{2}$

d) Iguale os resultados dos itens anteriores e calcule o valor de h. $h = \sqrt{3}$

Note como podemos representar o número $\sqrt{3}$, que é a medida da altura de um triângulo equilátero cujo lado mede 2, na reta numérica.

Orientações didáticas

Participe

O boxe *Participe* contribui para o desenvolvimento do pensamento computacional. Solicite aos estudantes que construam as figuras em cartolina para montar o quadrado grande e responder às questões. Esse trabalho pode ser feito em duplas, o que enriquecerá o aprendizado.

O trabalho com os tópicos "A diagonal do quadrado unitário" e "A diagonal do retângulo 2 por 1" oportuniza o pensamento computacional e favorece o desenvolvimento da **CEMAT03** da BNCC, bem como da **EF09MA01**, ao reconhecer a existência de segmentos de reta que não são expressos por um número racional.

Proposta para o estudante

Peça aos estudantes que acompanhem o vídeo disponível em:

APRENDIZAP. *Números reais na representação de segmentos de reta*. Disponível em: https://app.aprendizap.com.br/aula/5xMeNhzyvJnF9xNTP7FiqR. Acesso em: 10 maio 2022.

Nele, os estudantes vão retomar a localização dos números na reta numérica. Faça um fechamento com a turma para suprimir possíveis dúvidas que ainda possam existir.

Orientações didáticas

Números irracionais

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento das habilidades **EF09MA01**, **EF09MA02** e **EF09MA03** ao tratar da ampliação do campo numérico para os números reais.

Espera-se que os estudantes percebam que há números que não são racionais e que estes são denominados números irracionais. Assim, é possível conceituar teoricamente as reflexões feitas anteriormente. Dessa maneira, eles poderão compreender que os números reais são dados pela reunião dos números racionais com os números irracionais.

Na Matemática, a grande maioria dos números reais é irracional, porém apenas os números do tipo inteiros e racionais são estudados por anos a fio. Cabe aqui estar ciente do desafio que é readaptar o raciocínio dos estudantes para caber esta quebra aparente de paradigma e revelar a importância dos irracionais.

Números irracionais

Nos pontos P, Q e R das figuras anteriores, foram marcados os números $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ e $\sqrt{3}$, respectivamente. Será que $\sqrt{2}$ é um número racional?

Sabemos que todo número racional pode ser escrito na forma $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros, primos entre si, e $q \neq 0$.

Substituindo p e q por números inteiros, será possível calcular a expressão $\left(\frac{p}{q}\right)^2$ e encontrar 2 como resultado?

Já na Antiguidade, há mais de 2000 anos, se provou que isso não é possível.

Assim, o ponto P não está representando um número racional. O número representado é um exemplo de **número irracional** (ou seja, **não racional**). Considere algumas estimativas para o valor de $\sqrt{2}$:

$$\left.\begin{matrix}(1{,}4)^2 = 1{,}4 \cdot 1{,}4 = 1{,}96 \text{ (menor do que 2)} \\ (1{,}5)^2 = 2{,}25 \text{ (maior do que 2)}\end{matrix}\right\} \text{Logo, } \sqrt{2} \text{ é um número entre 1,4 e 1,5.}$$

$$\left.\begin{matrix}(1{,}41)^2 = 1{,}9881 \text{ (menor do que 2)} \\ (1{,}42)^2 = 2{,}0164 \text{ (maior do que 2)}\end{matrix}\right\} \text{Logo, } \sqrt{2} \text{ é um número entre 1,41 e 1,42.}$$

$$\left.\begin{matrix}(1{,}414)^2 = 1{,}999396 \text{ (menor do que 2)} \\ (1{,}415)^2 = 2{,}002225 \text{ (maior do que 2)}\end{matrix}\right\} \text{Logo, } \sqrt{2} \text{ é um número entre 1,414 e 1,415.}$$

Por não ser racional, o número $\sqrt{2}$ não pode ser representado por um decimal exato nem por uma dízima periódica (porque toda dízima tem uma fração geratriz, sendo, portanto, um número racional). Assim, a representação decimal do número $\sqrt{2}$ é **infinita** e **não periódica**:

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562...$$

Podemos aproximar esse número, com 3 casas decimais, por exemplo, e representá-lo assim:

$$\sqrt{2} \simeq 1{,}414$$

O sinal $\simeq$ lê-se: "é aproximadamente igual a".

Também não existem números inteiros r e s tais que $\frac{r}{s}$ seja igual a $\sqrt{3}$, ou seja, o número $\sqrt{3}$ também não é racional. É possível mostrar que $\sqrt{5}$ é irracional também.

Então, existem pontos na reta numérica que não correspondem a números racionais; por exemplo, os pontos que correspondem aos números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$. Consequentemente, é possível afirmar que os números racionais não preenchem toda a reta.

Em uma calculadora, podemos ler para:

$\sqrt{2} \rightarrow 1{,}414213562$; $\sqrt{3} \rightarrow 1{,}732050807$; $\sqrt{5} \rightarrow 2{,}236067977$;

que são aproximações de $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e de $\sqrt{5}$ com 9 casas decimais (eles têm infinitas casas decimais e não periódicas).

É comum usarmos aproximações com 1 a 4 casas decimais:

$$\sqrt{2} \simeq 1{,}4 \text{ ou } \sqrt{2} \simeq 1{,}41 \text{ ou } \sqrt{2} \simeq 1{,}414 \text{ ou } \sqrt{2} \simeq 1{,}4142$$
$$\sqrt{3} \simeq 1{,}7 \text{ ou } \sqrt{3} \simeq 1{,}73 \text{ ou } \sqrt{3} \simeq 1{,}732 \text{ ou } \sqrt{3} \simeq 1{,}7321$$
$$\sqrt{5} \simeq 2{,}2 \text{ ou } \sqrt{5} \simeq 2{,}24 \text{ ou } \sqrt{5} \simeq 2{,}236 \text{ ou } \sqrt{5} \simeq 2{,}2361$$

O π é um número irracional. Para indicar seu valor, geralmente são utilizadas as aproximações 3,14 ou 3,1416.

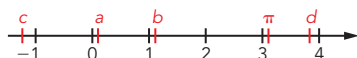
Há infinitos pontos da reta numérica nos quais não estão representados números racionais. Neles, são representados os chamados **números irracionais**.

Número irracional é todo número representado em pontos da reta numérica que não correspondem a números racionais. A representação decimal de um número irracional é infinita e não periódica.

Proposta para o professor

POMMER, Wagner Marcelo. O número de Euler: contribuições e possibilidades para a escolaridade básica. *Revista Hipátia*, v. 2, n. 2, p. 13-28, dez. 2017. Disponível em: https://ojs.ifsp.edu.br/index.php/hipatia/article/download/747/236/. Acesso em: 10 maio 2022.

Considere outros exemplos de números irracionais e sua localização aproximada na reta. Em cada exemplo, supomos que o padrão da parte decimal se repita indefinidamente. Essa suposição será feita daqui em diante nos exemplos e nas atividades.

- $a = 0{,}1001000100001...$
- $b = 1{,}1112131415...$
- $c = -1{,}23456789101112...$
- $d = 3{,}808008000800008...$

Banco de imagens/Arquivo da editora

Todos os números representados na reta numérica são denominados **números reais**. A cada ponto da reta corresponde um número real, e a todo número real corresponde um ponto da reta. Dessa maneira, são números reais todos os números racionais e todos os números irracionais. Resumindo:

Número real é todo número racional ou irracional.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. Desenhe uma reta no caderno e marque sobre ela um segmento de reta que meça 10 cm. Nas extremidades desse segmento, marque os números 0 e 1 e localize nele, aproximadamente, os pontos que representam os números indicados nos itens a seguir. Verifique se cada número é racional ou irracional.

a) 0,1 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 0,7 0,8 0,9 Números racionais.

b) 0,333... 0,3737... Números racionais.

c) 0,35335333533335... Número irracional.

As representações da reta numérica e dos pontos encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

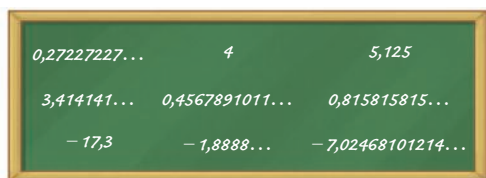
2. Quais dos seguintes decimais representam números racionais? Todos.

5,9 31,72 6,383838... −0,777...

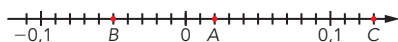
3. Admitindo que o padrão observado nas casas decimais dos números a seguir se repita infinitamente, classifique cada número em racional ou irracional. Racionais: **a**, **c**, **d**, **e**; irracionais: **b**, **f**.

$a = 1{,}11111111111111111111...$
$b = 1{,}1211211121111211111112...$
$c = 1{,}12131213121312131213...$
$d = 1{,}123123123123123123123...$
$e = 1{,}122333122333122333122333...$
$f = 1{,}12311223331111222333311112222333 3...$

4. Escreva no caderno, em ordem crescente, os números de *a* a *f* da atividade anterior. $a < b < c < e < f < d$

5. Quantos números da lousa são irracionais? Quais são eles? Três: 0,272272227...; 0,4567891011...; −7,02468101214...

Artur Fujita/Arquivo da editora

6. Escreva, no caderno, a representação decimal de um número irracional compreendido entre 5 e 6 e de outro compreendido entre 3,1 e 3,2. Exemplos de resposta: 5,123456789101112... e 3,101100111000...

7. Que números correspondem aos pontos *A*, *B* e *C* da reta numérica representada a seguir? *A*: 0,02; *B*: −0,05; *C*: 0,13

Banco de imagens/Arquivo da editora

8. Desenhe uma reta numérica no caderno e indique a localização aproximada dos pontos que representam os números:

$A = \sqrt{3} \simeq 1{,}73$
$B = \sqrt{7} \simeq 2{,}65$
$C = \sqrt{3} + \sqrt{7}$
$D = \sqrt{3} - \sqrt{7}$
$E = 7\sqrt{3} - 3\sqrt{7}$
$\pi \simeq 3{,}14$

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Orientações didáticas

Atividades

As atividades deste bloco exploram os conceitos de número irracional e de número real e sua localização na reta numérica.

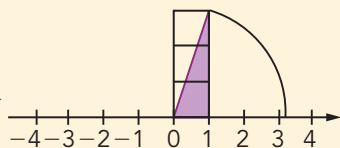
Sugerimos que as atividades **1** a **5** sejam realizadas individualmente, para que se verifique o conhecimento construído e possíveis dúvidas de cada estudante. Este pode ser um momento propício a uma avaliação diagnóstica com o objetivo de recolher dados que indiquem o estágio de entendimento dos estudantes. Já as atividades **6** a **10** podem ser realizadas em duplas, promovendo a troca de ideias e a ampliação do repertório de estratégias dos estudantes. O aprendizado por pares é uma metodologia ativa importante para a amplificação das possibilidades de letramento matemático.

Na atividade **6**, reforce que não basta apenas exibir uma quantidade de casas decimais. É necessário que o estudante descreva como é construída a sequência de dígitos para validar que em dado momento ela não se repete. Os estudantes também podem indicar raízes quadradas de números naturais que não são quadrados perfeitos e que, portanto, são números irracionais, nos intervalos determinados. Você pode utilizar como exemplo o número de Liouville, na qual é definido como os dígitos se comportam.

Orientações didáticas

Atividades

Na atividade **10**, item **d**, no momento da correção, indique para os estudantes que é necessário realizar uma construção como aquelas feitas anteriormente para garantir que o ponto marcado é igual à raiz de 10. Segue uma possibilidade de construção que foi feita nesta Unidade.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Representação dos conjuntos numéricos

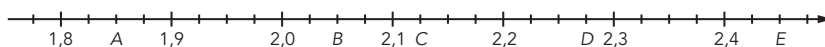
Na BNCC

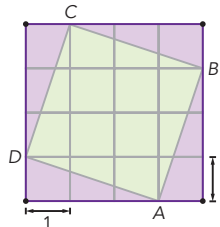
Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA02** ao apresentar uma formalização simples dos conjuntos numéricos estudados e a relação entre eles. Mobiliza com maior ênfase a **CG02** e a **CG04**, por favorecer o pensamento científico e a comunicação de conclusões, seja entre pares, seja para o professor. Mobiliza, ainda, a **CEMAT02**, a **CEMAT04**, a **CEMAT05** e a **CEMAT06**, principalmente por trabalhar rudimentos de provas matemáticas, incentivando a argumentação e a necessidade de diversas abordagens, incluindo gráficas e tecnológicas, para resolução das atividades.

Aproveite para refletir com os estudantes sobre como a etimologia das palavras pode ajudar a compreender conceitos matemáticos. Construa com eles uma lista com outros termos matemáticos, sua origem e respectivo significado. Esse tipo de estratégia ajuda a desenvolver leituras inferenciais.

Discuta com os estudantes a representação de cada conjunto numérico e o porquê de o conjunto dos números racionais não poder ser dado pela enumeração de seus elementos, como é feito com os conjuntos dos números naturais e dos números inteiros. Esse fato ocorre porque entre dois números racionais há sempre outro número racional, e entre dois números reais há sempre um número racional. Se julgar apropriado, comente com os estudantes o fato de o conjunto dos números racionais ser denso.

9. Considerando a reta numérica a seguir, escreva no caderno os números que são representados pelos pontos *A*, *B*, *C*, *D* e *E*. A: 1,85; B: 2,05; C: 2,125; D: 2,275; E: 2,45.

Banco de imagens/Arquivo da Editora

10. A figura a seguir mostra um quadrado, cuja medida do lado é 4, dividido em 16 quadradinhos unitários.

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Prove que o quadrilátero *ABCD* é um quadrado. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

b) Calcule a medida de área do quadrado *ABCD*. 10

c) Calcule a medida do lado do quadrado *ABCD*. $\sqrt{10}$

d) Indique, numa reta numérica, o ponto correspondente ao número que indica a medida do lado do quadrado *ABCD*. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Representação dos conjuntos numéricos

Os números podem ser organizados em conjuntos.

Há uma simbologia convencionada para representar os principais conjuntos formados pelos números que estudamos até agora. Acompanhe, a seguir, como cada conjunto pode ser representado.

Conjunto dos números naturais

É representado por $\mathbb{N}$. Então:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots\}$

Conjunto dos números inteiros

É representado por $\mathbb{Z}$. Então:

- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$

A letra **Z** é a inicial da palavra alemã *Zahl*, que significa "número" (pode ser traduzida também por "algarismo" ou "dígito"). Provavelmente, essa foi a razão de ter sido escolhida para representar o conjunto dos inteiros.

Conjunto dos números racionais

É representado por $\mathbb{Q}$. Então:

- $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \middle| m \text{ e } n \text{ inteiros e } n \neq 0\right\}$

O sinal | significa "tal que".

A letra **Q** é a inicial da palavra "quociente" e foi escolhida para representar os números racionais provavelmente porque todo racional é o quociente da divisão de 2 números inteiros. De origem latina, a palavra "quociente" vem de *quotiens*, que significa "quantas vezes".

Conjunto dos números reais

É representado por $\mathbb{R}$. Então:

- $\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ é racional ou irracional}\}$

Reproduza, na lousa, o diagrama que mostra a relação de inclusão dos conjuntos numéricos estudados e explore-o com os estudantes. Por exemplo, solicite a alguns estudantes que venham marcar, no local correto, onde estariam nesse diagrama:

- um exemplo de número natural;
- um exemplo de número não natural;
- um exemplo de número inteiro;
- um exemplo de número inteiro não natural;
- um exemplo de número racional;
- um exemplo de número racional não inteiro;
- um exemplo de número irracional;
- um exemplo de número real;
- um exemplo de número real não racional;
- um exemplo de número real não irracional.

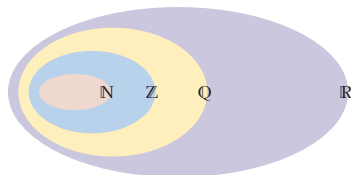
O diagrama a seguir é uma representação dos conjuntos numéricos e da relação "estar contido em" entre esses conjuntos.

Todo número natural é um número inteiro, mas há números inteiros que não são naturais, como −1, −2 e −3.

Todo número inteiro é um número racional, mas há números racionais que não são inteiros, como $\frac{1}{2}$, $\frac{7}{3}$, $-\frac{3}{10}$.

ℕ ℤ ℚ ℝ

Banco de imagens/Arquivo da editora

Todo número racional é um número real, mas há números reais que não são racionais (são os irracionais).

Atividades

Faça as atividades no caderno.

11. Copie o quadro no caderno e preencha-o assinalando a que conjunto (ou conjuntos) pertence cada número dado.

Número	ℕ	ℤ	ℚ	ℝ
10	x	x	x	x
−10		x	x	x
$\frac{1}{10}$			x	x
0,10101010...			x	x
0,101001000...				x
1,33			x	x
−1,3333...			x	x
−1,343343334...				x
133	x	x	x	x
−133		x	x	x

12. Dê 3 exemplos de:

Exemplos de respostas:

a) números naturais; 0, 1, 2, 3, ...

b) números inteiros não naturais; −1, −2, −3, ...

c) números racionais não inteiros; $\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{4}$, $\frac{5}{2}$, ...

d) números reais não racionais. 0,101001000...; 3,123456789101112...; −6,121122111222...

Arredondamentos

Como podemos localizar na reta numérica o número $\sqrt{5} + \sqrt{2}$? E o número 3π?

Quando adicionamos ou multiplicamos 2 números reais, obtemos como resultados números reais. No caso de operarmos com números irracionais, é comum utilizarmos aproximações para ter ideia dos resultados.

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Orientações didáticas

Atividades

Neste bloco de atividades, os estudantes devem mobilizar os conhecimentos construídos sobre os conjuntos numéricos estudados. Este bloco também é indicado para os estudantes resolverem individualmente. Essa é uma forma de verificar o aprendizado de cada um e de levantar as dúvidas, sendo, então, já nesta etapa, a oportunidade para uma avaliação processual. Para correção, solicite que estudantes que mostraram um bom traquejo com o tema venham realizar algumas atividades na lousa.

Arredondamentos

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA02** e **EF09MA03** ao explorar aproximações para números racionais e operações entre eles usando esses valores aproximados. A atividade **13** da seção *Atividades* mobiliza com maior ênfase a **CG05** e a **CEMAT05**, pois requer o uso de tecnologias digitais para sua resolução.

Discuta com os estudantes como devem fazer essas aproximações, sejam por falta ou por excesso. É um bom momento para revisar operações com números positivos e números negativos e rever as regras de sinais.

Orientações didáticas

Arredondamentos

Proponha que os estudantes façam a leitura do texto e que digam se compreenderam os cuidados que devem ser tomados com as casas decimais ao arredondar um número. Enfatize que, se o primeiro algarismo do número a ser desprezado for menor do que 5, os que permanecerem não sofrerão alteração e que, se o primeiro algarismo do número a ser desprezado for igual ou maior do que 5, então adicionaremos 1 ao último algarismo que permanecerá.

Quando consideramos um valor aproximado, dizemos que **arredondamos** o número. Quando fazemos a aproximação por determinado número de casas decimais, desprezamos as demais casas, tomando os seguintes cuidados:

- se o primeiro algarismo do número a ser desprezado for menor do que 5, os que permanecerem não sofrerão alteração;
- se o primeiro algarismo do número a ser desprezado for igual ou maior do que 5, então adicionaremos 1 ao último algarismo que permanecerá.

No primeiro caso, obtemos um valor aproximado **por falta** (menor do que o valor exato); já no segundo, um valor aproximado **por excesso** (maior do que o valor exato).

Exemplo

Sendo $a = 2{,}4681012141...$ e $b = 1{,}3579111315...$, note os valores aproximados de a e de b:

- $a = 2{,}4681012141...$
  com 5 casas: $a \simeq 2{,}46810$ (por falta)
  com 4 casas: $a \simeq 2{,}4681$ (por falta)
  com 3 casas: $a \simeq 2{,}468$ (por falta)
  com 2 casas: $a \simeq 2{,}47$ (por excesso)
  com 1 casa: $a \simeq 2{,}5$ (por excesso)
- $b = 1{,}3579111315...$
  com 5 casas: $b \simeq 1{,}35791$ (por falta)
  com 4 casas: $b \simeq 1{,}3579$ (por falta)
  com 3 casas: $b \simeq 1{,}358$ (por excesso)
  com 2 casas: $b \simeq 1{,}36$ (por excesso)
  com 1 casa: $b \simeq 1{,}4$ (por excesso)

De acordo com os valores anteriores, vamos calcular um valor aproximado para $a + b$, considerando a e b com 4 casas decimais. Acompanhe:

$$\begin{array}{r} a \simeq 2{,}4681 \\ b \simeq 1{,}3579 \quad + \\ \hline a + b \simeq 3{,}8260 \end{array}$$

Agora, vamos calcular um valor aproximado para $a \cdot b$ a partir dos valores arredondados de a e de b com 2 casas decimais:

$$a \simeq 2{,}47 \text{ e } b \simeq 1{,}36$$

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Proposta para o estudante

Classifique cada afirmação como verdadeira ou falsa.

a) Todos os números naturais pertencem ao conjunto dos números inteiros.
b) Nem todo número racional é inteiro.
c) Nenhum número irracional é racional.
d) Nenhum número irracional é real.
e) Existe número real que não é racional.

Respostas:
a) V **b)** V **c)** V **d)** F **e)** V

Multiplicamos os números sem as vírgulas:

$$\begin{array}{r} 247 \\ \times\ 136 \\ \hline 1482 \\ 741\ \ \\ 247\ \ \ \ + \\ \hline 33592 \end{array}$$

Na resposta, colocamos a vírgula deixando tantas casas decimais quantas são as de *a* mais as de *b*. Nesse caso, *a* e *b* têm 2 casas decimais, totalizando 4 casas:

$$a \cdot b \simeq 3{,}3592$$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

13. Use uma calculadora para calcular com 2 casas decimais.

a) $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ Aproximadamente 3,65.

b) $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ Aproximadamente 0,83.

14. Agora calcule as operações indicadas em cada item com 3 casas decimais.

a) $2\sqrt{2}$ Aproximadamente 2,828.

b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ Aproximadamente 1,118.

c) $\frac{\sqrt{5}}{2} - 2\sqrt{2}$ Aproximadamente −1,710.

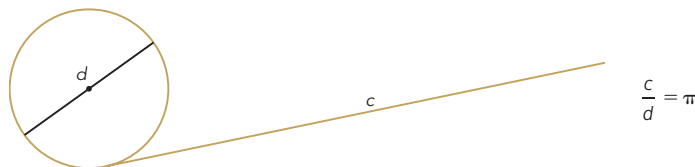
d) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}$ Aproximadamente 3,162.

15. Determine a fração geratriz de cada número decimal e calcule os resultados.

a) $2{,}33333... \cdot 1{,}75$ $\frac{49}{12}$

b) $1{,}25555... \cdot 4{,}44444...$ $\frac{452}{81}$

c) $0{,}757575... : 0{,}666666...$ $\frac{25}{22}$

16. O número $\pi = 3{,}1415926535897932...$ é a razão entre as medidas do comprimento de uma circunferência e do diâmetro dela.

a) Qual é o valor aproximado de π com 2 casas decimais? E com 4 casas decimais? 3,14; 3,1416.

b) Qual é, aproximadamente, a medida de perímetro de uma praça circular de diâmetro medindo 80 metros? Use π com 2 casas decimais. Aproximadamente 251,2 m.

c) Calcule a medida aproximada do diâmetro da Terra, em centenas de quilômetros, sabendo que a linha do equador mede 40 000 km, aproximadamente. Aproximadamente 12 700 km (aproximadamente 127 centenas de quilômetros).

17. Na abertura desta Unidade, conhecemos o número de ouro. Um retângulo que respeite a proporção áurea e cujo lado menor meça 4 cm terá o lado maior com qual medida? Dê o valor exato e o aproximado com 2 casas decimais. $2 + 2\sqrt{5}$ cm; aproximadamente 6,47 cm.

18. Construa, no caderno, um retângulo com as medidas aproximadas do retângulo citado na atividade anterior. Depois, imagine que você é um *designer* e crie um logotipo utilizando esse retângulo. Resposta pessoal.

Orientações didáticas

Atividades

Retome com os estudantes os conceitos de números opostos e valor absoluto (ou módulo) para números inteiros. Incentive-os a exporem o que sabem do assunto. Pergunte: "E para números racionais não inteiros, vocês sabem dar exemplos de números opostos?". Peça que usem as formas de fração e decimal desses números. Pergunte: "E como vocês definiriam o módulo para números racionais não inteiros?".

Discuta as ideias apresentadas e, em seguida, trabalhe com os exemplos do Livro do Estudante para conceituar números racionais opostos e módulo de um número racional qualquer.

Nestas atividades, os estudantes devem mobilizar seus conhecimentos sobre números racionais e números irracionais; obter aproximações da forma decimal de números irracionais e aplicar esses valores aproximados nos cálculos indicados; e resolver problemas com números reais. Sugerimos que essas atividades sejam realizadas em duplas, o que promove a ampliação de estratégias de resolução. Corrija cada atividade após sua realização, para que possíveis dúvidas sejam sanadas, o que pode auxiliar na resolução das atividades seguintes.

Verifique como os estudantes procedem na atividade **15**. Espera-se que eles percebam que os números expressos na forma decimal apresentados são dízimas periódicas ou decimais exatos, portanto são números racionais. Sendo assim, as operações podem ser calculadas expressando esses números na forma de fração.

Aproveite o contexto do item **c** da atividade **16** para um trabalho interdisciplinar com **Geografia** e **Ciências**, a fim de ampliar os conhecimentos sobre o nosso planeta. Verifique se os estudantes compreendem a linha do equador, mostre no globo terrestre ou proponha que investiguem autonomamente informações complementares sobre o tema.

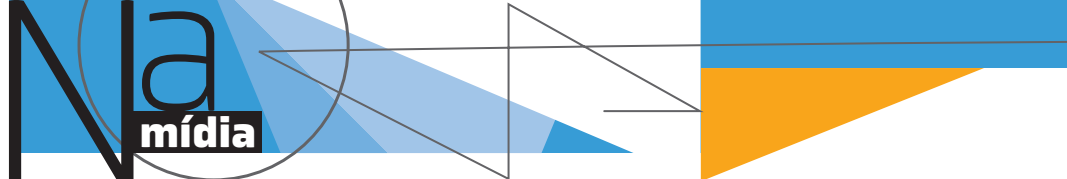
Para a atividade **18**, espera-se que os estudantes construam um retângulo cuja altura mede 4 cm de comprimento e a base mede aproximadamente 6,47 cm (6,5 cm é uma boa aproximação, considerando as réguas que normalmente são utilizadas).

Orientações didáticas

Na mídia

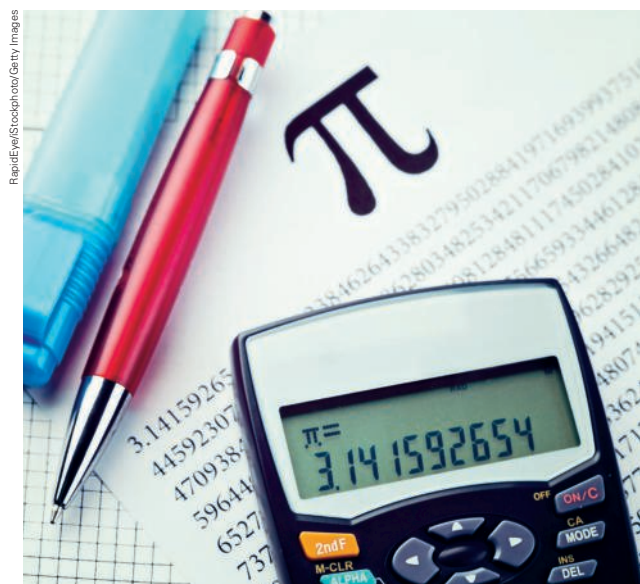
Na BNCC

Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Ciência e Tecnologia* ao propor a análise de números irracionais que têm profunda interferência nas áreas ligadas às Ciências. Também é possível discutir o quanto o desenvolvimento da tecnologia possibilitou o conhecimento da quantidade de casas decimais desses números.

Aproveitando o texto sobre a oficialização do Dia Internacional da Matemática, que também é o dia do número π (pi), exploram-se questões sobre elementos da circunferência e números irracionais famosos. Comente que há também o Dia Nacional da Matemática no Brasil, celebrado em 6 de maio.

Dia do Pi é oficializado como o Dia Internacional da Matemática

"Há mais coisas entre o céu e a terra do que supõe nossa vã filosofia", disse William Shakespeare. A matemática é uma delas. Quem a estuda sabe que ela está em tudo: no GPS (Sistema de Posicionamento Global), no planejamento de sistemas econômicos e sociais, no processamento de tomografias e ressonâncias magnéticas e até mesmo em atividades cotidianas da vida humana, como na música e na arte. Com tamanha onipresença, já estava mais que na hora de ela ganhar o próprio dia.

A Unesco oficializou, nesta terça-feira [26/11/2019], o Dia Internacional da Matemática (IDM, na sigla em inglês) em 14 de março. Liderado pela União Internacional de Matemática (IMU, na sigla em inglês), o projeto incentiva escolas, universidades e outras instituições a aproveitarem a data para criar eventos e atividades que mostrem a importância da Matemática para os estudantes e para a sociedade.

RapidEye/iStockphoto/Getty Images

Para obter uma aproximação do número usando a calculadora científica, aperte a tecla "π" e depois a tecla "=".

Reprodução/IDM

Logotipo do Dia Internacional da Matemática.

O dia 14 de março, escrito como 3/14 no padrão americano, já era conhecido como o Dia do Pi (π), constante matemática que começa com 3,14159265359... e tem outros infinitos dígitos na sequência.

Um *site* oficial [https://www.idm314.org/] da comemoração foi criado para que matemáticos possam cadastrar as atividades que serão promovidas. Para animar as festividades e estimular a criatividade, a organização vai anunciar a cada ano um novo tema para embalar a data. [...]

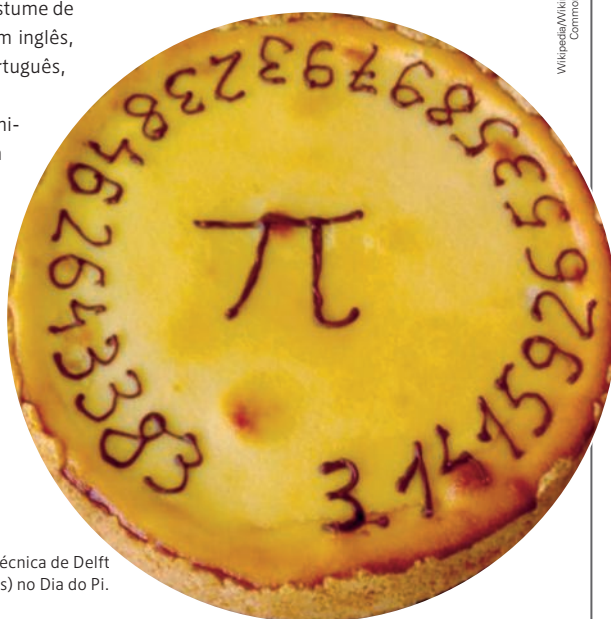
MATEMÁTICA ganha um dia para chamar de seu: 14 de março. *Impa*, Rio de Janeiro, 27 nov. 2019. Disponível em: https://impa.br/noticias/a-matematica-ganha-um-dia-todo-seu-14-de-marco/. Acesso em: 6 abr. 2022.

Proposta para o professor

Para saber mais, acesse o *link* a seguir, que contém, em PDF, o texto "Destaque Número Pi", organizado por Flemming, D. M., na disciplina de Tópicos de Matemática Elementar I, do Curso de Matemática da Unisul, 2006, disponível em: https://www.uaberta.unisul.br/sgc/downloadArquivoConteudo.processa?ead=6.34728218514393E111519860828647&arquivoId=13686&comunidadeId=1. Acesso em: 24 jun. de 2022.

No Dia Internacional da Matemática, por ser também o Dia do Pi, em alguns países existe o costume de comer tortas recheadas com frutas, pois, em inglês, as palavras *pi* e *pie* (que significa, em português, "torta") têm o mesmo som.

Em 2021, o recorde mundial de determinação dos dígitos que se seguem à vírgula no pi foi estabelecido por pesquisadores da Suíça, da Graubünden University of Applied Sciences, que, utilizando um supercomputador, calcularam 62,8 trilhões de dígitos ao longo de 108 dias e 9 horas. O recorde anterior pertencia a Emma Haruka Iwao, uma engenheira do Google do Japão que, em 2019, calculou 31 trilhões de dígitos após a vírgula em 121 dias.

Wikipedia/Wikimedia Commons 2.0

Torta feita pela Universidade Técnica de Delft (Países Baixos) no Dia do Pi.

3,141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307816406286208998628034825342117067982148086513282306647093844609550582231725359408128481117450284102701938521105559644622948954930381964428810975665933446128475648233786783165271201909145648566923460348610…

Essa é uma aproximação de π com 270 dígitos.

1. O número π é resultado da divisão da medida do comprimento de uma circunferência pela medida do diâmetro dela. Relembre do que você já estudou, ou faça uma pesquisa se necessário, sobre os elementos de uma circunferência e responda:

a) O que é raio? Raio é qualquer segmento de reta com extremidades no centro da circunferência e em um ponto qualquer dela.

b) O que é corda? Em uma circunferência, a corda é qualquer segmento de reta que liga 2 de seus pontos.

c) O que é diâmetro? Diâmetro é qualquer corda da circunferência que passe pelo centro.

d) Que relação podemos estabelecer entre o diâmetro e o raio de uma circunferência? A medida do diâmetro de uma circunferência é igual ao dobro da medida do raio dela.

2. Utilizando um barbante e uma régua, meça o comprimento da circunferência da imagem da torta e, depois, meça o diâmetro dela. Em seguida, divida o valor obtido na medida do comprimento pelo valor da medida do diâmetro. Que número você obteve? Resposta esperada: Um resultado próximo a 3,14.

3. O π é um número irracional. Além dele, existem outros números irracionais famosos, como o número áureo ($\varphi \simeq 1{,}61803$). Faça uma pesquisa sobre os números irracionais e registre suas conclusões. Resposta pessoal.

Orientações didáticas

Na mídia

Organize os estudantes em grupos, de modo que possam se expressar oralmente sobre a presença da matemática "em tudo". Incentive-os a citarem onde identificam algumas aplicações da matemática.

Discuta o texto com os estudantes e proponha as questões para serem feitas em duplas, o que enriquecerá o aprendizado. Na atividade **3**, na pesquisa sobre os números irracionais, espera-se que os estudantes citem outro número irracional famoso – o número e, a constante de Euler –, já citado no início deste capítulo. A irracionalidade do número **e** foi provada por Leonhard Euler, em 1737; e a de π, por Johann Heinrich Lambert, por volta de 1760. O importante nessa pesquisa é que os estudantes compreendam que os números irracionais são todos aqueles que não podem ser escritos como uma fração $\frac{p}{q}$ de números inteiros.

Aproveite o trabalho com essa seção para conversar com os estudantes sobre o TCT *Ciência e Tecnologia*. Discuta também quanto o desenvolvimento da tecnologia possibilitou o conhecimento da quantidade de casas decimais dos irracionais. Por exemplo, em 1973, a quantidade de casas decimais conhecidas para o número pi era de 1 milhão; em 2013, já se conheciam 8 quatrilhões de casas decimais, calculadas pela Universidade de Santa Clara, na Califórnia (EUA).

Proposta para o professor

Para ampliação e enriquecimento, sugerimos outras fontes sobre o número pi:

Viagem ao número pi: quadraturas e Arquimedes, livro de Adilson Pedro Roveran, Appris Editora, Curitiba, 2017. O autor faz uma abordagem dos temas vinculada ao uso da história da Matemática com o intuito de envolver efetivamente os estudantes nas atividades, tornando as aulas mais dinâmicas.

Viver é etcétera: hoje é dia do π (pi), artigo de Bruno Vaiano, publicado em 2017 e atualizado em 2018, disponível em: https://super.abril.com.br/coluna/supernovas/viver-e-etcetera-hoje-e-dia-do-%CF%80-pi/ (acesso em: 10 maio 2022), em que versa sobre características do pi: "O 3,14 está escondido em tudo que conhecemos: no átomo de hidrogênio, nas curvas que rios caudalosos abrem na Amazônia, no contorno da espiral da Via Láctea".

Orientações didáticas

Na História

Na BNCC

Esta seção mobiliza com maior ênfase a **CG01** e a **CEMAT01** ao mostrar a Matemática como fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas e em diferentes momentos históricos. Mobiliza também a **CG02** e a **CG05**, além da **CEMAT02**, da **CEMAT04**, da **CEMAT05** e da **CEMAT06**.

O trabalho com esta seção pode ser feito com os estudantes reunidos em pequenos grupos (de até 4 integrantes). Depois da leitura do texto, solicite que registrem no caderno os pontos de maior interesse do grupo e outros que geraram dúvidas. Em seguida, promova uma roda de conversa para discutir os aspectos levantados pelos estudantes e fazer um fechamento.

Na roda de conversa, aproveite e pergunte aos estudantes se eles acreditam que crises entre os cientistas acontecem em nossos dias. Caso a resposta seja afirmativa, quais seriam os motivos? Desse modo estará sendo incentivada a elaboração de inferências. No entanto, é importante que os pontos de vista dos estudantes sejam respaldados em informações oriundas de fontes confiáveis. Essas recomendações visam levar metodologias ativas para a sala de aula, e trabalham ao mesmo tempo a **CG07** e a **CG09**.

A primeira crise no desenvolvimento da Matemática

Há cerca de 4 mil anos, os escribas da Mesopotâmia (região hoje ocupada por Iraque, Kuwait e parte da Síria) construíram tabelas de raízes quadradas. Usualmente, quando a resolução de um problema de Geometria ou Álgebra dependia da extração de uma raiz quadrada, os dados eram ajeitados de modo que essa raiz fosse dada por uma aproximação que estivesse em uma dessas tabelas. Isso significava tomar como resposta uma representação finita no sistema de numeração de base 60, que eles adotavam. Por exemplo, na base 60, a fração decimal que indicamos por 1,5 seria expressa por 1;30 (usando nossos algarismos e o ponto e vírgula como separatriz), porque 30 é a metade de 60, assim como 5 é a metade de 10. Por exemplo, o número $\sqrt{2}$ (notação moderna) era frequentemente aproximado pela fração sexagesimal 1;25 $\left(\text{que corresponde a } 1 + \frac{25}{60} \simeq 1{,}417\right)$, mas há um escrito babilônico em que aparece uma aproximação melhor: 1;24,51,10 $\left(1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \simeq 1{,}41421219\right)$.

Os babilônios, que só cultivavam a Matemática prática, possivelmente acreditavam que a representação sexagesimal de $\sqrt{2}$ era finita, bastando, para concluí-la, levar os cálculos um pouco mais à frente, mas não viam necessidade disso. Ou seja, acreditavam, talvez, que toda raiz quadrada de um inteiro positivo era um número racional.

Já com os gregos, que priorizavam sobretudo a teoria alicerçada no rigor lógico, a história foi outra. A Escola Pitagórica (corrente da filosofia grega fundada por Pitágoras) desenvolveu a Matemática por muito tempo considerando a seguinte premissa: os números inteiros positivos, e as razões entre eles, bastavam para quantificar tudo. No fundo, o universo numérico dos gregos se limitava, modernamente falando, ao conjunto dos números racionais positivos.

Acontece que, um dia, um membro da própria Escola Pitagórica descobriu, essencialmente, o seguinte (adaptando sua descoberta à linguagem matemática moderna): não há nenhum número racional cujo quadrado seja igual a 2. Geometricamente, esse resultado equivale ao seguinte: na figura a seguir, em que os lados do quadrado correspondem à unidade de medida e, portanto, o ponto I representa o número 1, não há nenhum número racional representado pelo ponto P, com $\overline{OP} \cong \overline{OK}$, contrariamente ao que suas teorias sustentavam. Ou seja, havia pelo menos uma lacuna no campo dos números racionais, entre 1,4 e 1,5: o número que hoje simbolizamos por $\sqrt{2}$. A descoberta de que haviam desenvolvido parte de sua matemática sobre um pressuposto equivocado abalou a viga mestra da filosofia pitagórica: "Tudo tem um número" (inteiro positivo).

Banco de imagens/Arquivo da editora

Como os gregos não conseguiam conceber os números irracionais, substituíram os números reais (racionais e irracionais), em sua álgebra, por segmentos de reta – na figura anterior, $\overline{OP}$ representa $\sqrt{2}$, e $\overline{OI}$ representa 1. Na obra *Os Elementos*, de Euclides, por exemplo, as equações derivam de problemas geométricos, e suas raízes são segmentos de reta.

Após a invenção das frações decimais (difundidas no Ocidente a partir do século XVI), ficou mais fácil reconhecer os números irracionais: eles se caracterizam por ter uma representação decimal infinita **não periódica**.

Mas como saber que as representações decimais de $\sqrt{2}$ e de $\sqrt{3} = 1{,}7320508...$, por exemplo, não são periódicas? Por verificações, não é possível, porque a representação decimal deles é infinita. Só mesmo provando, o que Aristóteles (384 a.C.-322 a.C.) fez para $\sqrt{2}$ e Teodoro de Cirene (que viveu por volta de 390 a.C.) fez para $\sqrt{3}$.

Por sua vez, o grego Heron de Alexandria (que viveu em torno do ano 100) usou um notável método para obter aproximações cada vez melhores de uma raiz quadrada irracional, hoje muito usado por computadores. Isso, porém, aconteceu cerca de 400 anos depois da morte de Pitágoras, em uma fase em que a matemática grega já trilhava também o caminho das aplicações práticas.

Fontes dos dados: EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Trad. de Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 1994; BUNT, Lucas N. H.; JONES, Philip S.; BEDIENT, Jack. D. *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. New York: Dover Publications, 1988; BAUMGART, John K. *Historical Topics for the Mathematics Classroom*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 1989.

1. Note o número $a = 2{,}01001000100001...$ e suponha que o padrão da parte decimal desse número se repita indefinidamente.

a) Qual é a vigésima casa decimal desse número? 1

b) a é um número irracional? Por quê? Sim, porque tem representação decimal infinita não periódica.

2. Considere o número $b = 3{,}10110111011110...$ e suponha também que o padrão da parte decimal desse número se repita indefinidamente. Usando o número a da atividade anterior, calcule $a + b$. $a + b = 5{,}111... = 5\frac{1}{9} = \frac{46}{9}$

3. Levando em conta as respostas das atividades **1** e **2**, qual das 2 conclusões é verdadeira?

a) A soma de 2 números irracionais é sempre um número irracional.

b) A soma de 2 números irracionais pode ser um número racional.

A afirmação **b**, porque $a + b$ não é irracional, embora a e b o sejam.

4. Sabe-se que, se não há outros fatores primos no denominador de uma fração irredutível além de 2 e 5, sua representação decimal é finita. Do mesmo modo, se uma fração irredutível tem representação decimal finita, sabemos que seu denominador não contém outros fatores primos além de 2 e 5. Note o exemplo seguinte:

$$\frac{1}{20} = \frac{1}{2^2 \cdot 5} = \frac{1 \cdot 5}{2^2 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{5}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{5}{100} = 0{,}05$$

Use esse mesmo raciocínio para mostrar que $\frac{3}{4} = 0{,}75$. $\frac{3}{4} = \frac{3}{2^2} = \frac{3 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{75}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{75}{100} = 0{,}75$

5. Sem dividir o numerador pelo denominador e sem usar o método da atividade anterior, apenas decompondo o denominador em fatores primos, conclua quais das frações seguintes têm representação decimal infinita.

$$\frac{3}{8}, \frac{13}{125}, \frac{9}{30}, \frac{7}{40}, \frac{2}{31} \text{ e } \frac{5}{34}$$

$\frac{2}{31}$ e $\frac{5}{34}$

6. Use uma calculadora e verifique que o erro cometido no escrito babilônico na aproximação de $\sqrt{2}$ por $1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$ é menor do que 1 milionésimo. A diferença é 0,00000066608...

7. Dê um exemplo de um número irracional que esteja entre $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$. Resposta pessoal.

Orientações didáticas

Na História

Na atividade **3**, peça que eles exemplifiquem adições de dois números irracionais cuja soma seja um número racional, já que a conclusão do item **a** é falsa. Comente com os estudantes que uma maneira de provar a falsidade de uma afirmação é apresentar contraexemplos

Na atividade **5**, espera-se que os estudantes percebam que as duas primeiras frações têm representação decimal exata, pois o denominador 8 apresenta apenas o fator primo 2, já que $2^3 = 8$, e o denominador $125 = 5^3$ só tem o fator primo 5. Na fração $\frac{2}{31}$, como o denominador é o número primo 31, já podem concluir que a representação decimal dessa fração é infinita. Para as demais frações, eles precisam fazer efetivamente a decomposição em fatores primos de seus denominadores. Por exemplo: $30 = 2 \cdot 15 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, e assim podem concluir que a fração $\frac{9}{30}$ tem representação decimal infinita. Ressalte para os estudantes que, nesse caso, todas essas representações decimais infinitas são periódicas, já que se tratam de números racionais (dados por frações de inteiros).

Verifique como os estudantes resolvem a atividade **7**. Uma maneira possível é perceber que a raiz quadrada de um número entre 2 e 3 está entre $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$. A garantia de que essa raiz quadrada não é exata, para ser um número irracional, vem do fato de que 2^2 já é 4, então o quadrado de qualquer número entre 2 e 3 é maior do que 3.

O trabalho com essa seção explora o pensamento computacional e favorece o desenvolvimento da **CG01**, da **CG02** e da **CG05**, além da **CEMAT01**, da **CEMAT02**, da **CEMAT04**, da **CEMAT05** e da **CEMAT06** da BNCC.

Orientações didáticas

Potência de expoente inteiro

Na BNCC

Esta seção mobiliza as habilidades **EF09MA01**, **EF09MA02**, **EF09MA03** e **EF09MA04** ao trazer atividades e orientações que buscam levar o estudante a reconhecer um número irracional como um número real, reconhecer que há segmentos de retas que não são expressos por um número racional e, por fim, efetuar os cálculos relativos a esses conteúdos em aplicações e na resolução de problemas. Além disso, a **EF09MA18** também é mobilizada ao trabalhar números gigantes ou muito pequenos. A atividade **5** proposta em *Atividades* favorece o desenvolvimento do TCT *Educação Financeira*. O trabalho com as atividades **11** a **23** favorece o desenvolvimento da **CG02** e da **CG09** por envolver a pesquisa e o pensamento científico, valorizando o espírito crítico, e por exercitar a cooperação. A seção também valoriza a **CEMAT02** e a **CEMAT08** ao trazer atividades que buscam desenvolver o raciocínio lógico e matemático, interagindo com seus pares.

Neste capítulo, retomamos o trabalho com potências e raízes, estendendo para base real e expoente racional e ampliando o trabalho realizado nos anos anteriores (habilidades **EF08MA01** e **EF08MA02**, por exemplo), além de tratar das operações envolvendo números reais, que servirá de base para a continuidade dos estudos em Matemática no Ensino Médio. Os temas desenvolvidos são: potências de base real com expoente inteiro, propriedades da potenciação para base real, notação científica e trabalho com medidas envolvendo os prefixos nas unidades de medida do Sistema Internacional de Unidades, raiz quadrada, equações do tipo $x^2 = a$ e suas soluções reais, raiz cúbica, raiz quarta, equações do tipo $x^n = a$, potência de expoente racional, simplificação de raízes, raiz de um produto, adição, subtração, adição, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação com radicais.

Neste tópico, são retomadas, ampliadas e exploradas as potências de expoente inteiro, estendidas para base real.

Antes de tratar dos exemplos e textos do livro, converse com os estudantes sobre potências de base racional e expoentes inteiros, deixando que exponham os conhecimentos que já construíram sobre esse assunto. Faça um resumo na lousa das principais conclusões.

Em seguida, revise mais detalhadamente as potências de expoente negativo, pois mais adiante, junto com as propriedades da potenciação, esse cálculo será muito usado, por exemplo, para exprimir números na notação científica.

Proposta para o estudante

1. Escreva 11 trilhões usando apenas algarismos.

2. Escreva 19 trilhões envolvendo um produto com potência de base 10.

Resoluções:

1. 11 trilhões = 11 000 000 000 000

2. 19 trilhões = 19 000 000 000 000

Possível resposta: $19 \cdot 10^{12}$

CAPÍTULO 2

Potências e raízes

EF09MA01
EF09MA02
EF09MA03
EF09MA04
EF09MA18

Potência de expoente inteiro

Recordemos que 10^6 é a **potência de base 10 e expoente 6**.

As potências de base 10 são especialmente usadas nas diversas ciências para representar números muito grandes ou muito pequenos.

Temos:

$10^2 = 10 \cdot 10 = 100$

$10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$

$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$

Para *a* real e *n* inteiro, $n \geqslant 2$:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Analise a sequência dos números formados pelo algarismo 1 seguido de 2 zeros, 3 zeros, 4 zeros, etc.:

100 → 10^2; 1 000 → 10^3; 10 000 → 10^4; 100 000 → 10^5; ...

Os números vão sendo multiplicados por 10.

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

$$10^{23} = \underbrace{100\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000}_{23 \text{ zeros}}$$

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

$$1 \text{ quatrilhão} = \underbrace{1\,000\,000\,000\,000\,000}_{15 \text{ zeros}}$$

$$1 \text{ quatrilhão} = 10^{15}$$

Reprodução do Livro do Estudante em tamanho reduzido.

Agora, acompanhe a sequência da direita para a esquerda:

100 1 000 10 000 100 000

10^2 10^3 10^4 10^5 ←

Para a esquerda, os números vão sendo divididos por 10. Consequentemente, a quantidade de zeros e o expoente diminuem. Prosseguindo com a divisão, temos:

Assim:

$10^1 = 10$

$10^0 = 1$

$$a^1 = a$$
$$a^0 = 1 \text{ (para } a \neq 0)$$

Continuando a divisão ainda mais, começam a aparecer zeros à esquerda do algarismo 1 e o expoente fica negativo:

Assim:

$10^{-1} = 0{,}1 = \frac{1}{10} = \frac{1}{10^1}$ $\quad 10^{-2} = 0{,}01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$ $\quad 10^{-3} = 0{,}001 = \frac{1}{1\,000} = \frac{1}{10^3}$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \text{ (para } a \neq 0)$$

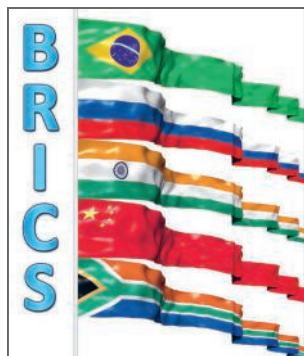
Assim, recordamos como se calculam os valores das potências a^n, de expoente n inteiro e base real a.

Conheça os BRICS: Brasil, Rússia, Índia, China e África do Sul

A ideia dos BRICS foi formulada pelo economista-chefe da Goldman Sachs, Jim O'Neil, em estudo de 2001, intitulado "Building Better Global Economic BRICs". Fixou-se como categoria da análise nos meios econômico-financeiros, empresariais, acadêmicos e de comunicação. Em 2006, o conceito deu origem a um agrupamento, propriamente dito, incorporado à política externa de Brasil, Rússia, Índia e China. Em 2011, por ocasião da III Cúpula, a África do Sul passou a fazer parte do agrupamento, que adotou a sigla BRICS.

O peso econômico dos BRICS é certamente considerável. Entre 2003 e 2007, o crescimento dos quatro países representou 65% da expansão do PIB mundial. Em paridade de poder de compra, o PIB dos BRICS já supera hoje o dos EUA ou o da União Europeia. Para dar uma ideia do ritmo de crescimento desses países, em 2003 os BRICS respondiam por 9% do PIB mundial, e, em 2009, esse valor aumentou para 14%. Em 2010, o PIB conjunto dos cinco países (incluindo a África do Sul) totalizou US$ 11 trilhões, ou 18% da economia mundial. Considerando o PIB pela paridade de poder de compra, esse índice é ainda maior: US$ 19 trilhões, ou 25%. [...]

BRASIL. Ministério do Planejamento. Conheça os BRICS. *Ipea*, [*s. l.*], [2014]. Disponível em: www.ipea.gov.br/forumbrics/pt-BR/conheca-os-brics.html. Acesso em: 7 abr. 2022.

baur/Shutterstock

Bandeiras estilizadas dos países: Brasil, Rússia, Índia, China e África do Sul.

Orientações didáticas

Potência de expoente inteiro

Aproveite o texto sobre os BRICS para fazer um trabalho interdisciplinar com os componentes curriculares de História e Geografia, que podem tratar do surgimento e desenvolvimento histórico dos BRICS, e aprofundar o estudo da importância desse agrupamento de países na economia mundial e na política.

O tópico contribui para o desenvolvimento do pensamento indutivo, pois, a partir de exemplos, determina-se uma regra. Incentive os estudantes a organizar as informações como esquemas ou ilustrações, relacionando cada regra a um exemplo. Desse modo eles poderão organizar o pensamento a fim de desenvolver habilidades argumentativas

Proposta para o professor

Para enriquecer e ampliar seu trabalho, sugerimos o texto: SANCHES, Mariana. Qual é o futuro dos Brics após guerra da Ucrânia – e como Brasil se equilibra no bloco? *BBC News Brasil*, 2022. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/brasil-60991122. Acesso em: 12 maio 2022.

Orientações didáticas

Potência de expoente inteiro

Explore as informações do quadro com os estudantes. Verifique se compreendem a forma de expressar a área e a população dos países membros do BRICS e se relacionam esse formato com a notação científica, mostrando que já tiveram contato com ela em estudos anteriores.

As reflexões que podem ser geradas a partir da leitura desse texto contribuem para que o estudante acesse e interaja criticamente com diferentes conhecimentos e fontes de informação. É um excelente contexto para uma abordagem interdisciplinar. Uma estratégia bastante produtiva seria solicitar que os próprios estudantes produzissem perguntas sobre assuntos relacionados ao tema que eles gostariam de compreender. De posse das perguntas, verifique quais áreas de conhecimento poderiam contribuir para obtenção daquelas respostas e proponha que eles mesmos pesquisem em diferentes fontes. As respostas obtidas podem ser compartilhadas oralmente e também com produção de textos, que podem ser expostos em sala.

É importante destacar um trabalho interdisciplinar com o componente curricular de **Geografia**, sobre a localização dos países e o que significa IDH, além de possíveis desdobramentos desse grupo econômico por causa da invasão da Ucrânia pela Rússia.

Participe

O boxe explora potências de base 10 e a notação científica. Solicite que os estudantes realizem as atividades propostas junto com um colega. Ao final, faça um fechamento sobre notação científica na lousa, com base nas conclusões dos estudantes.

Atividades

Neste conjunto de atividades, o estudante vai mobilizar seus conhecimentos sobre potências e notação decimal para aplicá-los na resolução de problemas em situações variadas. Sugerimos que as atividades **1** a **7** sejam feitas individualmente, a fim de verificar o conhecimento construído pelo estudante, no processo de avaliação diagnóstica. Na atividade **5**, a compreensão da noção de câmbio é um contexto para discussão do TCT *Educação Financeira*.

Verifique no quadro a seguir alguns dados desses países, incluindo o Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) e a posição deles no *ranking* global.

País	Medida de área (em km²)	População	Moeda	IDH em 2019*
Brasil	$8{,}516 \cdot 10^6$	$2{,}04 \cdot 10^8$	Real	0,765 (84º)
Rússia	$1{,}125 \cdot 10^7$	$1{,}46 \cdot 10^8$	Rublo	0,824 (52º)
Índia	$3{,}287 \cdot 10^6$	$1{,}25 \cdot 10^9$	Rupia	0,645 (131º)
China	$9{,}600 \cdot 10^6$	$1{,}37 \cdot 10^9$	Renminbi	0,761 (85º)
África do Sul	$1{,}221 \cdot 10^6$	$5{,}50 \cdot 10^7$	Rand	0,709 (114º)

Em 2019, a Rússia tinha o Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) classificado como "desenvolvimento humano muito elevado" (entre 0,8 e 1,0); já o Brasil e a China tinham índices classificados como "alto desenvolvimento humano" (entre 0,7 e 0,8), enquanto os demais países do BRICS, como "médio desenvolvimento humano" (entre 0,55 e 0,7).

*Fonte dos dados: FREIRE, Diego. Veja o *ranking* completo dos 189 países por IDH. *CNN Brasil*, São Paulo, 15 dez. 2020. Disponível em: https://www.cnnbrasil.com.br/internacional/veja-o-ranking-completo-de-todos-os-paises-por-idh/. Acesso em: 7 abr. 2022.

Participe — Faça as atividades no caderno.

No quadro anterior, a medida de área e a população estão escritas em notação científica, isto é, na forma $a \cdot 10^n$, em que a é um número real, $1 \leqslant a < 10$, e n é um número inteiro. Responda:

a) Que potência de 10 representa 1 trilhão? 10^{12}

b) Como se representa em notação científica a cifra 19 trilhões de dólares americanos citada no texto? $1{,}9 \cdot 10^{13}$

c) Como se escreve o IDH do Brasil em notação científica? $7{,}65 \cdot 10^{-1}$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. Escreva no caderno cada número na representação decimal e apresente-o como potência de 10.

a) 10 mil 10000; 10^4

b) 100 milhões 100000000; 10^8

c) 1 décimo 0,1; 10^{-1}

d) 1 milésimo 0,001; 10^{-3}

2. Responda no caderno:

a) Quantos algarismos 0 existem em 10^{51}, quando representado com todos os algarismos? 51 algarismos.

b) Quantas casas decimais existem em 10^{-51} (após a vírgula), quando representado com todos os algarismos? 51 casas decimais.

3. Escreva no caderno cada potência de 10 na representação decimal correspondente.

a) 10^3 1000

b) 10^5 100000

c) 10^{-2} 0,01

d) 10^{-6} 0,000001

e) $(-10)^{-3}$ −0,001

f) $(-10)^0$ 1

4. Analise os dados do quadro apresentado anteriormente sobre os BRICS e responda no caderno:

a) Qual país dos BRICS tem o território com a maior medida de área? Justifique. A Rússia, pois a medida de área do seu território é $1{,}125 \cdot 10^7$ km², que é a maior medida de área se comparada com a dos outros países do BRICS.

b) Qual deles é o mais populoso? China.

5. Considere a seguinte cotação do Real em relação às outras moedas dos BRICS em certo dia:

- 1 real vale 26 rublos;
- 1 real vale 24 rupias;
- 1 real vale 2,4 renmimbis;
- 1 real vale 4,5 rands.

Nesse dia, qual dessas moedas valia 10^{-1} vezes outra delas? 1 rupia valia 10^{-1} renmimbis.

6. Quantos anos terão passado daqui a 10^{10} segundos? 317 anos.

7. No caderno, calcule o valor das potências em cada item.

a) 5^3 125 $(-4)^3$ −64 $(0{,}25)^2$ 0,0625

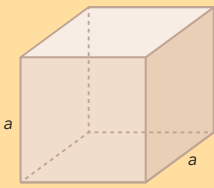
b) $(-6)^2$ 36 $(-3)^5$ −243 $(0{,}2)^3$ 0,008

c) $(0{,}9)^2$ 0,81 $(0{,}1)^3$ 0,001 $(1{,}5)^2$ 2,25

d) 10^1 10 $\left(\frac{7}{3}\right)^0$ 1 $(1{,}7)^0$ 1

e) 10^0 1 $\left(-\frac{1}{5}\right)^1$ $-\frac{1}{5}$ 0^{10} 0

f) 8^{-2} $\frac{1}{64}$ 6^{-1} $\frac{1}{6}$ $\left(\frac{3}{8}\right)^{-2}$ $\frac{64}{9}$

8. Responda no caderno:

a) Qual é a medida de área do quadrado cujo lado mede 1,5 m? 2,25 m²

b) Qual é a medida de volume do cubo cuja aresta mede 1,5 m? 3,375 m³

c) Quantos litros de água cabem em uma caixa-d'água cúbica cuja aresta mede 1,5 m? 3 375 L

Calculando o valor da potência a^2, determinamos a medida de área A do quadrado cujo lado tem medida a.

$A = a^2$

A potência a^3 corresponde à medida de volume V do cubo cuja aresta mede a.

$V = a^3$

$1\text{ L} = 1\text{ dm}^3$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

9. Copie cada item no caderno e substitua ▨ pelo expoente que torna a igualdade verdadeira.

a) $10^{▨} = 100\,000$ 5

b) $10^{▨} = 0{,}001$ −3

c) $2^{▨} = 64$ 6

d) $7^{▨} = 343$ 3

e) $\left(\frac{3}{10}\right)^{▨} = 0{,}09$ 2

f) $\left(\frac{4}{3}\right)^{▨} = 1$ 0

10. Calcule x, de modo que $10^{2x-4} = 1$. $x = 2$

Densidade demográfica da Terra

A superfície total da Terra tem cerca de 510 milhões de km² de medida de área, dos quais 360 milhões de km² são cobertos por água. Estima-se que, no início do ano de 2021, a população do planeta era cerca de 7,8 bilhões de habitantes. Quantos eram os habitantes por km² não coberto por água?

Fonte dos dados: CIA. *The World Factbook*. Disponível em: https://www.cia.gov/the-world-factbook/countries/world/. Acesso em: 26 abr. 2022.

Orientações didáticas

Atividades

Caminhe pela sala e acompanhe os estudantes nessa tarefa, registrando dúvidas e avanços, para serem discutidos na correção coletiva. Após a correção dessas atividades, organize a turma em duplas ou em trios para que as atividades **8** a **10** sejam resolvidas. Certifique-se de que todos associam a fórmula $A_{quadrado} = a^2$ para o cálculo da medida de área de um quadrado de lado a, e a fórmula $V_{cubo} = a^3$ para o cálculo da medida de volume de um cubo de aresta a.

Verifique como os estudantes procedem para resolver a atividade **10**. É claro que eles não sabem resolver equações exponenciais, mas podem aplicar o conhecimento que têm sobre as potências. Eles sabem que apenas dois tipos de potências resultam em 1: se a base é 1 ou −1 (com expoente par) ou se o expoente é zero (para base não nula). Como a base é 10, devemos ter que o expoente é zero, ou seja: $2x - 4 = 0$. Assim, uma possível resolução dessa equação é:

$2x - 4 = 0$

$2x - 4 + 4 = 0 + 4$

$2x = 4$

$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$

$x = 2$

O trabalho com esse bloco de atividades explora o pensamento computacional, e a reflexão anterior à teorização é uma oportunidade para implementar metodologias ativas na sala de aula, estimulando os estudantes a buscar soluções criativas para resolução de problemas.

Proposta para o estudante

Converse com um colega sobre o que é "densidade demográfica" de uma localidade ou região. Se necessário, busquem informações sobre isso em *sites* confiáveis.

Resposta:
Espera-se que os estudantes associem a densidade demográfica de uma região à razão (ou quociente) entre o número de habitantes (população) dessa região e a área territorial dela, geralmente dada em km² e, nesse caso, a densidade demográfica é dada em hab./km².
Para pesquisa sugerimos o *site* do IBGE, que traz um glossário, disponível em: https://censo2010.ibge.gov.br/apps/atlas/pdf/209_213_Glossario_ATLASDEMO%202010.pdf. Acesso em: 12 maio 2022.

Orientações didáticas

Potência de expoente inteiro

Faça uma leitura compartilhada com os estudantes do cálculo da densidade demográfica da superfície emersa da Terra, solicitando que expliquem os passos apresentados. Este assunto permite um trabalho interdisciplinar com **Geografia**.

O conceito de densidade demográfica é um exemplo de como a Matemática dá significado a informações de outras áreas de conhecimento. Uma boa atividade para o momento posterior à pesquisa, proposta na página anterior, é a análise da variação da densidade demográfica do nosso país e a verificação do fenômeno do adensamento urbano. Com esse conhecimento, pode-se reinterpretar os mapas de população e densidade demográfica, com as respectivas legendas, disponíveis nas páginas do IBGE. Pode-se também discutir a diferença entre um país populoso e um país densamente povoado

A densidade demográfica é um parâmetro importante na tomada de decisões em projetos de estruturação, planos diretores, distribuição de recursos e está relacionado aos impactos ambientais causados pela ação humana.

Propriedades das potências

Neste tópico, vamos retomar as propriedades da potenciação para potências de bases reais não nulas e expoentes inteiros. Antes de explorar as propriedades no quadro, questione os estudantes quanto às propriedades que eles já conhecem, fazendo um resumo na lousa, para depois comparar com as que são apresentadas no quadro. Garanta que todos compreendam e saibam aplicar essas propriedades, dirimindo as possíveis dúvidas que ainda persistam.

Há 150 milhões de km^2 não cobertos por água (superfície emersa da Terra), pois:

$$510 - 360 = 150$$

A quantidade de habitantes por km^2 é obtida dividindo-se o total de habitantes pela medida de área, em km^2:

$$\frac{7{,}8 \text{ bilhões}}{150 \text{ milhões}} = \frac{7{,}8 \cdot 10^9}{1{,}5 \cdot 10^8}$$

Nessa divisão, empregamos uma das propriedades das potências que já estudamos nos anos anteriores. Note que $\frac{10^9}{10^8}$ é um quociente de potências de mesma base.

Para calcular o valor desse quociente, conservamos a base e subtraímos os expoentes:

$$\frac{10^9}{10^8} = 10^{9-8} = 10^1 = 10$$

Então:

$$\frac{7{,}8 \cdot 10^9}{1{,}5 \cdot 10^8} = \frac{7{,}8}{1{,}5} \cdot 10 = 52$$

A densidade demográfica da superfície emersa da Terra naquele ano era de 52 habitantes por km^2.

Propriedades das potências

O quadro a seguir apresenta um resumo das propriedades das potências, em que *a* e *b* são números reais diferentes de zero e *m* e *n* são números inteiros.

Um produto de potências de mesma base é igual à potência que se obtém conservando a base e adicionando os expoentes.	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
Um produto de potências de mesmo expoente é igual à potência que se obtém multiplicando as bases e conservando o expoente.	$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$
Uma potência elevada a um dado expoente é igual à potência que se obtém conservando a base e multiplicando os expoentes.	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
Um quociente de potências de mesma base é igual à potência que se obtém conservando a base e subtraindo os expoentes.	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (para $a \neq 0$)
Um quociente de potências de mesmo expoente é igual à potência que se obtém dividindo as bases e conservando o expoente.	$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ (para $b \neq 0$)

Atividades

Faça as atividades no caderno.

11. (hab./km²) Brasil: 24,0; Rússia: 13,0; Índia: 380,3; China: 142,7; África do Sul: 45,0; logo, Índia.

11. Consulte o quadro apresentado anteriormente sobre os BRICS, faça os cálculos e responda: Qual país dos BRICS tem a maior densidade demográfica?

12. Recordemos a notação científica:

- $\underbrace{27\,3}_{\text{4 casas}}00 = 2{,}73 \cdot 10^4$
- $\underbrace{69}_{\text{2 casas}}5{,}25 = 6{,}9525 \cdot 10^2$
- $0{,}\underbrace{01}_{\text{2 casas}}75 = 1{,}75 \cdot 10^{-2}$

Escreva no caderno, em notação científica, o número indicado em cada item.

a) 365 000 $3{,}65 \cdot 10^5$ **c)** 0,25 $2{,}5 \cdot 10^{-1}$

b) 11 trilhões $1{,}1 \cdot 10^{13}$ **d)** 1 milionésimo $1{,}0 \cdot 10^{-6}$

13. Qual país dos BRICS tinha o menor IDH em 2019? Dê esse valor em notação científica. Índia; $6{,}25 \cdot 10^{-1}$.

14. Uma molécula de açúcar comum (sacarose) tem $5{,}7 \cdot 10^{-22}$ g de medida de massa, ao passo que uma molécula de água tem $3{,}0 \cdot 10^{-23}$ g de medida de massa. Exemplo de resposta: É um conjunto de átomos, iguais ou diferentes, unidos por ligações covalentes.

a) Pesquise o que é molécula.

b) Qual das 2 moléculas tem maior medida de massa? A molécula de açúcar.

c) A medida de massa maior corresponde a quantas vezes a menor? 19 vezes.

15. Em um copo com água e açúcar há 180 g de água e 11,4 g de açúcar. Usando os dados da atividade anterior, calcule:

a) quantas moléculas de água há no copo; $6 \cdot 10^{24}$ moléculas.

b) quantas moléculas de açúcar há no copo; $2 \cdot 10^{22}$ moléculas.

c) quantas vezes o número de moléculas de água corresponde ao de açúcar; 300 vezes.

d) o total de moléculas de água com açúcar. $6{,}02 \cdot 10^{24}$ moléculas.

16. No caderno, reduza as operações indicadas em cada item a uma só potência, aplicando as propriedades estudadas.

a) $a^2 \cdot a^5 \cdot a$ a^8 **c)** $2^3 \cdot a^3 \cdot b^3$ $(2 \cdot a \cdot b)^3$ **e)** $(a^{-5})^{-2}$ a^{10}

b) $\dfrac{10^8}{10^3}$ 10^5 **d)** $\dfrac{2^5}{3^5}$ $\left(\dfrac{2}{3}\right)^5$ **f)** $\dfrac{(2^3)^2 \cdot 2^4}{2^8}$ 2^2

17. No caderno, obtenha o resultado das operações, em notação científica.

a) $(2{,}5 \cdot 10^{12}) \cdot (4{,}0 \cdot 10^9)$ 10^{22}

b) $(3{,}6 \cdot 10^{-4}) \cdot (5{,}5 \cdot 10^{-5})$ $1{,}98 \cdot 10^{-8}$

c) $(1{,}2 \cdot 10^8) \cdot (8{,}2 \cdot 10^{-5})$ $9{,}84 \cdot 10^3$

d) $(4{,}0 \cdot 10^{15}) : (8{,}0 \cdot 10^{10})$ $5 \cdot 10^4$

18. Uma molécula de sal de cozinha tem medida de massa $9{,}7 \cdot 10^{-23}$ g. Quantas moléculas existem em 1 kg de sal? Responda no caderno em notação científica. $1{,}03 \cdot 10^{25}$ moléculas.

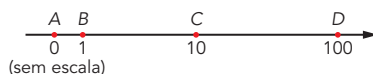
19. Qual é maior: 5^{3^2} ou $(5^3)^2$? Justifique. O maior é $5^{3^2} = 5^9$, pois $(5^3)^2 = 5^6$.

20. Responda no caderno:

a) Por quanto devemos multiplicar 3^5 para obter 6^5? 2^5

b) Por quanto devemos dividir 10^{12} para obter 5^{12}? 2^{12}

21. Nesta reta numérica estão assinalados alguns pontos:

Banco de imagens/ Arquivo da editora

Entre quais pontos consecutivos indicados nessa reta deve ser assinalado o número resultante do cálculo $\dfrac{10^{4+n} - 10^3 \cdot 10^n}{10^4 \cdot 10^n}$? Entre *A* e *B*.

22. Como $2^{10} = 1\,024$, em algumas situações usamos a aproximação $2^{10} \simeq 10^3$. Se um multibilionário decidir doar, em partes iguais, 2^{30} reais para 1 000 instituições de caridade no mundo, quanto cada uma delas vai receber, aproximadamente? 1 milhão de reais.

23. Elabore um problema que envolva números representados como potências e dê para um colega resolver enquanto você resolve o que ele elaborou.

23. Exemplo de resposta: O clube que Marina frequenta dista 1 700 m da casa dela. Considerando a ida ao clube e a volta à casa de Marina, quantos centímetros ela percorre? Escreva em notação científica. Resposta: $3{,}4 \cdot 10^5$ cm.

Na olimpíada

O número de zeros

(Obmep) Resolvendo as expressões [...], qual resultado termina com o maior número de zeros? Alternativa **c**.

a) $2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^6$ **b)** $2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^5$ **c)** $4^3 \cdot 5^6 \cdot 6^5$ **d)** $4^2 \cdot 5^4 \cdot 6^3$

Orientações didáticas

Atividades

Neste bloco de atividades, os estudantes devem mobilizar os conhecimentos construídos sobre notação científica, propriedades da potenciação, localização na reta numérica e expressões com potências para aplicar as propriedades, e resolução de problemas em variados contextos. Sugerimos que as atividades **11** a **13** sejam feitas individualmente, para verificação do aprendizado de cada estudante. Na atividade **13**, a reflexão sobre o IDH ajuda a refletir sobre a diversidade social, política, econômica e demográfica.

Caminhe pela sala e acompanhe os estudantes nessa tarefa, registrando dúvidas e avanços, para serem discutidos na correção coletiva, antes de serem propostas as atividades seguintes. As atividades **14** a **23** podem ser resolvidas em duplas, o que auxilia, enriquece e dá mais significado à aprendizagem dos estudantes. A atividade **14** se articula com o componente curricular Ciências. Faça uma discussão de modo a identificar se os estudantes entendem o contexto da questão, ou seja, se já estudaram os conceitos de molécula e de massa

Para elaborar o problema na atividade **23**, os estudantes podem pesquisar, por exemplo, medidas muito pequenas ou muito grandes.

Na olimpíada

Proponha que a atividade seja realizada individualmente para posterior debate dos resultados com a turma. Para cada resposta diferente, peça que um estudante que a obteve demonstre na lousa seu procedimento, para discussão com a turma. Converse com os estudantes sobre o respeito que todos devem ter com o colega e que podem contribuir com propostas construtivas para a realização da questão.

Orientações didáticas

Prefixos nas unidades de medida do Sistema Internacional de Unidades (SI)

Neste tópico, apresentamos um quadro com os prefixos que indicam os múltiplos e os submúltiplos das unidades de medida do SI e a potência de 10 que formará a relação entre esses submúltiplos ou múltiplos em relação à unidade de referência. Por exemplo, se a unidade de referência é o grama, um submúltiplo do grama é o centigrama, cuja relação é dada por: $1\ cg = 10^{-2}\ g$ (1 centigrama é a centésima parte do grama); se a unidade de referência é o metro, um múltiplo do metro é o megametro cuja relação é dada por: $1\ Mm = 10^6\ m$ (1 megametro é 1 milhão de vezes o metro).

A compreensão do SI é um muito importante para a resolução de problemas tanto na área Física quanto na de Química. Nesse sentido, aproveite para refletir sobre a articulação entre essas áreas de conhecimento e sobre a aplicabilidade da Matemática para resolver problemas.

Unidades de medida utilizadas na informática

Neste tópico, exploramos as unidades de medida utilizadas na informática, apresentando a relação 1 *byte* = 8 *bits*. Compreender aspectos da computação, além de ser um tema atual, contribui para o desenvolvimento do pensamento computacional.

Comente que, em informática, também são utilizadas, por exemplo, as unidades de medida kB (quilobyte), MB (megabyte) e GB (gigabyte), que correspondem a 10^3 B, 10^6 B e 10^9 B, respectivamente.

Prefixos nas unidades de medida do Sistema Internacional de Unidades (SI)

	Nome do prefixo	Símbolo do prefixo	Fator pelo qual a unidade é multiplicada
Múltiplos	yotta	Y	10^{24} = 1000000000000000000000000
	zetta	Z	10^{21} = 1000000000000000000000
	exa	E	10^{18} = 1000000000000000000
	peta	P	10^{15} = 1000000000000000
	tera	T	10^{12} = 1000000000000
	giga	G	10^{9} = 1000000000
	mega	M	10^{6} = 1000000
	quilo	k	10^{3} = 1000
	hecto	h	10^{2} = 100
	deca	da	10
Unidade			
Submúltiplos	deci	d	10^{-1} = 0,1
	centi	c	10^{-2} = 0,01
	mili	m	10^{-3} = 0,001
	micro	μ	10^{-6} = 0,000001
	nano	n	10^{-9} = 0,000000001
	pico	p	10^{-12} = 0,000000000001
	femto	f	10^{-15} = 0,000000000000001
	atto	a	10^{-18} = 0,000000000000000001
	zepto	z	10^{-21} = 0,000000000000000000001
	yocto	y	10^{-24} = 0,000000000000000000000001

Para formar o múltiplo ou o submúltiplo de uma unidade, basta colocar o nome do prefixo desejado na frente do nome da unidade. O mesmo se dá com o símbolo.

Exemplo:

Para multiplicar e dividir a unidade grama por mil:

- quilo e grama → quilograma; k e g → kg;
- mili e grama → miligrama; m e g → mg.

Os prefixos do SI também podem ser empregados com unidades fora do SI.

Unidades de medida utilizadas na informática

O *byte* é a unidade de medida utilizada na informática para representar a quantidade de dados gravados em um disco ou em qualquer outro dispositivo de armazenamento.

Temos que 1 *byte* é constituído de 8 *bits*. O *bit* representa a menor unidade de medida de informação (**1** para ligado, ou **0** para desligado). Assim, o *byte* corresponde a um número de 8 algarismos escrito no sistema binário (com os algarismos 0 e 1).

Por usar o sistema binário, os prefixos empregados na informática não correspondem a potências de 10 (como seria no Sistema Internacional de Unidades), mas, sim, a potências de 2. Como $2^{10} = 1024$, o prefixo *kibi* (da Comissão Eletrotécnica Internacional) na informática corresponde a multiplicar a unidade por 1024. Considere os múltiplos mais usados:

- 1 *byte* (B);
- 1 *kibibyte* (KiB) = 1024 *bytes* (2^{10} B);
- 1 *mebibyte* (MiB) = 1024 *kibibytes* (2^{10} KiB = 2^{20} B);
- 1 *gibibyte* (GiB) = 1024 *mebibytes* (2^{10} MiB = 2^{30} B);
- 1 *tetibyte* (TiB) = 1024 *gibibytes* (2^{10} GiB = 2^{40} B).

30. Exemplo de resposta: Júlio sabe que um HD externo de 1 TB armazena 500 horas de filme. Ele comprou um HD externo de $4 \cdot 2^{10}$ GB para gravar filmes com a duração de, aproximadamente, 2 horas cada um. Cerca de quantos filmes esse HD poderá armazenar? Resposta: Aproximadamente 250 filmes.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

24. Quantos metros são:

a) 12 megametros? 12 000 000 m

b) 1 025 micrômetros? 0,001025 m

25. O Sol dista aproximadamente 0,15 bilhão de quilômetros da Terra.

a) Utilizando a notação científica, represente essa medida em quilômetros. $1{,}5 \cdot 10^8$ km

b) Essa medida corresponde a quantos gigâmetros? 150 Gm

26. A medida de massa da molécula de água é $3{,}0 \cdot 10^{-23}$ g. Como se expressa essa medida em yoctograma (yg)? 30 yg

27. Copie o parágrafo a seguir no caderno e substitua ////// pelo prefixo da unidade de medida no Sistema Internacional de Unidades (SI).

A medida do diâmetro de um fio de cabelo humano varia de 15 a 170 milésimos de milímetros. Um milésimo de milímetro corresponde a 1 //////metro. micro

28. Copie o parágrafo a seguir no caderno e substitua ////// pelo prefixo da unidade de medida no Sistema Internacional de Unidades (SI).

Uma memória de computador tem 3,8 GB, o que corresponde a, aproximadamente, 4 ////// de *bytes*. bilhões

29. Um aplicativo tem tamanho igual a 60 MB. Qual é a porcentagem da capacidade de armazenamento que esse aplicativo ocupa em um celular com 6 GB de espaço? Aproximadamente 1%.

30. Elabore um problema utilizando unidades de medida da informática. Resolva-o e, depois, tente resolver também o problema elaborado por um colega. Debatam as resoluções de cada um.

31. Considere as medidas de massa de alguns planetas do Sistema Solar.

Planeta	Medida de massa (em kg)
Mercúrio	$3{,}303 \cdot 10^{23}$
Vênus	$4{,}869 \cdot 10^{24}$
Terra	$5{,}974 \cdot 10^{24}$
Marte	$6{,}392 \cdot 10^{23}$

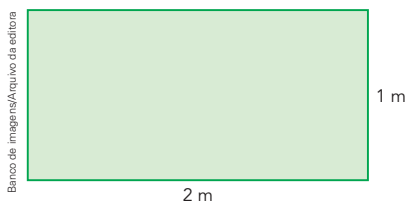
Fonte dos dados: RODRIGUES, Cláudia Vilega. O Sistema Solar. *INPE*, São José dos Campos, 2003. Disponível em: http://mtc-m16c.sid.inpe.br/col/sid.inpe.br/jeferson/2003/08.14.14.48/doc/capitulo3.pdf. Acesso em: 7 abr. 2022.

De acordo com esses dados, elabore um problema que envolva a comparação entre as medidas de massa de 2 ou mais planetas. Resolva seu problema e, depois, tente resolver também o problema elaborado por um colega.

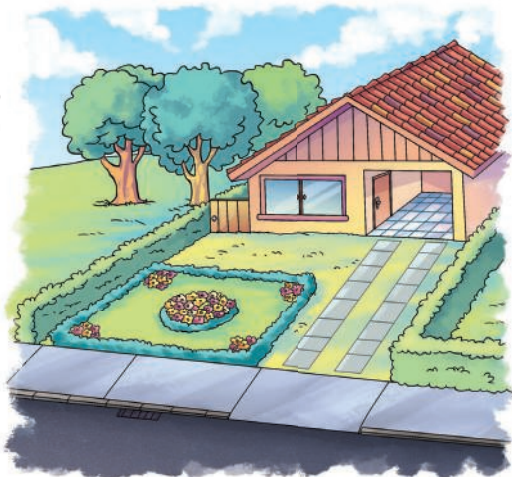
31. Exemplo de resposta: Considerando Mercúrio, Vênus, Terra e Marte, qual desses planetas tem maior medida de massa? O que você pode notar em relação às medidas de massa dos demais planetas? Resposta: Terra. Exemplo de resposta: A soma das medidas de massa dos demais planetas é menor do que a medida de massa da Terra.

Raiz quadrada

O jardim reformado

No jardim da casa de Gabriela havia um gramado retangular cujos lados mediam 2 m e 1 m. Portanto, a medida de área do gramado era $(2 \cdot 1)$ m²; logo, 2 m².

Banco de imagens/Arquivo da editora

As imagens não estão representadas em proporção.

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Orientações didáticas

Atividades

Este bloco de atividades explora a notação científica e os estudos que fizemos com as unidades de medidas e os prefixos do SI. Sugerimos que as atividades sejam feitas em duplas, com a correção a cada atividade resolvida, a fim de que a discussão das dificuldades geradas em uma atividade possa contribuir para a ampliação de estratégias que podem ser usadas nas próximas.

Na atividade **28**, espera-se que os estudantes percebam que 60 MB equivalem a $60 \cdot 10^6$ *bytes* e que 6 GB correspondem a $6 \cdot 10^9$ *bytes*. Sendo assim, vamos estabelecer a razão centesimal entre essas duas unidades:

$$\frac{60 \cdot 10^6 \text{ bytes}}{6 \cdot 10^9 \text{ bytes}} = 10 \cdot 10^6 \cdot 10^{-9} = 10^{1+6-9} = 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 1\%.$$

Na atividade **30**, elaborar e resolver problemas contribui para o desenvolvimento do pensamento computacional. Discutir soluções desenvolve a habilidade da argumentação. Já a atividade **31**, além de contribuir para o pensamento computacional, apresenta uma articulação com **Ciências**.

Raiz quadrada

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da **CG01**, da **CG02** e da **CG09**, ao trabalhar a ampliação do conhecimento cultural e histórico enquanto trata de desenvolver o raciocínio lógico como competência, e também da **CEMAT01**, da **CEMAT02**, da **CEMAT03**, da **CEMAT05** e da **CEMAT08**, por meio do entendimento da matemática como uma ferramenta criativa, com a qual é possível resolver problemas práticos e não práticos e mais abstratos.

Em "O jardim reformado", é apresentada uma discussão sobre uma situação preliminar para o trabalho com raiz quadrada, tema do tópico.

Proponha que os estudantes façam a leitura do texto junto com um colega, para depois discutirem com a turma. Registre na lousa as conclusões advindas dessa discussão.

Orientações didáticas

Raiz quadrada

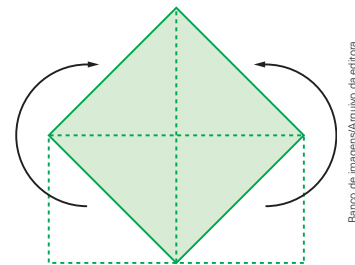
Neste tópico, vamos retomar o conceito de raiz quadrada de um número, estendendo-o para radicandos que sejam números reais.

Explore esse conceito com os estudantes e peça que utilizem uma calculadora para obter aproximações de raízes quadradas que não são exatas, como é o caso da raiz quadrada de 2. Esta atividade retoma os conhecimentos trabalhados no capítulo anterior.

O senhor Jacir, pai de Gabriela, gosta muito de Geometria; então, decidiu mudar o formato do gramado de retângulo para quadrado.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Não foi difícil realizar o projeto. Ele teve apenas de retirar, cuidadosamente, 2 partes triangulares do gramado e replantá-las de maneira que se formasse um quadrado. O gramado continuou tendo a mesma medida de área de 2 m^2. Mas e agora? Quanto medem os lados do gramado?

Você já sabe que a medida de área de um quadrado é igual à medida do lado dele elevada ao quadrado (expoente 2). Então, como a medida de área do gramado da casa de Gabriela é 2 m^2, a medida do lado dele, em metros, é o número positivo x tal que $x^2 = 2$. Esse número existe no conjunto dos números reais. Ele é representado por $\sqrt{2}$. Lembre-se:

> **Raiz quadrada** de um número real positivo a, representada por $\sqrt{a}$, é o número positivo que, elevado ao quadrado, resulta em a.

Por exemplo, $\sqrt{100} = 10$, porque 10 é o número positivo que, elevado ao quadrado, resulta em 100. De fato, $10^2 = 10 \cdot 10 = 100$.

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Usando uma calculadora para obter $\sqrt{2}$, basta teclar:

Banco de imagens/Arquivo da editora

Se for uma calculadora com visor que comporta 10 algarismos, ele mostrará 1,414213562.

Recordemos que $\sqrt{2}$ é um número irracional, portanto sua representação decimal é infinita e não periódica. O que a calculadora fornece é um valor aproximado, com número de casas de acordo com sua capacidade.

Então, o lado do gramado do senhor Jacir mede $\sqrt{2}$ metros, o que equivale, aproximadamente, a 1,41 m (1 metro e 41 centímetros).

myMelody/Shutterstock

As imagens não estão representadas em proporção.

A equação $x^2 = a$

As imagens não estão representadas em proporção.

Representando por x o número desconhecido, formamos a equação $x^2 = 1600$. Essa equação apresenta 2 soluções:

$$x = 40 \rightarrow \text{porque } 40^2 = 40 \cdot 40 = 1600$$

ou

$$x = -40 \rightarrow \text{porque } (-40)^2 = (-40)(-40) = 1600$$

Como $40 = \sqrt{1600}$ na resolução da equação dada, indicamos:

$$x^2 = 1600 \Leftrightarrow (x = \sqrt{1600} = 40 \text{ ou } x = -\sqrt{1600} = -40)$$

ou, ainda, mais resumidamente:

$$x^2 = 1600 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1600} = \pm 40$$

Para a positivo, temos: $x^2 = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}$.

O símbolo $\Leftrightarrow$ pode ser lido como: "se, e somente se" ou "equivale a".

Qual é a solução da equação $x^2 = 0$?

O único número que elevado ao quadrado dá zero é o próprio zero. Essa equação só tem uma solução: $x = 0$.

Também dizemos que a raiz quadrada de zero é zero e indicamos $\sqrt{0} = 0$.

$$x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Nenhum número real elevado ao quadrado tem resultado negativo. Então, essa equação não tem solução no conjunto dos números reais (que indicamos por ℝ).

Para a negativo, $x^2 = a$ não tem solução em ℝ.

Orientações didáticas

A equação $x^2 = a$

Neste tópico, vamos explorar uma aplicação do cálculo da raiz quadrada, estudando as soluções possíveis de equações do tipo $x^2 = a$, em que x e a são números reais. Discuta com os estudantes as possibilidades de soluções de acordo com o valor de a, ou seja: para $a > 0$, para $a = 0$ e para $a < 0$. Faça um quadro-resumo em cartolina com as conclusões obtidas e deixe exposto para eles consultarem quando necessário.

Orientações didáticas

Atividades

As atividades propostas aqui exploram problemas e questões que envolvem raízes quadradas e equações do tipo $x^2 = a$. Aproveite este bloco de atividades para fazer uma avaliação diagnóstica sobre os conhecimentos dos estudantes a respeito de conteúdos de anos anteriores, tal qual raiz quadrada. Isso permitirá calibrar a abordagem dos tópicos posteriores.

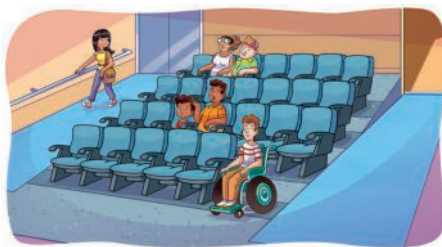
Na atividade **39**, que requer a elaboração de um problema, peça aos estudantes que transcrevam o enunciado que fizeram em uma folha de papel sulfite. Depois, a folha será trocada com um colega, para que um resolva o problema que o outro criou. Ao final, junto com toda turma, analisem os enunciados e as resoluções apresentadas.

Raiz cúbica

Neste tópico, vamos explorar o conceito de raiz cúbica de um número, estendendo esse conceito para radicandos que sejam números reais.

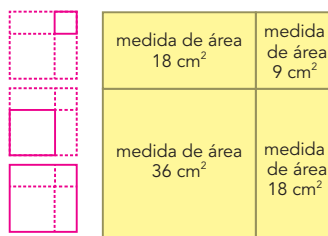
Atividades

Faça as atividades no caderno.

32. Um auditório tem n fileiras, cada uma delas com n assentos.

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Se a capacidade é de 196 pessoas sentadas, quantas são as fileiras? 14 fileiras.

33. Identifique 3 quadrados na figura a seguir e dê a medida do lado de cada um. 3 cm, 6 cm, 9 cm.

medida de área 18 cm²	medida de área 9 cm²
medida de área 36 cm²	medida de área 18 cm²

34. De acordo com o que estudamos, $\sqrt{1600} = 40$ e $-\sqrt{1600} = -40$. Note o sinal antes do radical. Classifique, no caderno, os cálculos em certo ou errado, justificando sua resposta. Justificativas pessoais.

a) $\sqrt{25} = 5$ Certo.

b) $\sqrt{25} = \pm 5$ Errado.

c) $\sqrt{25} = -5$ Errado.

d) $-\sqrt{25} = -5$ Certo.

e) $\sqrt{36} = 6$ Certo.

f) $\sqrt{36} = \pm 6$ Errado.

35. Indique no caderno as soluções de cada equação.

a) $x^2 = 36$ $x = \pm 6$

b) $x^2 = 144$ $x = \pm 12$

c) $x^2 = -9$ Não existe raiz real.

d) $x^2 = 0$ $x = 0$

e) $x^2 = 5$ $x = \pm\sqrt{5}$

f) $3x^2 - 6 = 0$ $x = \pm\sqrt{2}$

36. Calcule no caderno:

a) $3 + \sqrt{16} - \sqrt{25}$ 2

b) $5\sqrt{49} - \sqrt{121}$ 24

c) $\sqrt{\frac{4}{25}} + 3\sqrt{\frac{1}{9}}$ $\frac{7}{5}$

d) $\sqrt{1{,}21} - \sqrt{0{,}01}$ 1

37. Calcule o valor de $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, em que $a = 20$, $b = 11$ e $c = -3$. $\frac{1}{5}$

38. Para resolver os itens a seguir, use uma calculadora que tenha a tecla √.

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Copie e complete o quadro no caderno com valores aproximados até a 3ª casa decimal.

a	2	3	5	6	7	10
$\sqrt{a}$	1,414	1,732	2,236	2,449	2,646	3,162

b) Usando os valores obtidos, calcule, no caderno, com aproximação de centésimos:

- $2\sqrt{5} + 1$ Aproximadamente 5,47.
- $\frac{\sqrt{10} - \sqrt{3}}{2}$ Aproximadamente 0,72.

39. Elabore um problema para o qual a solução seja modelada por uma equação do tipo $x^2 = a$, com $a \geq 0$. Exemplo de resposta: Um quadrado tem medida de área igual a 18 m². Qual é a medida do lado desse quadrado? Resposta: $3\sqrt{2}$ m.

Raiz cúbica

A aresta do cubo

Certa marca de tintas é comercializada em um recipiente cúbico com medida de capacidade 4,096 L (ou 4 096 cm³). Quantos centímetros mede a aresta desse recipiente?

Hélio Senatore/Arquivo da editora

As imagens não estão representadas em proporção.

Como a medida de volume de um cubo é igual à medida da aresta elevada ao cubo (expoente 3), devemos descobrir o número x tal que $x^3 = 4\,096$.

Vamos testar o número 16.

$$16 \cdot 16 \cdot 16 = 4\,096 = 16^3\text{; então, a aresta mede 16 cm.}$$

Dizemos que 16 é a **raiz cúbica** de 4 096 indicada por $\sqrt[3]{4\,096}$. Assim:

$$\sqrt[3]{4\,096} = 16$$

(lê-se: "a raiz cúbica de quatro mil e noventa e seis é dezesseis"), porque $16^3 = 4\,096$.

> Elevando-se os números naturais de 1 a 9 ao cubo, só o 6 resulta em número com final 6.

Quarta potência e raiz quarta

Qual é o número que, elevado à quarta potência, resulta em 16? Em outras palavras, quais são as soluções da equação $x^4 = 16$? Há 2 soluções:

- o número 2, porque $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$;
- o número -2, porque $(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = 16$.

Dizemos que a solução positiva 2 é a **raiz quarta** de 16 representada por $\sqrt[4]{16}$. Assim:

$$\sqrt[4]{16} = 2 \text{ (lê-se: "a raiz quarta de dezesseis é dois").}$$

Dessa maneira, $\sqrt[4]{16} = 2$, porque 2 é o número positivo que, elevado à quarta potência, resulta em 16.

Raiz *n*-ésima

Raízes quadradas, cúbicas, quartas, etc. enquadram-se na seguinte definição:

> **Raiz *n*-ésima** de um número real não negativo a, indicada por $\sqrt[n]{a}$, é o número positivo que, elevado ao expoente inteiro n, resulta em a.

Sendo a positivo, $\sqrt[n]{a} = x$ se, e somente se, $x \geqslant 0$ e $x^n = a$.

Nessa definição, n pode ser qualquer número inteiro positivo e maior do que 1.

Em $\sqrt[n]{a}$, dizemos que n é o **índice** da raiz e que a é o **radicando**.

Considere os exemplos a seguir.

- $\sqrt[3]{1000} = 10$ (porque $10^3 = 1000$)

  Índice: 3

  Radicando: 1000

- $\sqrt[4]{625} = 5$ (porque $5^4 = 625$ e $5 > 0$)

  Índice: 4

  Radicando: 625

Orientações didáticas

Raiz cúbica

Se julgar necessário, faça uma sondagem dos conhecimentos que os estudantes já trazem sobre essa operação considerando radicandos racionais. Depois, proponha a situação proposta que envolve um recipiente cúbico e o cálculo da medida da aresta dele.

Quarta potência e raiz quarta

Neste tópico, é retomado o cálculo da quarta potência e explorado o conceito de raiz quarta de um número real. Ressalte para os estudantes que o caso da raiz quarta é parecido com o da raiz quadrada, em que o radicando precisa ser um número não negativo, pois nenhum número real elevado à quarta potência resulta em uma potência negativa

Raiz *n*-ésima

Este tópico generaliza o cálculo de raízes para uma raiz de índice n, com n inteiro e $n > 1$, e radicando real. Nessa generalização, $\sqrt[n]{a}$ é definida para radicandos reais e não negativos (a real, $a = 0$ ou $a > 0$), de modo que:

$$\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x \geqslant 0 \text{ e } x^n = a$$

Reúna os estudantes em dois grandes grupos, cada grupo propõe uma raiz exata para o outro grupo calcular. Após um tempo marcado, um representante de cada grupo apresenta a resolução na lousa, para discussão com a turma. Combine com os estudantes quantas rodadas serão feitas.

Orientações didáticas

Equação binomial: $x^n = a$, com n inteiro positivo

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento das habilidades **EF09MA02** e **EF09MA03** ao propor um trabalho com equações do tipo $x^n = a$, em que x e a são números reais e n é inteiro $(n > 1)$. As atividades em grupo mobilizam com maior ênfase a **CG09**.

Neste tópico, vamos explorar uma aplicação do cálculo da raiz n-ésima, estudando as soluções possíveis de equações do tipo $x^n = a$, em que x e a são números reais e n é inteiro $(n > 1)$.

Participe

Trabalhe as questões do boxe com os estudantes reunidos em duplas ou trios. Ao final, faça um fechamento em uma roda de conversa, discutindo as respostas e os procedimentos utilizados.

A equação $x^n = a$, com n par

Neste tópico, vamos explorar as soluções para $x^n = a$ no caso particular em que n é par. Discuta com os estudantes as possíveis soluções de acordo com o valor de a, ou seja: para $a > 0$, para $a = 0$ e para $a < 0$.

Proponha mais exemplos na lousa para os estudantes resolverem individualmente.

A equação $x^n = a$, com n ímpar

Neste tópico, vamos explorar as soluções para $x^n = a$ no caso particular em que n é ímpar. Discuta com os estudantes as possíveis soluções de acordo com o valor de a, ou seja: para $a > 0$, para $a = 0$ e para $a < 0$.

Proponha aos estudantes que criem outros exemplos respeitando a condição de n ímpar $(n > 1)$, para outro colega resolver. Ao final, discuta os exemplos criados e as resoluções feitas.

Equação binomial $x^n = a$, com n inteiro positivo

Participe

Faça as atividades no caderno.

Em um aquário cúbico cabem 1000 L de água. Vamos descobrir quanto mede a aresta do aquário.

a) Um litro de água é o mesmo que quantos decímetros cúbicos de água? $1\ L = 1\ dm^3$

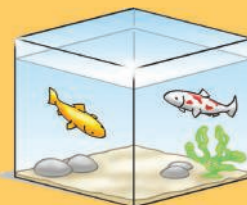
b) Quantos decímetros cúbicos de água cabem no aquário? $1\,000\ dm^3$

c) Se x representa a medida da aresta de um cubo, como se expressa a medida de volume do cubo? x^3

d) Se x representa a medida da aresta do aquário, em decímetros, qual é a equação dada para a medida de volume do aquário? $x^3 = 1\,000$

e) O único número real que, elevado ao cubo, resulta em 1000 é $\sqrt[3]{1000}$. Quanto é $\sqrt[3]{1000}$? Qual é o valor de x na equação? $\sqrt[3]{1000} = 10$; $x = 10$.

f) Então, quanto mede a aresta do cubo? 10 dm

g) Quanto mede a aresta do cubo em centímetros? E em metros? 100 cm; 1 m

Hélio Senatore/Arquivo da editora

A equação $x^n = a$, com n par

Já vimos que: $x^2 = 1600 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1600} \Leftrightarrow x = \pm 40$.

A equação $x^4 = 16$ também tem 2 soluções reais: 2 e -2. Escrevemos:

$$x^4 = 16 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[4]{16} \Leftrightarrow x = \pm 2$$

Para a positivo e n par, temos: $x^n = a \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[n]{a}$.

Equações como $x^2 = -4$, $x^4 = -16$ e $x^8 = -1$ não apresentam solução real, uma vez que nenhum número real elevado a um expoente par dá resultado negativo.

Para a negativo e n par, $x^n = a$ não tem solução (ou raiz) real.

A equação $x^n = a$, com n ímpar

Consideremos os exemplos a seguir.

- Vamos determinar a solução real da equação $x^3 = -64$.

  Como $(-4)^3 = (-4)(-4)(-4) = -64$, a solução dessa equação é -4. Dizemos que a raiz cúbica real de -64 é -4. Indicamos:

  $$x^3 = -64 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-64} = -4$$

- $x^5 = -1 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{-1} = -1$, pois $(-1)^5 = -1$.

Para n ímpar e maior do que 1, temos: $x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$.

Note que, para n ímpar $(n > 1)$, a equação $x^n = a$ sempre tem uma solução real, seja o número real a positivo ou negativo.

Mais 2 observações devem ser feitas:

- como $0^2 = 0$, $0^3 = 0$, $0^4 = 0$, etc., qualquer que seja o índice n, inteiro positivo, definimos:

$$\sqrt[n]{0} = 0$$

- a equação $x^n = 0$ apresenta apenas a raiz 0, qualquer que seja o expoente n inteiro positivo.

$$x^n = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

40. Qual é a medida da aresta de um cubo cuja medida de volume é 512 cm^3? 8 cm

> A **média aritmética** de n números reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é:
>
> $$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$
>
> E a **média geométrica** de n números reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é:
>
> $$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

41. Responda no caderno:

a) Quais são a média aritmética e a média geométrica de 3, 8 e 9? $\frac{20}{3}$ e 6.

b) Qual das médias é maior? A aritmética.

42. Calcule e compare as médias aritmética e geométrica de 4, 5, 20 e 25. Média aritmética: 13,5; média geométrica: 10; a média aritmética é maior.

43. Calcule:

a) $5\sqrt{9} - 3\sqrt[3]{8}$ 9

b) $\sqrt{21 \cdot 4} - 3$ 9

c) $\sqrt{6^2 + 8^2}$ 10

44. Copie cada item no caderno e responda: Que número deve ser colocado no lugar de ▨ para que cada igualdade seja verdadeira?

a) $\sqrt{▨} = 100$ 10 000

b) $\sqrt[3]{▨} = -8$ −512

c) $\sqrt[▨]{64} = 4$ 3

d) $\sqrt[▨]{64} = 2$ 6

45. Um reservatório de água em formato cúbico tem a mesma medida de capacidade de um reservatório com o formato de um bloco retangular com as seguintes medidas: 8 m de comprimento, 3,2 m de largura e 2,5 m de profundidade. Quanto mede a aresta do reservatório cúbico? 4 m

46. A fôrma de uma goiabada tem o formato de um bloco retangular medindo 24 cm de comprimento, 14 cm de largura e 8 cm de altura. Quando pronta, a goiabada é cortada em exatamente 168 docinhos em formato de bloco retangular com 4 cm de medida de comprimento e 2 cm de medida de largura. Quanto mede a altura de cada docinho? 2 cm

Carlos Restrepo/Shutterstock

47. Resolva as equações no caderno.

a) $x^2 = 100$ $x = \pm 10$

b) $x^3 = 0$ $x = 0$

c) $x^3 = -1$ $x = -1$

d) $x^3 = 125$ $x = 5$

e) $x^2 = -1$ Não tem raiz real.

f) $x^3 = -\frac{1}{64}$ $x = -\frac{1}{4}$

Orientações didáticas

Atividades

Nestas atividades, o estudante deve mobilizar os conhecimentos construídos acerca do cálculo de raízes e dos tipos de equações estudadas.

Opte por organizar a turma em duplas para realização das atividades, contribuindo assim para mobilizar a **CG09**. Após essa tarefa, proponha que alguns estudantes de duplas diferentes demonstrem na lousa algumas de suas estratégias e discuta cada uma delas com a turma.

Dê um tempo para as duplas resolverem a atividade escolhida. Caminhe pela sala observando-os nessa tarefa e avalie a necessidade de fazer alguma intervenção. Pode-se fazer uma releitura do enunciado com eles, ressaltando o conceito de média aritmética e de média geométrica. Se julgar conveniente, comente que a média aritmética de dois números reais positivos sempre tem valor maior que ou igual ao valor da média geométrica desses mesmos dois números. Mais adiante, pode-se até mesmo propor a demonstração dessa desigualdade.

Orientações didáticas

Potência de expoente racional

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA03** ao explorar potências de expoente racional. A atividade **51** favorece o desenvolvimento da **CG02**, pois busca trabalhar o pensamento crítico ao propor a análise de erros por parte dos estudantes; e da **CEMAT02** e da **CEMAT06** ao incentivar o espírito de investigação e capacidade de produzir argumentos convincentes em múltiplos contextos. Promove-se, assim, o aprofundamento do letramento matemático dos estudantes.

Este tópico apresenta potências de expoente racional com base racional positiva, explorando este cálculo tanto para números racionais expressos na forma de fração quanto na forma decimal. Discuta os exemplos com os estudantes e proponha outros na lousa para alguns deles resolverem e explicarem o procedimento usado.

Potência de expoente racional

Sabemos que $4^2 = 4 \cdot 4 = 16$ e $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$. Tomando-se como expoente um número compreendido entre 2 e 3 (por exemplo 2,5), escrevemos a potência $4^{2,5}$.

Lembremos que números racionais são todos os números inteiros e todas as frações (nas quais numerador e denominador são inteiros, com denominador diferente de zero) e que todo número racional pode ser representado na forma $\frac{m}{n}$, em que m e n são números inteiros e $n \neq 0$.

Por exemplo, o número 2,5 é o mesmo que $\frac{5}{2}$.

Assim, notamos que, para as questões formuladas anteriormente, temos $4^{2,5}$, que é $4^{\frac{5}{2}}$.

E agora, como calcular o valor de potências do tipo $a^{\frac{m}{n}}$, em que a é um número real positivo?

As propriedades estudadas para expoentes inteiros continuam valendo quando se amplia o campo do expoente para os racionais. Então, aplicando:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

temos, para o caso da potência $4^{\frac{5}{2}}$:

$$4^{\frac{5}{2}} = \left(2^2\right)^{\frac{5}{2}} = 2^{2 \cdot \frac{5}{2}} = 2^5 = 32$$

Note que o resultado, 32, é um número compreendido entre 16 e 64:

$$\begin{array}{ccccc} 16 & < & 32 & < & 64 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 4^2 & & 4^{2,5} & & 4^3 \end{array}$$

Note também que 2,5 é a média aritmética de 2 e 3, pois $\frac{2+3}{2} = 2,5$. Mas 32 não é a média aritmética de 16 e 64, pois $\frac{16+64}{2} \neq 32$.

Consideremos outro exemplo:

O expoente 0,25 está entre os inteiros 0 e 1.
Sabemos que $16^0 = 1$ e $16^1 = 16$. Então, $16^{0,25}$ deverá ser um número entre 1 e 16.

Considerando que $16 = 2^4$ e que $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, teremos:

$$16^{0,25} = (2^4)^{0,25} = 2^{4 \cdot 0,25} = 2^1 = 2$$

Empregando raiz

Agora, considere que $a^{\frac{m}{n}} = x$, em que a e x são números positivos, m e n são inteiros e $n \geqslant 2$.
Elevando ambos os membros ao expoente n, obtemos:

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = x^n$$

Fazendo valer a propriedade da potência de potência:

$$a^{\frac{m}{n} \cdot n} = x^n \Leftrightarrow a^m = x^n$$

Como x é o número positivo que elevado a n resulta em a^m, pelo conceito de raiz n-ésima temos que:

$$x = \sqrt[n]{a^m}$$

Então, substituindo x na igualdade de partida, o resultado é:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

É assim que definimos potência de base positiva e expoente racional:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (a > 0,\ m \text{ e } n \text{ inteiros},\ n \geqslant 2)$$

Retomando os exemplos vistos:

- $4^{2,5} = 4^{\frac{5}{2}} = \sqrt{4^5} = \sqrt{1024} = 32$
- $16^{0,25} = 16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16^1} = \sqrt[4]{16} = 2$

Com essa definição, as propriedades estudadas para potências de expoente inteiro são preservadas (continuam valendo) para expoentes racionais.

Acompanhe outros exemplos:

- $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$ ou $8^{\frac{2}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{2}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{2}{3}} = 2^2 = 4$
- $9^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{9^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$ ou $9^{-\frac{1}{2}} = \left(3^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 3^{2\left(-\frac{1}{2}\right)} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$
- $10^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{10^3} = \sqrt[5]{1000}$
- $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5^1} = \sqrt{5}$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

48. Considere 2 modos de calcular o valor de $625^{0,25}$:

- $625^{0,25} = 625^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{625} = 5$
- $625^{0,25} = \left(5^4\right)^{0,25} = 5^{4 \cdot 0,25} = 5^1 = 5$

Agora, calcule o valor das potências utilizando o método que preferir.

a) $49^{\frac{1}{2}}$ 7
b) $125^{\frac{1}{3}}$ 5
c) $8^{\frac{4}{3}}$ 16
d) $25^{\frac{3}{2}}$ 125
e) $81^{-\frac{1}{4}}$ $\frac{1}{3}$
f) $16^{\frac{3}{2}}$ 64
g) $9^{0,5}$ 3
h) $10\,000^{0,25}$ 10
i) $1024^{0,2}$ 4

Para ajudar, fatore como no exemplo:

625	5
125	5
25	5
5	5
1	

Orientações didáticas

Empregando raiz

Neste tópico, associamos uma potência de expoente racional a um radical. Assim, o cálculo dessa potência recai no cálculo da raiz. Utilizar conceitos já adquiridos para explicar conceitos novos contribui para o desenvolvimento do pensamento por analogia.

Atividades

Na atividade **48**, exploramos o cálculo de potências com expoente racional. Sugerimos que seja feita individualmente, o que possibilita a verificação do aprendizado de cada estudante acerca desse assunto. Se julgar necessário, retome novamente a decomposição em fatores primos e as propriedades das operações, como a potência de potência na potenciação e a comutativa da multiplicação. Por exemplo:

c) $8^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{8^4}$

Vamos procurar o número que, elevado ao cubo, resulta em 8^4:

$8^4 = (2^3)^4 = (2^4)^3$

Logo, 2^4 é o número que, elevado ao cubo, resulta em 8^4, ou seja:

$8^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{8^4} = 2^4 = 16$

h) $10\,000^{0,25} = (10^4)^{0,25} = 10^{4 \cdot 0,25} = 10^1 = 10$

Orientações didáticas

Atividades

Este bloco de atividades continua a explorar cálculo de potências com expoente racional, em que o estudante deve mobilizar os conhecimentos construídos sobre potências e raízes. Sugerimos que as atividades sejam feitas em duplas e corrigidas uma a uma, logo após a resolução, o que enriquecerá o aprendizado e auxiliará na resolução das próximas atividades. Enquanto os estudantes realizam as tarefas, observe que conceitos ainda geram dificuldades.

Na atividade **51**, espera-se que os estudantes percebam que o cálculo em **I** está correto e que, em **II**, há várias passagens com erro, gerando um cálculo errado. Essa atividade de analisar procedimento e identificar erros é uma das características do pensamento lógico da abdução.

Transformando raízes em potências

Mostre para os estudantes que as propriedades das raízes, desenvolvidas nesse tópico, decorrem das propriedades da potenciação. Associar conceitos novos àqueles já adquiridos é uma das características do raciocínio lógico por analogia.

Simplificação de raízes

Neste tópico, vamos estudar como simplificar raízes aplicando o que já foi visto para potências.

Antes de tratar dos exemplos apresentados no livro, discuta com os estudantes procedimentos que eles usariam para o cálculo das seguintes raízes, $\sqrt{625}$ e $\sqrt[3]{0{,}000001}$, por exemplo. Veja, a seguir, algumas propostas que podem surgir.

- $\sqrt{625}$ é o número que, elevado ao quadrado, resulta em 625. Como 625 termina em 5, o número procurado deve também terminar em 5, pois apenas $5 \cdot 5$ produz um produto com final 5. Observando que $10^2 = 100$, $20^2 = 400$ e $30^2 = 900$, podemos concluir que $\sqrt{625}$ está entre 20 e 30, pois 625 está entre 400 e 900. Então, podemos concluir que 25 é o número procurado, uma vez que satisfaz todas as condições: $25^2 = 25 \cdot 25 = 625$. Logo: $\sqrt{625} = 25$.
- Como: $\sqrt{625} = \sqrt{5^4} = \sqrt{(5^2)^2}$, podemos concluir que o quadrado de 5^2 é 625, ou seja:

$\sqrt{625} = 5^2 = 25$

- Em $\sqrt[3]{0{,}000001}$, temos:

(1) $0{,}000001 = 1 \cdot 10^{-6} = 10^{-6} = (10^{-2})^3$

Então, o número que elevado ao cubo resulta em 0,000001 é 10^{-2}. Ou seja:

$\sqrt[3]{0{,}000001} = 10^{-2} = 0{,}01$

(2) $0{,}000001 = 10^{-6}$

$\sqrt[3]{0{,}000001} = \sqrt[3]{10^{-6}} = 10^{\frac{-6}{3}} = 10^{-2} = 0{,}01$

Faça as atividades no caderno.

49. Escreva no caderno empregando radicais:

a) $10^{\frac{4}{5}}$ $\sqrt[5]{10^4}$

b) $10^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt{10}$

c) $10^{-\frac{2}{3}}$ $\frac{1}{\sqrt[3]{10^2}}$ ou $\sqrt[3]{10^{-2}}$.

d) $5^{\frac{1}{3}}$ $\sqrt[3]{5}$

e) $8^{\frac{7}{2}}$ $\sqrt{8^7}$

f) $2^{-\frac{1}{4}}$ $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ ou $\sqrt[4]{2^{-1}}$.

g) $6^{0,5}$ $\sqrt{6}$

h) $3^{0,25}$ $\sqrt[4]{3}$

50. Calcule:

a) $0{,}027^{\frac{1}{3}}$ 0,3

b) $16^{1,25}$ 32

c) $8^{\frac{1}{3}} + 3^0 - 2 \cdot 4^{0,5}$ −1

d) $27^{0,333...} + 27^{-\frac{2}{3}}$ $\frac{28}{9}$

51. Considere atentamente os cálculos a seguir. Em um deles foi cometido um erro. Identifique-o.

I. $8^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8^{-1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

II. $8^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{-3} = \sqrt[3]{8^{-1}} = 8^3 = 512$

No cálculo **II**, a passagem $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{-3}$ está errada.

Transformando raízes em potências

Aplicando a definição de potência de expoente racional, podemos transformar uma raiz em potência:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \text{ (com } a > 0\text{, } m \text{ e } n \text{ inteiros, } n \geq 2)$$

Por exemplo: $\sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{7} = 7^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{10^3} = 10^{\frac{3}{2}}$, etc.

Isso permite operar com raízes empregando regras da potenciação.

yavi/Shutterstock

Simplificação de raízes

Acompanhe com atenção estes cálculos e a conclusão obtida:

- $\sqrt[6]{10^4} = 10^{\frac{4}{6}} = 10^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{10^2}$. Então, $\sqrt[6]{10^4} = \sqrt[3]{10^2}$.
- $\sqrt[8]{2^{20}} = 2^{\frac{20}{8}} = 2^{\frac{5}{2}} = \sqrt{2^5}$. Então, $\sqrt[8]{2^{20}} = \sqrt{2^5}$.

Ou seja: $\sqrt[np]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{np}} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ (se $a > 0$)

O valor de uma raiz não se altera quando dividimos o índice da raiz e o expoente do radicando por um mesmo número diferente de zero.

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n\not p]{a^{m\not p}} = \sqrt[n]{a^m} \text{ (com } a > 0\text{, } m\text{, } n \text{ e } p \text{ inteiros, } n \geq 2 \text{ e } p \neq 0)$$

Aplicamos essa propriedade para extrair ou simplificar raízes. Acompanhe os exemplos a seguir.

- $\sqrt{256} = \sqrt{2^8} = 2^4 = 16$
- $\sqrt[3]{1\,000\,000} = \sqrt[3]{10^6} = 10^2 = 100$
- $\sqrt[4]{49} = \sqrt[4]{7^2} = \sqrt{7}$

Começamos fatorando o radicando:

256	2
128	2
⋮	⋮
⋮	⋮
⋮	⋮

$256 = 2^8$

Raiz de um produto

Considere os cálculos a seguir e as conclusões que pudemos tirar.

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{4\cdot 9}=\sqrt{36}=6\\ \sqrt{4}\cdot\sqrt{9}=2\cdot 3=6\end{array}\right\}\sqrt{4\cdot 9}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}$$

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[3]{8\cdot 125}=\sqrt[3]{1000}=10\\ \sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{125}=2\cdot 5=10\end{array}\right\}\sqrt[3]{8\cdot 125}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{125}$$

Vamos generalizar:

$$\sqrt[n]{ab}=(ab)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$$

A raiz de um produto é igual ao produto das raízes dos fatores:

$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ (com $a>0$, $b>0$ e n inteiro, $n\geqslant 2$)

Essa propriedade é muito útil, pois, por meio dela, podemos extrair raízes ou simplificar raízes – basta decompor o radicando em fatores e, em seguida, extrair as raízes dos fatores e multiplicar os resultados. Considere outros exemplos:

- $\sqrt{196}=\sqrt{2^2\cdot 7^2}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{7^2}=2\cdot 7=14$
- $\sqrt[3]{216}=\sqrt[3]{2^3\cdot 3^3}=\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{3^3}=2\cdot 3=6$
- $\sqrt{12}=\sqrt{4\cdot 3}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$
- $\sqrt{50}=\sqrt{25\cdot 2}=\sqrt{25}\cdot\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

52. No caderno, escreva como potência:

a) $\sqrt[3]{2^4}$ $2^{\frac{4}{3}}$

b) $\sqrt[6]{9^5}$ $9^{\frac{5}{6}}$

c) $\sqrt{5^{-1}}$ $5^{-\frac{1}{2}}$

d) $\sqrt{10^3}$ $10^{\frac{3}{2}}$

53. Calcule no caderno:

a) $\sqrt[2]{3^8}$ 81

b) $\sqrt[2]{10^6}$ 1 000

c) $\sqrt[3]{2^9}$ 8

d) $\sqrt[4]{5^8}$ 25

54. Aplique a propriedade da raiz de um produto e calcule no caderno:

a) $\sqrt{4\cdot 36}$ 12

b) $\sqrt{9\cdot 100}$ 30

c) $\sqrt[3]{8\cdot 8}$ 4

d) $\sqrt[3]{27\cdot 1000}$ 30

55. Simplifique, fatorando o radicando:

a) $\sqrt{72}$ $6\sqrt{2}$

b) $\sqrt{18}$ $3\sqrt{2}$

c) $\sqrt{20}$ $2\sqrt{5}$

d) $\sqrt{48}$ $4\sqrt{3}$

Orientações didáticas

Raiz de um produto

Neste tópico, vamos estudar uma das propriedades de radicais: a raiz de um produto. Essa propriedade deriva da propriedade da potência de um produto.

Atividades

Neste bloco de atividades, o estudante deve mobilizar os conhecimentos construídos sobre o cálculo e a simplificação de raízes, além de aplicar a propriedade da raiz de um produto. Sugerimos que essa tarefa seja feita individualmente, o que possibilitará verificar o aprendizado de cada estudante. Faça a correção a cada atividade realizada, compartilhando respostas e procedimentos.

Proposta para o estudante

Calcule:

a) $27^{0,333...}+27^{\frac{2}{3}}$

b) $\sqrt[5]{32\cdot 243}$

Resoluções:

a) $27^{0,333...}+27^{\frac{2}{3}}=?$

- $0,333...=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$
- $27^{0,333...}=27^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{27}=3$
- $27^{\frac{2}{3}}=\left(27^{\frac{1}{3}}\right)^2=3^2=9$

Assim, temos:

$27^{0,333...}+27^{\frac{2}{3}}=3+9=12$

b) $\sqrt[5]{32\cdot 243}=\sqrt[5]{32}\cdot\sqrt[5]{243}=\sqrt[5]{2^5}\cdot\sqrt[5]{3^5}=2\cdot 3=6$

Orientações didáticas

Adição e subtração com raízes

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento das habilidades **EF09MA01** e **EF09MA03** ao explorar a adição e a subtração com raízes. O trabalho com o boxe *Na olimpíada* mobiliza, com maior ênfase a **CG02**, ao trabalhar a criatividade e a imaginação na resolução de problemas e a **CEMAT02**, pela implementação do raciocínio lógico-matemático, produzindo argumentos convincentes por meio da mobilização dos conhecimentos matemáticos.

Neste tópico, apresentamos as operações de adição e subtração envolvendo raízes. Nessas operações, as raízes devem ser calculadas para, depois, efetuarmos as operações de adição e/ou subtração. Caso haja raízes não exatas, pode-se efetuar os cálculos com valores aproximados das raízes envolvidas. Uma adição ou subtração com raízes pode ser efetuada quando elas tiverem mesmo radicando e mesmo índice, ou seja, se os radicais forem semelhantes. Nos demais casos, o resultado final exato manterá a adição ou subtração indicadas.

Discuta com os estudantes alguns exemplos:

- $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$
- $\sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$
- $2\sqrt{5} - 3\sqrt{5} - \sqrt{5} =$
  $= (2 - 3 - 1) \cdot \sqrt{5} =$
  $= -2 \cdot \sqrt{5} = -2\sqrt{5}$
- $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

Como não são radicais semelhantes, a adição fica apenas indicada, ou seja, o resultado é $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ mesmo.

- $\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{3} =$
  $= \sqrt{2} - 2\sqrt{3}$
- $\sqrt{9} - \sqrt{3} = 3 - \sqrt{3}$
  (cálculo exato)
- $\sqrt{9} - \sqrt{3} \simeq 3 - 1{,}73$
  (cálculo aproximado)

Ou seja: $\sqrt{9} - \sqrt{3} \simeq 1{,}27$

Participe

O boxe explora adição e subtração de raízes em um contexto geométrico, envolvendo o conceito de perímetro com cálculo exato e cálculo aproximado. Se julgar necessário, retome os procedimentos de aproximação de números na forma decimal.

Adição e subtração com raízes

Para calcular a soma (ou a diferença) de 2 raízes indicadas, devemos extrair as raízes e adicionar (ou subtrair) os resultados. Verifique os exemplos:

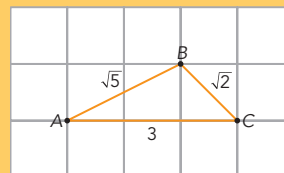
- $\sqrt{64} + \sqrt{36} = 8 + 6 = 14$
- $\sqrt[3]{125} - \sqrt{121} = 5 - 11 = -6$
- $\sqrt{3} + \sqrt{2} \simeq 1{,}732 + 1{,}414 \simeq 3{,}146$

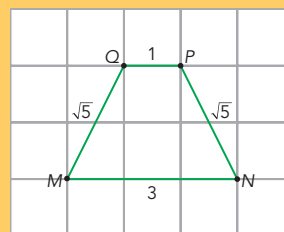
No terceiro exemplo, calculamos um valor aproximado para a soma $\sqrt{3} + \sqrt{2}$, empregando valores aproximados de $\sqrt{3}$ e de $\sqrt{2}$, que são números irracionais. Usando uma calculadora, verifique que, com seis casas decimais, $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ é aproximadamente igual a 3,146264.

Participe — Faça as atividades no caderno.

Considere que, nas figuras a seguir, todos os quadradinhos são unitários (medida do lado igual a 1). Já vimos que a diagonal de um quadrado unitário mede $\sqrt{2}$ e que a diagonal de um retângulo, cujas medidas das dimensões são 2 e 1, mede $\sqrt{5}$.

a) Qual é a medida de perímetro exata do triângulo *ABC*? $3 + \sqrt{2} + \sqrt{5}$

b) Recorrendo a uma calculadora, determine essa medida de perímetro, aproximando-a por 2 casas decimais. Aproximadamente 6,65.

c) Qual é a medida de perímetro exata do trapézio *MNPQ*? $4 + 2\sqrt{5}$

d) Quanto é, aproximando-a por 2 casas decimais, a medida de perímetro do trapézio *MNPQ*? Aproximadamente 8,47.

$XY = 3, YZ = \sqrt{5}, ZX = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

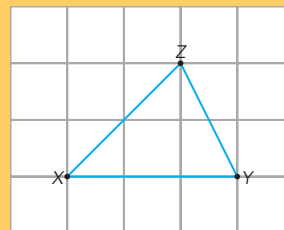
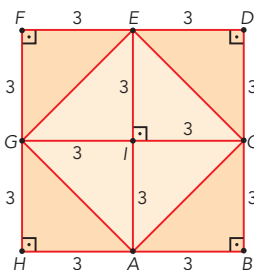
e) Quanto mede cada lado do triângulo *XYZ*?

f) Qual é a medida de perímetro exata desse triângulo? $3 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2}$

g) Quanto é, aproximando-a por 2 casas decimais, a medida de perímetro desse triângulo? Aproximadamente 8,06.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Atividades

Faça as atividades no caderno.

56. Considere a figura a seguir e resolva as questões no caderno.

As imagens não estão representadas em proporção.

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Qual é a medida de área do quadrado *BDFH*? 36

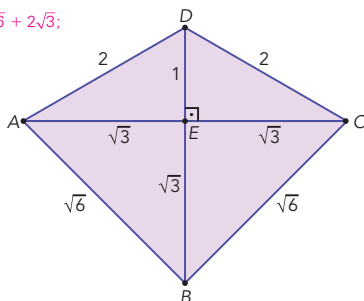
b) Qual é a medida de área do quadrado *ACEG*? 18

c) Quanto mede o lado do quadrado *ACEG*? $3\sqrt{2}$

d) Calcule a medida de perímetro:

- do quadrado *ACEG*; $12\sqrt{2}$
- dos triângulos *ACE* e *ACI*; $6 + 6\sqrt{2}$; $6 + 3\sqrt{2}$.
- dos pentágonos *BCEGH* e *ACDEG*; $12 + 6\sqrt{2}$; $6 + 9\sqrt{2}$.
- do hexágono *ABCEFG*. $12 + 6\sqrt{2}$

57. Considere a figura a seguir, em que há triângulos, um quadrilátero e pentágonos.

a) *ADE* e *CDE*: $3 + \sqrt{3}$; *ABE* e *BCE*: $\sqrt{6} + 2\sqrt{3}$; *ABD* e *CBD*: $3 + \sqrt{3} + \sqrt{6}$; *ACD*: $4 + 2\sqrt{3}$ e *ABC*: $2\sqrt{6} + 2\sqrt{3}$.
b) *ABCD*: $4 + 2\sqrt{6}$.
c) *AEDCB* e *ADECB*: $3 + \sqrt{3} + 2\sqrt{6}$ e *AEBCD* e *ABECD*: $4 + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Agora, calcule no caderno a medida de perímetro de:

a) 8 triângulos; **b)** 1 quadrilátero; **c)** 4 pentágonos.

Na olimpíada

A conta com 3 algarismos

(Obmep) Na conta indicada a seguir, as letras *X*, *Y* e *Z* representam algarismos distintos. Qual é o algarismo representado pela letra *Z*? Alternativa **e**.

$$\begin{array}{cccccc} & & X & X & X & X \\ & & Y & Y & Y & Y \\ + & & Z & Z & Z & Z \\ \hline & Y & X & X & X & Z \end{array}$$

a) 1
b) 3
c) 5
d) 6
e) 8

Descubra os algarismos

(Obmep) O produto de um número de dois algarismos pelo número formado pelos mesmos dois algarismos, escritos em ordem inversa, é 2 944. Qual é a soma dos dois números multiplicados? Alternativa **b**.

a) 99
b) 110
c) 121
d) 143
e) 154

Orientações didáticas

Atividades

Nestas atividades, o estudante deve mobilizar os conhecimentos construídos sobre adição e subtração de raízes. Sugira que elas sejam feitas em duplas, pois a discussão com colegas pode propiciar esclarecimento de dúvidas e enriquecer o aprendizado com a troca de experiências e maneiras diferentes de pensar.

Na olimpíada

No boxe, as atividades podem ser realizadas em pequenos grupos de no máximo 4 integrantes. Ao final, um representante de cada grupo apresenta a resolução feita pelo grupo, para discussão com a turma.

Proposta para o estudante

1. Use a calculadora e determine o valor das expressões a seguir.

a) $-\sqrt{8} + \sqrt{7}$

b) $\sqrt{81} - \sqrt{3} - \sqrt{11} + \sqrt{11}$

2. Sem usar valores aproximados, verifique entre quais dois números inteiros o valor da expressão $\sqrt{5} - \sqrt{4} - \sqrt{5} + \sqrt{3}$ se encontra, de modo que não haja outros números inteiros nesse intervalo.

Resoluções:

1. Espera-se que o estudante obtenha, aproximadamente:

a) $-0{,}183$

b) 7,27

2. $\sqrt{5} - \sqrt{4} - \sqrt{5} + \sqrt{3} = -2 + \sqrt{3}$

Como $\sqrt{3}$ está entre 1 e 2, já que 3 está entre 1 e 4, temos que $-2 + \sqrt{3}$ é um valor negativo e:

$1 < \sqrt{3} < 2$

$1 - 2 < \sqrt{3} - 2 < 2 - 2$

$-1 < -2 + \sqrt{3} < 0$

Logo, o valor da expressão dada está entre -1 e 0.

Orientações didáticas

Multiplicação e divisão com raízes

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento das habilidades **EF09MA01** e **EF09MA03** ao explorar a multiplicação e a divisão de raízes.

Neste tópico, são apresentadas as operações de multiplicação e divisão envolvendo raízes. Ressalte para os estudantes que essas operações podem ser efetuadas, em cálculo exato, somente quando as raízes têm o mesmo índice. Caso haja raízes que não apresentem mesmo índice, podemos transformá-las em raízes de mesmo índice usando a ideia de simplificação de raízes, mas no caminho inverso. Discuta com eles alguns exemplos antes de propor o que foi dado no livro. Por exemplo:

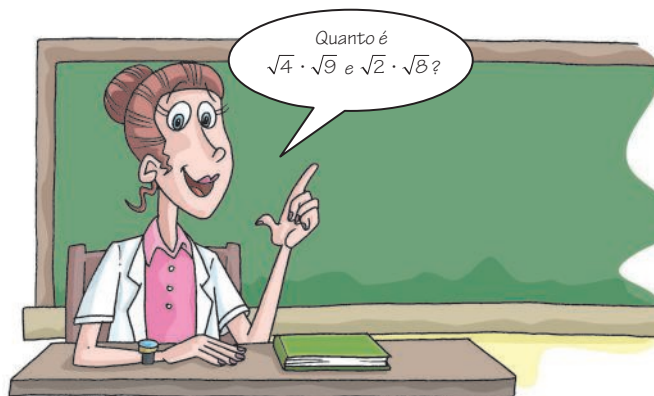
a) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{5 \cdot 3} = \sqrt{15}$

b) $\sqrt{18} : \sqrt{2} = \sqrt{18 : 2} =$
$= \sqrt{9} = 3$

c) $\sqrt[3]{7} \cdot \sqrt{2} = \sqrt[6]{7^2} \cdot \sqrt[6]{2^3} =$
$= \sqrt[6]{7^2 \cdot 2^3} = \sqrt[6]{49 \cdot 8} =$
$= \sqrt[6]{392}$

d) $\sqrt{45} : 3 = \sqrt{45} : \sqrt{9} =$
$= \sqrt{45 : 9} = \sqrt{5}$

Em seguida, explore os exemplos do Livro do Estudante.

Multiplicação e divisão com raízes

Marcelo Gagliano/Arquivo da editora

Como $\sqrt{4} = 2$ e $\sqrt{9} = 3$, temos: $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$.

No entanto, $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = (1{,}41421356...) \cdot (2{,}82842712...)$. Pode ser trabalhoso utilizar muitas casas decimais em operações como essa. Então, podemos realizar essa operação com auxílio das propriedades de potências, para obter um valor exato ou, eventualmente, uma boa aproximação do resultado.

Já vimos que, para $a > 0$, $b > 0$ e n inteiro, com $n \geqslant 2$, vale a igualdade:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Então:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

A multiplicação de 2 raízes de mesmo índice pode ser reduzida a um só radical; basta conservar o índice e multiplicar os radicandos. No final, extraímos a raiz.

Assim: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$.

Note outros exemplos:

- $\sqrt{5} \cdot \sqrt{20} = \sqrt{5 \cdot 20} = \sqrt{100} = 10$
- $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$ $(\simeq 2{,}45)$
- $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{40} = \sqrt{2 \cdot 5 \cdot 40} = \sqrt{400} = 20$
- $\sqrt{16} \cdot \sqrt{2\,500} = 4 \cdot 50 = 200$ (16 e 2500 são quadrados perfeitos, então não precisamos aplicar a propriedade.)

Agora consideremos a divisão de raízes de mesmo índice. Para $a > 0$, $b > 0$ e n inteiro, com $n \geqslant 2$:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Marcelo Gagliano/Arquivo da editora

Podemos reduzir a um só radical, conservando o índice e dividindo os radicandos. No final, extraímos a raiz. Acompanhe os exemplos:

- $\dfrac{\sqrt{60}}{\sqrt{15}} = \sqrt{\dfrac{60}{15}} = \sqrt{4} = 2$
- $\dfrac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\dfrac{24}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$
- $\dfrac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{10}{2}} = \sqrt{5}$ ($\simeq 2{,}236$)
- $\dfrac{\sqrt{225}}{\sqrt{25}} = \dfrac{15}{5} = 3$ (225 e 25 são quadrados perfeitos, então não precisamos aplicar a propriedade)

E se os índices forem diferentes?

Nesse caso, transformamos as raízes em outras raízes de mesmo índice, que pode ser o mmc dos índices dados. Por exemplo:

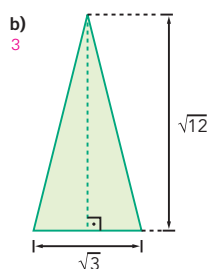
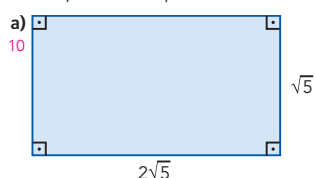
$$\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{2^3} \cdot \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{8 \cdot 25} = \sqrt[6]{200}$$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

58. Calcule, no caderno, a medida de área de cada figura.

a) 10

b) 3

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

59. Efetue as multiplicações e reduza o resultado a um único radical, simplificando quando possível.

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{5}$ $\sqrt{10}$

b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}$ $\sqrt{30}$

c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{12}$ 6

d) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$ 4

60. Calcule, no caderno, o valor de cada expressão.

a) $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}$ $\sqrt{5}$

b) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$ $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$

c) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}}$ $\sqrt{3}$

d) $\dfrac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ 3

As imagens não estão representadas em proporção.

Potenciação e radiciação

Potência de raiz

Como $\sqrt{2} = 1{,}41421356...$, temos:

$(\sqrt{2})^3 = (1{,}41421356...) \cdot (1{,}41421356...) \cdot (1{,}41421356...)$

Para realizar essa multiplicação sem utilizar valores aproximados de $\sqrt{2}$, recorremos às propriedades das raízes, transformando $(\sqrt{2})^3$ em uma expressão mais simples de ser calculada. Temos:

$$(\sqrt{2})^3 = (\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Orientações didáticas

Atividades

Nestas atividades, o estudante deve mobilizar os conhecimentos construídos acerca das operações de multiplicação e divisão de raízes. Sugerimos que elas sejam feitas individualmente. Na correção, peça que alguns estudantes mostrem na lousa como trabalharam, discutindo os procedimentos com a turma. Ouvir a explicação de colegas pode auxiliar no aprendizado tanto para o estudante que deverá explicar seu procedimento quanto para os que ouvem, por ser uma linguagem mais próxima deles.

Potenciação e radiciação

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA03** ao explorar a potenciação e a radiciação envolvendo raízes.

Neste tópico, são apresentadas as operações de potenciação e de radiciação envolvendo raízes.

Potência de raiz

Este tópico trata do cálculo de potência de uma raiz, que pode ser obtida com a multiplicação de fatores iguais ou expressando as raízes como potências e aplicando as propriedades da potenciação.

Discuta os exemplos do livro e proponha outros na lousa para ampliação, deixando que os estudantes conversem entre si para resolvê-los.

Orientações didáticas

Raiz de raiz

Nesta seção, serão abordadas raízes de raízes, que podem ser obtidas expressando todos os radicais como potências e aplicando as propriedades da potenciação.

Solicite aos estudantes que, em duplas, acompanhem os exemplos do livro e discutam sobre eles.

Atividades

Nestas atividades, o estudante deve mobilizar os conhecimentos construídos sobre potências e raízes de uma raiz. Sugira que as atividades sejam feitas individualmente. Em seguida, compartilhe as respostas e os procedimentos utilizados.

Há outro modo de fazer essa simplificação:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = a^{\frac{1}{n}\cdot m} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Quando $a > 0$, n é um inteiro positivo ($n \geqslant 2$) e m é um expoente inteiro, vale a igualdade:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Assim, $\left(\sqrt{2}\right)^3 = \sqrt{2^3} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = 2\sqrt{2}$.

Verifique outros exemplos:

- $\left(\sqrt{5}\right)^3 = \left(\sqrt{5}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{5}\right) = 5\sqrt{5}$ ou $\left(\sqrt{5}\right)^3 = \sqrt{5^3} = \sqrt{5^2 \cdot 5} = 5\sqrt{5}$
- $\left(\sqrt{2}\right)^5 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ ou $\left(\sqrt{2}\right)^5 = \sqrt{2^5} = \sqrt{2^4 \cdot 2} = 2^2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$
- $\left(\sqrt[3]{10}\right)^2 = \sqrt[3]{10^2} = \sqrt[3]{100}$

Raiz de raiz

Considere um exemplo numérico:

$$\sqrt{\sqrt{10}} = \left(\sqrt{10}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(10^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = 10^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{10}$$

Quando m e n são inteiros positivos ($m \geqslant 2$ e $n \geqslant 2$) e $a > 0$, temos:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{\frac{1}{m}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{m \cdot n}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Posso indicar a raiz de outra raiz com um só radical?

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Logo, podemos transformar raiz de raiz em um só radical multiplicando os índices das raízes:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$$

Voltando ao exemplo e aplicando essa propriedade:

$$\sqrt{\sqrt{10}} = \sqrt[2 \cdot 2]{10} = \sqrt[4]{10}$$

Outro exemplo:

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[3 \cdot 2]{5} = \sqrt[6]{5}$$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

61. Calcule no caderno:

a) $\left(\sqrt{3}\right)^4$ 9

b) $\left(\sqrt{2}\right)^{10}$ 32

c) $\left(\sqrt[4]{5}\right)^8$ 25

d) $\left(\sqrt[3]{3}\right)^6$ 9

e) $\left(\sqrt{2}\right)^5$ $4\sqrt{2}$

f) $\left(5\sqrt[4]{2}\right)^4$ 1 250

62. Qual é a medida de volume de um cubo cuja aresta mede $2\sqrt{10}$ cm? $80 \cdot \sqrt{10}$ cm³

63. No caderno, escreva usando um único radical:

a) $\sqrt{\sqrt{6}}$ $\sqrt[4]{6}$

b) $\sqrt{\sqrt[3]{10}}$ $\sqrt[6]{10}$

c) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$ $\sqrt[8]{2}$

Educação financeira

Faça as atividades no caderno.

Prática de pesquisa

Um lar para chamar de seu

Quanto pesa no orçamento de uma família a prestação da casa própria ou o aluguel? Quais são os meios de adquirir uma casa própria se a família não pode pagar à vista? Esse é o tema das questões a seguir. Responda-as no caderno. As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

I. Quais costumam ser os gastos extraordinários de alguém que não ganha o suficiente para pagar todas as suas despesas?

II. Qual é o gasto extraordinário de uma pessoa que não conseguiu poupar para adquirir uma moradia?

III. Na região em que você vive, comparando o valor de um imóvel com o respectivo aluguel, qual é o percentual representado pelo aluguel?

IV. "Alugar um imóvel é como pedir dinheiro emprestado; o aluguel representa os juros desse empréstimo." Você concorda com esse pensamento? Justifique.

V. "Prefiro não gastar dinheiro em produtos supérfluos e caros; dessa maneira, consigo fazer uma poupança que servirá para eu comprar uma moradia e evitar pagar aluguel, porque esta é uma despesa que me obriga a trabalhar mais." Você concorda com esse pensamento ou discorda dele? Justifique.

VI. Qual é a ordem de grandeza (meses ou anos) referente ao tempo necessário para que a poupança realizada por uma família chegue a um valor próximo de um imóvel para moradia?

VII. Se uma pessoa deseja antecipar a compra de um imóvel próprio para moradia, que alternativas ela tem?

VIII. Que instituições financiam a compra de moradia própria?

IX. Você já ouviu falar em planos governamentais para financiar a compra de moradias? Faça uma pesquisa sobre isso selecionando bem as fontes que vai consultar.

X. Ao contratar um financiamento para a compra de moradia própria, a pessoa está contraindo novos gastos? Justifique.

XI. Qual é o principal critério para uma pessoa decidir se é melhor pagar aluguel ou contratar o financiamento de um imóvel residencial próprio?

Lordn/Shutterstock

As maneiras mais comuns de comprar um imóvel quando não se tem o valor total são o financiamento bancário e o consórcio.

Orientações didáticas

Educação financeira

Na BNCC

Esta seção mobiliza com maior ênfase a **CG06**, a **CG07**, a **CG09** e a **CG010** ao levar para a sala de aula oportunidades para trabalhar o exercício de cidadania e projeto de vida, tendo a matemática como ferramenta de tomada de decisões; e a **CEMAT07** e a **CEMAT08** ao incentivar que os estudantes compartilhem experiências e argumentos sobre decisões de cunho individual e coletivo. A seção favorece ainda o desenvolvimento do TCT *Educação Financeira*.

Há vários termos que podem ser explorados conceitualmente, tais como "Gastos Extraordinários". A reflexão sobre as questões apresentadas contribui para o desenvolvimento da autonomia e da argumentação dos estudantes, pois possibilita a avaliação e interação com questões sociais. Também é um tema polêmico, que auxilia no desenvolvimento de práticas argumentativas orais e escritas

As questões desta seção podem ser discutidas em duplas ou trios. Peça antecipadamente que os estudantes tragam os dados necessários já pesquisados como os da questão III. Depois dessa discussão, promova uma roda de conversa para que exponham o que pensaram e as respostas que elaboraram.

Orientações didáticas

Na mídia

Na BNCC

Esta seção mobiliza o desenvolvimento do TCT *Educação Alimentar e Nutricional* e valoriza a obtenção de informações em diferentes fontes e a divulgação em diferentes mídias, inclusive nas que abarcam as culturas juvenis (*podcasts*, vídeos, *memes*, etc.). Isso favorece o desenvolvimento da **CG08**.

A produção da maior *pizza* do mundo é um bom contexto para adentrar na cultura popular, refletindo com os estudantes sobre as práticas alimentares dessa geração e como elas se aproximam ou se distanciam de uma alimentação saudável.

Faça uma leitura compartilhada do texto desta seção e deixe que os estudantes discutam as atividades. Peça que registrem no caderno o que tiveram dificuldade. Na correção coletiva, verifique os pontos que geraram dúvidas a fim de saná-las.

Reúna os estudantes em grupos de até 4 integrantes e peça que discutam sobre os problemas que elaboraram na atividade **4**. Ao final, um representante de cada grupo apresentará algum desses problemas com a resolução na lousa para discussão com toda a turma.

Aproveite o contexto dessa seção e converse sobre alimentação saudável. Defenda e resgate os conceitos estudados em anos anteriores sobre práticas de pesquisa, principalmente na questão que solicita que seja pesquisado o número de ouro, para não usar fontes não confiáveis, *fake news*, etc.

A maior *pizza* do mundo

[...]

No último sábado, 10 [de junho de 2017], foi feita a maior *pizza* do mundo em Los Angeles, Califórnia. A massa tem 1,93 km de extensão e superou a marca registrada na Itália no último ano. A medida foi certificada por representantes do *Guinness*, o livro dos recordes.

Zhao Hanrong/Avalon/AGB Photo Library

Maior *pizza* do mundo, em 2017, montada na Califórnia, Estados Unidos.

Desde o início da manhã, dezenas de pessoas e *chefs* trabalharam no circuito automobilístico de Fontana e montaram a *pizza*, que tem 3 632 kg de massa, 1 634 kg de queijo e 2 542 de molho. [...]

Para conseguir assar a *pizza*, foi necessário usar três fornos industriais, que funcionaram sem parar durante oito horas. Para que desse certo, muitos voluntários ajudaram. O evento era gratuito e, segundo a organização, o objetivo era celebrar a humanidade e a amizade.

Toda comida será doada para bancos de alimentos locais e abrigos para desamparados.

Anteriormente, a maior *pizza* do mundo havia sido feita na Itália, em 2016, e tinha 1,85 km.

NORTE-AMERICANOS fazem a maior *pizza* do mundo com quase 2 km. *O Estado de S. Paulo*, São Paulo, 11 jun. 2017. Disponível em: https://emais.estadao.com.br/noticias/comportamento,norte-americanos-fazem-a-maior-pizza-do-mundo-com-quase-2-km,70001835685. Acesso em: 7 abr. 2022.

1. Com uma massa que pesava 3 632 kg, mais 1 634 kg de queijo e 2 542 kg de molho, a *pizza* ficou com "um grande sabor", de acordo com os organizadores. Aproximadamente, quantas toneladas pesava a *pizza*? Aproximadamente 7,8 t.

2. Se cortássemos essa *pizza* em fatias, aproximadamente quantas fatias ela teria se, em média, cada fatia tivesse 120 gramas? Aproximadamente 65 000 fatias.

3. Se você comer 2 pedaços de *pizza* e tomar 1 lata de refrigerante, quanto tempo de corrida vai levar para queimar as quilocalorias ingeridas? Consulte a tabela a seguir. 56 minutos.

Quanto exercício é preciso fazer para queimar quilocalorias?

Alimento	Quantidade de quilocalorias	Caminhada (3-5 km/h)	Corrida (5-8 km/h)
1 tigela de cereal	172	31 minutos	16 minutos
1 barra de chocolate	229	42 minutos	22 minutos
1 lata de refrigerante	138	26 minutos	13 minutos
1 *muffin* de mirtilo	265	48 minutos	25 minutos
1 pacote de batata *chips*	171	31 minutos	16 minutos
1 sanduíche de *bacon* e frango	445	82 minutos	42 minutos
2 pedaços de *pizza*	449	83 minutos	43 minutos

Fonte dos dados: QUANTO EXERCÍCIO é preciso para queimar as calorias de uma *pizza*? *Veja*, [*s. l.*], 11 dez. 2019. Disponível em: https://veja.abril.com.br/saude/quanto-exercicio-e-preciso-para-queimar-as-calorias-de-uma-pizza/.Acesso em: 7 abr. 2022.

4. Elabore um problema levando em consideração os dados dessa reportagem.
O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Na Unidade

Faça as atividades no caderno.

1. Indique no caderno a afirmação verdadeira. Alternativa **d**.

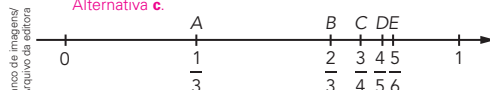
a) 0,313131... é um número natural.

b) 5,47 é um número inteiro.

c) 5,171717... é um número irracional.

d) 24,656565... é um número racional.

2. Na reta numérica a seguir, o número irracional 0,78910111213... deve ser representado entre: Alternativa **c**.

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) *A* e *B*.

b) *B* e *C*.

c) *C* e *D*.

d) *D* e *E*.

3. **(FGV-SP)** Na reta numérica indicada a seguir, todos os pontos marcados estão igualmente espaçados. Alternativa **c**.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Sendo assim, a soma do numerador com o denominador da fração irredutível que representa *x* é igual a:

a) 39. **b)** 40. **c)** 41. **d)** 42. **e)** 43.

4. O número $6^{100} - 1$ é divisível por: Alternativa **c**.

a) 2. **b)** 3. **c)** 5. **d)** 10.

5. **(Fatec-SP)** Considere que a massa de um próton é $1{,}7 \cdot 10^{-27}$ kg, o que corresponde a cerca de 1800 vezes a massa de um elétron.

Dessas informações é correto concluir que a massa do elétron é aproximadamente: Alternativa **b**.

a) $9 \cdot 10^{-30}$ kg.

b) $0{,}9 \cdot 10^{-30}$ kg.

c) $0{,}9 \cdot 10^{-31}$ kg.

d) $2{,}8 \cdot 10^{-31}$ kg.

6. Quantas soluções reais tem a equação $x^4 - 4 = 0$? Alternativa **c**.

a) Nenhuma. **b)** 1 **c)** 2 **d)** 4

7. O valor de $256^{-0{,}75}$ é igual ao valor de: Alternativa **b**.

a) 6^{-2}. **b)** $\left(\frac{1}{2}\right)^6$. **c)** 4^3. **d)** 16^{-3}.

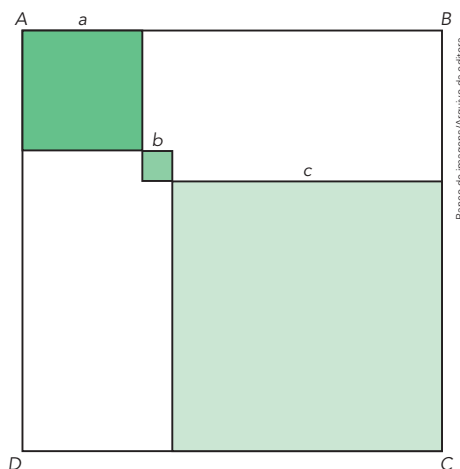
8. Quantos algarismos tem o número $2^{15} \cdot 5^{12}$ escrito na forma decimal? Alternativa **c**.

a) 10. **b)** 12. **c)** 13. **d)** 15.

9. **(Saresp)** Efetuando as operações $(\sqrt{32} + \sqrt{18}) \cdot (\sqrt{2})$ obtemos o resultado: Alternativa **d**.

a) 2. **b)** 8. **c)** 10. **d)** 14.

10. **(Embraer-SP)** Na figura seguinte, observam-se três quadrados, de lados *a*, *b* e *c*, cujas áreas são, respectivamente, 32 cm², 8 cm² e 72 cm², dispostos dentro de um quadrado maior *ABCD*.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Se a medida do lado do quadrado *ABCD* é a soma das medidas dos lados dos três quadrados menores, então a expressão algébrica que representa a área do quadrado *ABCD* é: Alternativa **c**.

a) $(14\sqrt{2})^2$. **b)** $(12\sqrt{3})^2$. **c)** $(12\sqrt{2})^2$. **d)** $(8+\sqrt{6})^2$.

Orientações didáticas

Na Unidade

Na BNCC

Esta seção favorece o desenvolvimento das habilidades exploradas ao longo de toda a Unidade e mobiliza com maior ênfase a **CEMAT02**, a **CEMAT06** e a **CG02** ao propor a resolução de atividades diversas por meio de diferentes contextos e estratégias de resolução.

Esta seção traz atividades dos principais conteúdos abordados na Unidade que podem ser utilizadas como ferramentas de avaliação. Proponha a resolução das atividades individualmente. Acompanhe os estudantes durante a realização delas e registre avanços e dificuldades para, ao final, propor novas atividades para remediação coletiva ou individual de defasagens, conforme cada caso.

A seguir, listamos algumas sugestões e estratégias para remediação.

Na atividade **1**, o objetivo é verificar os conhecimentos do estudante sobre número racional e número irracional. Caso haja dificuldades, para remediação, solicite que os estudantes revejam esses conceitos no livro texto. Depois, faça um ditado em que você indica o número e cada estudante, na sua vez, deve dizer, em voz alta, se é racional natural, racional inteiro, racional não inteiro ou irracional.

Na atividade **2**, o objetivo é verificar se o estudante faz a localização correta de um número irracional entre dois números racionais na reta numérica. No caso de dúvidas, proponha atividades de remediação, para serem feitas em duplas, envolvendo a localização de números racionais em uma reta numérica, para, depois, identificar a posição de alguns números irracionais nessa reta numérica.

As atividades **4** e **5** visam verificar a compreensão do estudante sobre cálculo de potências e regras de divisibilidade. Como remediação para as dificuldades, proponha uma roda de conversa após a releitura e análise do enunciado com a turma, promovendo a oportunidade de os estudantes exporem seu modo de pensar e de refletirem sobre a fala dos colegas, a fim de rever seus procedimentos.

A atividade **6** visa verificar se o estudante compreendeu potências de expoente *n* inteiro par e se aplica esse conhecimento na resolução de equações do tipo $x^n = a$. Para remediação de possíveis dificuldades, proponha atividades que explorem equações que envolvem cálculos similares para discussão em duplas ou trios.

Nas atividade **7** e **8**, o objetivo é verificar os conhecimentos do estudante com relação à potenciação. Para aqueles que apresentarem dificuldade, como remediação, proponha que resolvam, junto com um colega, atividades específicas de cada conceito, como algumas que envolvam apenas a decomposição em fatores primos e outras que tratem da aplicação das propriedades da potenciação.

Na atividade **9**, o objetivo é verificar se o estudante compreendeu as operações com números reais na forma de radical. Em caso de dificuldade, como remediação, proponha atividades similares para serem resolvidas em duplas.

Na atividade **10**, o objetivo é verificar as estratégias que o estudante vai usar na resolução de um problema com contexto geométrico que envolvem cálculo com raízes. Caso haja dificuldade, como remediação, proponha uma releitura do enunciado feita em pequenos grupos.

Outras dificuldades diferentes das listadas podem surgir; por isso, é importante o monitoramento individual e contínuo dos estudantes.

Orientações didáticas

Abertura

Na BNCC

A abertura da Unidade permite mobilizar com maior ênfase a **CG01**, ao promover uma reflexão sobre a importância das escolas na formação de todo cidadão; a **CG02**, ao propor a sugestão de soluções que evitem um problema social e também ao questionar conhecimentos matemáticos que podem ser aplicados à prática rural; a **CG04** e a **CG07**, ao incentivar a formação de opinião pautada em fatos e dados reais e a troca de ideias de maneira responsável; e a **CG10**, por abordar um tema de interesse social.

A abertura desta Unidade tem por objetivo possibilitar discussões sobre a necessidade de associar conhecimentos acadêmicos com a prática cotidiana, neste caso, dos trabalhadores do campo. Além disso, também é explorado um tema social: o acesso à educação, que é um direito de toda criança.

Inicie o trabalho promovendo uma conversa coletiva com a turma, questionando as condições da escola. Pergunte o que eles acham que poderia ser melhorado nas instalações do prédio e solicite que argumentem apontando os benefícios que essas mudanças trariam. Caso a escola seja urbana, questione também se os estudantes já viram uma escola do campo, pedindo que citem as diferenças em relação às escolas urbanas que conhecem. Caso seja possível, é interessante levar para a sala de aula fotografias de diferentes escolas (incluindo de outras cidades), para que os estudantes façam comparações e reflitam sobre os impactos na comunidade escolar.

Depois, aproveite o momento para comentar sobre o direito à educação e sua importância para a construção de uma sociedade mais justa. Incentive-os a refletir sobre o impacto dos fechamentos de escola mencionados no texto da abertura. Faça perguntas como: "Você acredita que o fechamento de uma escola pode afetar a vida da comunidade ao seu redor?"; "Como a vida de uma criança que deixa de ir à escola pode ser afetada?"

UNIDADE 2

Cálculo algébrico

NESTA UNIDADE VOCÊ VAI:

- relacionar produtos notáveis à Geometria;
- resolver problemas utilizando as propriedades dos produtos notáveis;
- conhecer as propriedades da fatoração para utilização em polinômios;
- resolver problemas de fatoração de polinômios.

CAPÍTULOS

Escola Municipal Maria Menezes da Silva no Povoado Bulandeira. Primeira Cruz (MA). Foto de 2019.

João Prudente/Pulsar Imagens

Aulas práticas em escolas do campo brasileiras

É grande o número de estudantes de escolas do campo brasileiras que enfrentam muitas dificuldades para garantir um direito básico de toda criança: a educação. Há escolas do campo que contam com apenas uma sala de aula e as condições de estrutura são precárias, além de estarem localizadas em lugares com poucas opções de transporte.

Por esses e outros motivos, muitas dessas escolas acabam fechando, como evidenciam os dados trazidos pela Assembleia Legislativa do Estado do Pará:

> [...]
>
> De acordo com dados do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) cerca de 100 mil escolas, em 15 anos, entre os anos de 2000 e 2015, foram fechadas em todo o país. Deste total, 5 355 escolas somente no estado [do] Pará, sendo 4 411 no campo e 944 na área urbana.
>
> [...]
>
> A Lei nº 12.960, de 27/03/2014 determina que a extinção de escolas em comunidades rurais, indígenas e quilombolas deve ser debatida com a população e necessita de um laudo de impacto social, elaborado pelos conselhos municipais ou estadual.
>
> [...]

CAMPELO, Lilian. Fechamento de escolas no campo reunirá sociedade civil em audiência pública na Alepa. *Assembleia Legislativa do Estado do Pará* (Alepa), 19 set. 2019. Disponível em: https://www.alepa.pa.gov.br/noticia/2099/. Acesso em: 26 abr. 2022.

Ações estão sendo discutidas e implementadas a fim de dificultar o fechamento de escolas do campo, como a lei citada no texto e como um projeto aprovado pela Comissão de Educação do Senado em 2018, que inclui a Pedagogia da Alternância na Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB – Lei nº 9.394/96) como uma metodologia a ser adotada em escolas do campo.

A Pedagogia da Alternância foi desenvolvida na França e consiste na associação da teoria com atividades práticas do campo. Com isso, estudantes são submetidos primeiramente a conhecimentos técnicos voltados para a realidade agrícola e, em seguida, os aplicam no campo, geralmente em propriedades familiares ou nos arredores da escola.

Fonte dos dados: Câmara inclui na LDB a pedagogia da alternância para jovens do campo. *Sabedoria Política* [*s. l.*], [2011?]. Disponível em: https://www.sabedoriapolitica.com.br/products/pedagogia-de-alternancia-para-jovens-do-campo/. Acesso em: 27 abr. 2022.

Responda no caderno:

Na sua opinião, que outras ações poderiam ser desenvolvidas para dificultar o fechamento de escolas do campo? Quais conhecimentos matemáticos você aprendeu que poderiam ser aplicados à prática rural? Pesquise e apresente o que você encontrou para os colegas.
Os exemplos de resposta encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Orientações didáticas

Abertura

Aproveite o momento para perguntar também sobre o impacto da escola na vida dos estudantes. Pergunte se eles acham que foi importante aprender a ler, a realizar operações matemáticas e a aprender sobre o país em que vivem. Ainda nesse sentido, pergunte se acreditam que todas as escolas devem ser iguais. Questione: “Uma escola do campo deve ensinar exatamente as mesmas coisas que uma escola urbana? E uma escola indígena?”.

Incentive todos os estudantes a apresentarem suas ideias sobre o assunto e destaque a importância de respeitar o momento dos colegas falarem, ouvindo com atenção e expressando as opiniões no momento adequado e de maneira amigável.

Ao abordar a primeira pergunta proposta na abertura, leve em consideração que as respostas dependem de onde os estudantes moram e da experiência e conhecimento que possuem sobre a vida no campo. Nesse sentido, busque associar à discussão a realidade dos estudantes. Explore também a noção de Pedagogia da Alternância de modo a valorizar as práticas do homem do campo.

Para explorar a segunda pergunta, instigue discussões a respeito da temática e possibilite o resgate de conhecimentos prévios sobre os conceitos matemáticos que podem estar relacionados com a prática rural. Espera-se que os estudantes respondam que, neste contexto, podem ser aplicados conhecimentos relacionados a Grandezas e Medidas, como o cálculo de medidas de perímetro, área, capacidade produtiva de certa região relacionada a taxas percentuais, ou ainda o uso da estatística para investigar algum fenômeno ou problema oriundo do trabalho do campo para possibilitar a intervenções na realidade.

Proposta para o professor

A apresentação desse conteúdo tem como base pesquisas em Educação Matemática Crítica, que possibilitam reflexões voltadas para a formação de cidadãos críticos e atuantes na sociedade.
Assim, sugerimos a leitura de artigos que abordem esta área de estudo, como o disponível em: <https://revistas.unilasalle.edu.br/index.php/Educacao/article/download/5678/pdf>. Acesso em: 7 jun. 2022.

Orientações didáticas

Quadrado da soma de dois termos

Na BNCC

Este capítulo favorece o desenvolvimento das habilidades **EF09MA03** e **EF09MA04** ao propor uma reflexão sobre o quadrado da soma de dois termos e o trabalho com as operações de multiplicação, adição e potenciação.

Para introduzir o conteúdo do quadrado da soma de dois termos, retome com os estudantes a operação de potenciação e a propriedade distributiva. Para isso, apresente exemplos como a^2 e $a \cdot (b + c)$, para depois explorar o desenvolvimento da expressão algébrica $(a + b)^2$, que será feito multiplicando $(a + b)$ por $(a + b)$.

Essa abordagem favorece o desenvolvimento do pensamento computacional, visto que, a partir de um caso geral, criam-se regras para resolver operações do mesmo tipo, trabalhando a ideia de algoritmo.

Participe

O boxe *Participe* tem como objetivo relacionar o desenvolvimento dos produtos notáveis com o conceito de área. Assim, antes de realizar a atividade **I**, introduza o contexto geométrico do conteúdo e retome o cálculo de áreas de retângulos e quadrados.

Na atividade **II**, explore a afirmação do enunciado com os estudantes, enfatizando o quadrado maior e as medidas dos lados e incentivando os estudantes a representá-las algebricamente. Posteriormente, no item **c**, questione a veracidade da sentença e explore a argumentação tanto no âmbito algébrico quanto no geométrico.

Produtos notáveis

EF09MA03
EF09MA04

Quadrado da soma de dois termos

A expressão algébrica $(a + b)^2$ apresenta a soma de dois termos, $a + b$, elevada ao quadrado; é, portanto, o quadrado da soma de dois termos. Podemos calculá-la algebricamente multiplicando $(a + b)$ por $(a + b)$:

$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b)$$
$$(a + b)^2 = a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b$$
$$(a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$$

Como $ba = ab$, temos: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Esse resultado é um **produto notável**. Podemos determiná-lo sem precisar multiplicar termo a termo. Verifique:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

- a → 1º termo
- b → 2º termo
- a^2 → quadrado do 1º termo
- $2ab$ → duas vezes o produto dos termos
- b^2 → quadrado do 2º termo

Ou seja:

> O **quadrado da soma de dois termos** é igual ao quadrado do primeiro termo mais duas vezes o produto do primeiro pelo segundo mais o quadrado do segundo termo.

Participe

Faça as atividades no caderno.

I. Na figura, há 2 quadrados com o número ① em seu interior e 2 retângulos com o número ② em seu interior.

No caderno, responda:

a) Qual é a medida de área de cada quadrado com o número ① em seu interior? a^2 e b^2.

b) Qual é a medida de área de cada retângulo com o número ② em seu interior? ab e ab.

II. Os quadrados menores e os retângulos são partes de um quadrado maior. A medida de área do quadrado maior é igual à soma das medidas de áreas dos quadrados menores e dos retângulos.

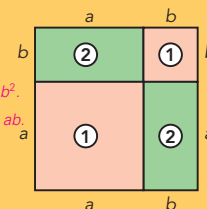
No caderno, responda:

a) Quanto medem os lados do quadrado maior? $a + b$

b) Qual é a medida de área do quadrado maior? $(a + b)^2$ ou $a^2 + b^2 + 2ab$.

c) A sentença $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ é verdadeira ou falsa? Verdadeira.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Proposta para o estudante

O *link* https://www.geogebra.org/m/cc5bkzae (Acesso em: 7 jun. 2022) pode ser utilizado em sala de aula. Nele consta um simulador de áreas de quadrados em função de um parâmetro relacionado à interpretação geométrica do quadrado da soma de dois termos. Ao apresentar a página para os estudantes, movimente o controle deslizante a_1 para visualizar a variação dos valores dos termos da expressão algébrica do quadrado da soma.

Verifique alguns exemplos de quadrado da soma de dois termos:

- $(5x + 3y)^2 = (5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot 3y + (3y)^2 = 25x^2 + 30xy + 9y^2$
- $(\sqrt{2} + 1)^2 = (\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 + 1^2 = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = 3 + 2\sqrt{2}$
- $(3a + \sqrt{3})^2 = (3a)^2 + 2 \cdot 3a \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 9a^2 + 6\sqrt{3}a + 3$

4. a) $(20 + 1)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 1 + 1^2 = 400 + 40 + 1 = 441$
b) $(30 + 2)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 2 + 2^2 = 900 + 120 + 4 = 1024$
c) $(60 + 1)^2 = 60^2 + 2 \cdot 60 \cdot 1 + 1^2 = 3600 + 120 + 1 = 3721$
d) $(90 + 5)^2 = 90^2 + 2 \cdot 90 \cdot 5 + 5^2 = 8100 + 900 + 25 = 9025$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. e) $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$

1. No caderno, calcule algebricamente os produtos notáveis.

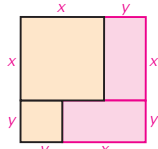
a) $(x + 1)^2$ $x^2 + 2x + 1$
b) $(x + 6)^2$ $x^2 + 12x + 36$
c) $(a + 10)^2$ $a^2 + 20a + 100$
d) $(y + 4)^2$ $y^2 + 8y + 16$
e) $(x + \sqrt{2})^2$
f) $(3x + 1)^2$ $9x^2 + 6x + 1$

2. No caderno, determine os produtos notáveis.

a) $(2a + 5)^2$ $4a^2 + 20a + 25$
b) $(a + 2b)^2$ $a^2 + 4ab + 4b^2$
c) $(5a + 3b)^2$ $25a^2 + 30ab + 9b^2$
d) $(x^2 + 4)^2$ $x^4 + 8x^2 + 16$
e) $(a^2 + 1)^2$ $a^4 + 2a^2 + 1$
f) $(2a + 10)^2$ $4a^2 + 40a + 100$

3. Para explicar geometricamente por que $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ com base nesta figura composta por 2 quadrados, é preciso juntar a ela dois retângulos. Copie e complete a figura no caderno. Em seguida, explique sua resposta.

Banco de imagens/Arquivo da editora

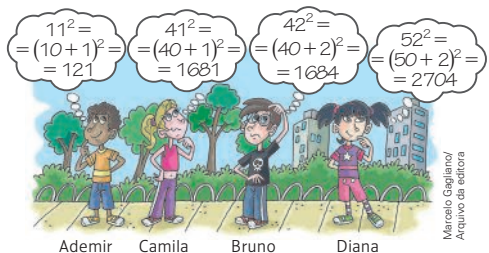
A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

4. Podemos empregar o produto notável para fazer cálculos numéricos. Verifique um exemplo:

$51^2 = (50 + 1)^2 = 50^2 + 2 \cdot 50 \cdot 1 + 1^2 =$
$= 2\,500 + 100 + 1 = 2\,601$

No caderno, calcule os quadrados a seguir empregando o produto notável. Tente fazer os cálculos mentalmente.

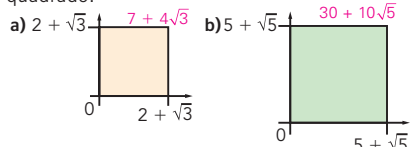
a) 21^2
b) 32^2
c) 61^2
d) 95^2

5. Ademir, Camila, Bruno e Diana estão calculando o quadrado de alguns números. Verifique como eles realizaram o cálculo mental.

Marcelo Gagliano/Arquivo da editora

No caderno, responda:

Quem errou o cálculo? Qual é o resultado correto?
Bruno; 1 764.

6. No caderno, calcule a medida de área de cada quadrado.

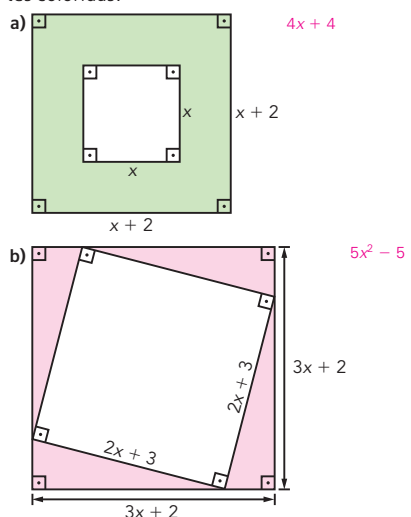
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

7. No caderno, calcule algebricamente os produtos notáveis.

a) $\left(4 + \sqrt{2}\right)^2$ $18 + 8\sqrt{2}$
b) $\left(\sqrt{7} + 5\right)^2$ $32 + 10\sqrt{7}$
c) $\left(2\sqrt{2} + 3\right)^2$ $17 + 12\sqrt{2}$
d) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^2$ $5 + 2\sqrt{6}$

8. No caderno, calcule as medidas de área das partes coloridas.

a)

b)

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

9. No caderno, desenvolva as expressões:

a) $(x + 1)^2 + (x + 2)^2 - (2x + 1)^2$ $-2x^2 + 2x + 4$
b) $(a^2 + b^2)^2 - 2(ab)^2$ $a^4 + b^4$
c) $(x + 1) \cdot (x + 2) - 2 \cdot (x + 2)^2 + (x + 2) \cdot (x + 3)$ 0

Orientações didáticas

Atividades

Na atividade **3**, os estudantes devem reconhecer que uma igualdade entre expressões algébricas é verdadeira se, efetuando algumas operações, for possível transformar uma expressão na outra.

Na atividade **4**, instigue os estudantes a realizarem cálculos mentais e questione-os sobre as vantagens de utilizar produtos notáveis para calcular tais potências. A aplicação de uma regra geral para casos numéricos contribui para o desenvolvimento do pensamento dedutivo.

Na atividade **5**, instigue os estudantes a fazer cada um dos cálculos apresentados mentalmente e, para cada caso, questione-os sobre qual estratégia é mais vantajosa: calcular diretamente ou utilizar a ideia de produtos notáveis. Esse é um momento em que, através do debate e do estímulo ao pluralismo de ideias, os estudantes podem deliberar sobre quando utilizar os produtos notáveis como ferramenta facilitadora do cálculo de potências. Analisar resultados, se posicionando quando estão corretos ou não, é uma característica do pensamento abdutivo.

Antes de realizar as atividades **6** e **7**, resgate com os estudantes os conhecimentos prévios associados a operações com raízes, necessários para o desenvolvimento do produto notável apresentado em cada item.

Na atividade **8**, dá-se continuidade à abordagem geométrica da atividade **6**, dessa vez incentivando a investigação do cálculo da medida de área de quadrados decompostos em outras formas. No item **a**, inicie questionando os estudantes sobre qual estratégia eles utilizariam: calcular as medidas de área dos dois quadrados e depois realizar uma subtração, ou calcular a medida de área da parte colorida diretamente, determinando as medidas de área dos retângulos que a compõem. Utilize essas duas estratégias com eles para que possam inferir sobre qual dessas maneiras é a menos custosa. No item **b**, questione os estudantes se é possível calcular a medida de área da parte colorida apenas utilizando as medidas dos triângulos e, posteriormente, pergunte quais das estratégias citadas anteriormente é a melhor para a resolução. Nesse caso, considerando-se os conteúdos prévios, só é possível resolver essa atividade calculando as áreas dos dois quadrados. Dessa maneira, os estudantes podem aprofundar seus conhecimentos sobre o uso dos produtos notáveis como ferramenta na resolução de problemas.

Orientações didáticas

Quadrado da diferença de dois termos

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento das habilidades **EF09MA03** e **EF09MA04** ao propor o trabalho com as operações de multiplicação, subtração e potenciação.

Para introduzir o conteúdo, retome o quadrado da soma de dois termos e questione os estudantes sobre o que acontece quando se torna o sinal do segundo termo negativo e quais sinais mudam no produto (resultado). Se considerar necessário, relembre as regras de sinais e, posteriormente, proponha que os estudantes desenvolvam o produto notável utilizando a propriedade distributiva, enfatizando a igualdade entre os produtos $-ba$ e $-ab$.

Após o desenvolvimento de $(a-b)^2$, explore os exemplos apresentados realizando os cálculos pela aplicação dos produtos notáveis e também usando a propriedade distributiva. No último exemplo, destaque que produtos notáveis também podem ser utilizados para o cálculo de potências e questione-os sobre quais decomposições facilitam o cálculo de 18^2. Caso queira explorar mais ainda o tópico, proponha o cálculo de 19^2.

Atividades

Na atividade **10**, continua-se o trabalho com produtos notáveis e sua relação com a Geometria. Dessa maneira, para auxiliar na resolução dessa atividade, questione-os sobre qual é a medida do lado do quadrado azul e, posteriormente, qual é a sua medida de área. Para auxiliar na investigação, oriente-os a denotar as medidas das áreas de cada uma das figuras que aparecem na decomposição, para assim terem insumos para explicar, utilizando Geometria, o produto notável do quadrado da diferença de dois termos.

Nas atividades **11** e **12**, tem-se a exploração do quadrado da diferença de dois termos envolvendo raízes quadradas e frações. Uma proposta de intervenção nas aprendizagens com foco no esclarecimento de dúvidas consiste em resgatar com os estudantes os conhecimentos prévios associados às propriedades de potenciação, necessários para o desenvolvimento do produto notável apresentado em cada item.

Quadrado da diferença de dois termos

O quadrado da diferença entre dois termos a e b é indicado por $(a-b)^2$. Temos:

$$(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b)$$

$$(a-b)^2 = a\cdot a - a\cdot b - b\cdot a + b\cdot b$$

$$(a-b)^2 = a^2 - ab - ba + b^2$$

Como $-ba = -ab$, então: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Esse resultado também é um produto notável.

O **quadrado da diferença entre dois termos** é igual ao quadrado do primeiro termo menos 2 vezes o produto do primeiro pelo segundo mais o quadrado do segundo termo.

Verifique alguns exemplos:

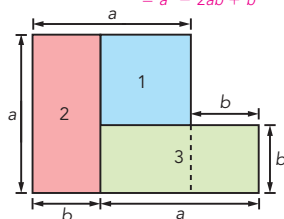
- $(x-3)^2 = x^2 - 2\cdot x\cdot 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$
- $(2x-1)^2 = (2x)^2 - 2\cdot 2x\cdot 1 + 1^2 = 4x^2 - 4x + 1$
- $(5x-3y)^2 = (5x)^2 - 2\cdot 5x\cdot 3y + (3y)^2 = 25x^2 - 30xy + 9y^2$
- $(\sqrt{6}-2)^2 = (\sqrt{6})^2 - 2\cdot\sqrt{6}\cdot 2 + 2^2 = 6 + 4\sqrt{6} + 4 = 10 - 4\sqrt{6}$
- $18^2 = (20-2)^2 = 20^2 - 2\cdot 20\cdot 2 + 2^2 = 324$

13. a) $(20-1)^2 = 361$ **b)** $(50-1)^2 = 2401$ **c)** $(50-2)^2 = 2304$ **d)** $(100-2)^2 = 9604$ **e)** $(30-1)^2 = 841$ **f)** $(40-1)^2 = 1521$ **g)** $(40-2)^2 = 1444$ **h)** $(100-1)^2 = 9801$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

10. Com base na figura a seguir, utilize seus conhecimentos de Geometria para explicar, no caderno, por que $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

A medida de área do quadrado 1 é igual à medida de área total da figura menos a medida de área dos retângulos 2 e 3. $(a-b)^2 = (a^2+b^2) - (2ab) = a^2 - 2ab + b^2$

Banco de imagens/Arquivo da editora

11. No caderno, desenvolva estas expressões:

a) $(x-a)^2$ $x^2 - 2ax + a^2$
b) $(x-10)^2$ $x^2 - 20x + 100$
c) $(3x-1)^2$ $9x^2 - 6x + 1$
d) $(5a-3b)^2$
e) $(n-\sqrt{6})^2$
f) $(2n-1)^2$ $4n^2 - 4n + 1$

11. d) $25a^2 - 30ab + 9b^2$ **e)** $n^2 - 2n\sqrt{6} + 6$

12. No caderno, calcule algebricamente.

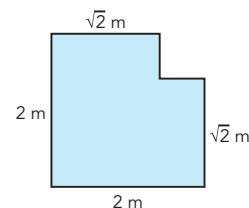
a) $(3ab-1)^2$ $9a^2b^2 - 6ab + 1$
b) $(x^2-y^2)^2$ $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$
c) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ $x^2 - x + \frac{1}{4}$
d) $(\sqrt{3}-1)^2$ $4 - 2\sqrt{3}$
e) $(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2$ $7 - 2\sqrt{10}$

13. Calcule mentalmente, usando produtos notáveis. Registre os resultados no caderno.

a) 19^2
b) 49^2
c) 48^2
d) 98^2
e) 29^2
f) 39^2
g) 38^2
h) 99^2

14. No caderno, calcule algebricamente as expressões a seguir.

a) $(a+b)^2 - (a-b)^2$ $4ab$
b) $(x+1)^2 + (x-1)^2$ $2x^2 + 2$
c) $(x+1)^2 - (x-1)^2$ $4x$

15. De uma chapa de metal quadrada, de lado medindo 2 m, recortamos uma parte quadrada de um dos cantos, conforme representado na figura a seguir. No caderno, responda: Qual é a medida de área da parte retirada? $(6-4\sqrt{2})$ m²

Banco de imagens/Arquivo da editora

Antes de propor a atividade **13**, retome a estratégia de cálculo mental trabalhada no quadrado da soma de dois termos e os exemplos da página. Após a resolução da atividade, pode-se questionar se é mais vantajoso utilizar o quadrado da diferença ou a propriedade distributiva, explorando o pluralismo de ideias e o debate em turma.

A atividade **15** reforça a abordagem geométrica do quadrado da diferença. Dessa maneira, oriente os estudantes a demarcar no desenho a parte retirada da chapa e determinar as medidas dos lados, calculando posteriormente sua medida de área.

Produto da soma pela diferença de dois termos

O produto dos vizinhos

A professora Heloísa pediu aos estudantes que verificassem os números inteiros marcados na reta numérica e respondessem à pergunta:

Alberto De Stefano/ Arquivo da editora

Para responder à pergunta, vamos multiplicar $(n + 1)$ vezes $(n - 1)$:

$$(n + 1) \cdot (n - 1) = n^2 - \cancel{n} + \cancel{n} - 1 = n^2 - 1$$

O resultado, $n^2 - 1$, é o antecessor de n^2. Então, o produto do sucessor pelo antecessor de n é o antecessor de n^2.

Verifique os exemplos:

- O antecessor do número 10 é 9, e o sucessor, 11. Temos:
  $$9 \cdot 11 = 10^2 - 1 = 99$$
- O antecessor do número 20 é 19, e o sucessor, 21. Temos:
  $$19 \cdot 21 = 20^2 - 1 = 399$$

Qual é o antecessor do número 30? E o sucessor? Qual é o produto deles? 29 e 31; 899

Agora, vamos calcular o produto da soma $a + b$ pela diferença $a - b$ de dois termos a e b:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - ab + ba - b^2$$

Como $-ab + ba = 0$, temos: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$.

Esse produto notável pode ser enunciado da seguinte maneira:

> O **produto da soma pela diferença de dois termos** é igual ao quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo.

Verifique os exemplos:

- $(n + 1) \cdot (n - 1) = n^2 - 1^2 = n^2 - 1$
- $(x + 2) \cdot (x - 2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4$
- $(2a + 4) \cdot (2a - 4) = (2a)^2 - 4^2 = 4a^2 - 16$
- $(2\sqrt{3} + 1) \cdot (2\sqrt{3} - 1) = (2\sqrt{3})^2 - 1^2 = 4 \cdot 3 - 1 = 12 - 1 = 11$
- $(5 + w) \cdot (w - 5) = (w + 5) \cdot (w - 5) = w^2 - 25$
  (a adição é comutativa)
- $1\,999 \cdot 2\,001 = (2\,000 - 1) \cdot (2\,000 + 1) = 2\,000^2 - 1^2 = 4\,000\,000 - 1 = 3\,999\,999$

Orientações didáticas

Produto da soma pela diferença de dois termos

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento das habilidades **EF09MA03** e **EF09MA04** ao propor o trabalho com as operações de multiplicação, adição e potenciação.

Este caso de produto notável é trabalhado tendo como suporte padrões e regularidades da aritmética, fazendo com que os estudantes reconheçam que o produto do sucessor pelo antecessor de um número inteiro n é igual ao quadrado de n menos 1, ou seja, $(n - 1) \cdot (n + 1) = n^2 - 1$. A prova desse resultado se dá pelo desenvolvimento do produto:

$$(n - 1) \cdot (n + 1) = n^2 + n - n - 1 = n^2 - 1$$

Faça com os estudantes alguns exemplos numéricos para que eles verifiquem o fato. Essa abordagem favorece o raciocínio lógico indutivo, pois trabalha a aplicação de uma regra geral em casos específicos.

Na sequência, mostre como calcular o produto da soma $(a + b)$ pela diferença $(a - b)$ e apresente os exemplos propostos para que os estudantes entendam como aplicar esse produto notável na realização de cálculos.

Ao apresentar o exemplo

$$(2\sqrt{3} + 1) \cdot (2\sqrt{3} + 1),$$

destaque a vantagem de utilizar o produto notável nesse cálculo – não é necessário calcular $\sqrt{3}$ para obter o resultado.

Orientações didáticas

Atividades

Como ferramentas para o auxiliar o processo de generalização e estabelecimento de padrões algébricos, podem-se citar a Geometria, a Aritmética e todos os conceitos trabalhados em anos escolares anteriores, como potenciação e radiciação. A utilização de diferentes linguagens se faz necessária para possibilitar um ensino significativo e que atenda às propostas atuais da Educação Matemática. Nesse sentido, a partir das atividades desta página, os estudantes poderão interpretar geometricamente o produto da soma pela diferença de dois termos.

A atividade **18** possibilita a prática do cálculo mental, fazendo com que os estudantes apliquem o produto da soma pela diferença de dois termos para determinar o produto entre dois números naturais.

Na atividade **19**, novamente os estudantes deverão desenvolver cada produto notável, atentando para os casos em que há um sinal negativo antes de um produto notável. Assim, pode ser necessário resgatar a regra dos sinais para a multiplicação, estendendo as ordens operatórias de resolução de expressões numéricas também para expressões algébricas. Uma proposta de intervenção das aprendizagens consiste em retomar conceitos de operações envolvendo monômios.

Na olimpíada

O problema apresentado tem por objetivo determinar a diferença entre as medidas dos lados dos quadrados. Para resolvê-lo, os estudantes devem aplicar o produto da soma pela diferença de dois termos.

Auxilie os estudantes a interpretarem os dados do problema, levando-os a representarem algebricamente as condições propostas:

Denotaremos por L a medida do lado do quadrado maior e por l a medida do quadrado menor.

O valor numérico da soma dos perímetros desses quadrados é igual ao valor numérico da diferença entre suas áreas: $4L + 4l = L^2 - l^2$

$4 \cdot (L + l) = (L + l) \cdot (L - l)$. Na resolução, foi utilizado um caso de fatoração (fator comum em evidência) que será abordado posteriormente. Por isso, questione os estudantes sobre como podemos usar a propriedade distributiva para representar $4L + 4l$ de outra maneira, ou ainda, pergunte qual multiplicação gerou $4L + 4l$, levando-os a compreender que se trata do processo inverso para possibilitar a comparação entre os membros da igualdade.

Comparando os membros da igualdade: $4 \cdot (L + l) = (L + l) \cdot (L - l)$.

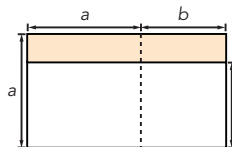
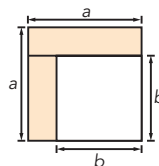
Assim, conclui-se que a diferença entre as medidas dos lados desses quadrados é igual a 4.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

16. Analise as figuras formadas por retângulos e responda às questões no caderno.

a) Qual é a medida de área da região colorida? $(a + b) \cdot (a - b)$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

b) Imagine que a figura do item **a** tenha sido recortada no tracejado e uma das partes retangulares foi sobreposta à parte quadrada, formando a segunda figura. Verifique que a medida de área da região colorida corresponde à medida de área do quadrado maior menos a do quadrado menor. Quanto é essa medida? $a^2 - b^2$

c) Como as medidas de área destacadas nos itens anteriores são iguais, que igualdade você pode escrever a partir delas? $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

17. No caderno, calcule algebricamente os produtos indicados em cada cartão.

17. Ⓐ $x^2 - 1$; $a^2 - 25$; $9b^2 - 49$; $x^4 - 4$ Ⓑ $x^2 - 6$; $a^2 - 14$; $9x^2 - 4y^2$; $4a^2b^2 - 9c^2$ Ⓒ 1; 20; 97; -17

Ⓐ
$(x + 1) \cdot (x - 1)$
$(a + 5) \cdot (a - 5)$
$(3b + 7) \cdot (3b - 7)$
$(x^2 + 2) \cdot (x^2 - 2)$

Ⓑ
$(x + \sqrt{6}) \cdot (x - \sqrt{6})$
$(a - \sqrt{14}) \cdot (a + \sqrt{14})$
$(3x - 2y) \cdot (3x + 2y)$
$(2ab - 3c) \cdot (2ab + 3c)$

Ⓒ
$(\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1)$
$(5 + \sqrt{5}) \cdot (5 - \sqrt{5})$
$(10 - \sqrt{3}) \cdot (10 + \sqrt{3})$
$(4\sqrt{2} + 7) \cdot (4\sqrt{2} - 7)$

18. Calcule mentalmente usando produtos notáveis. Registre os resultados no caderno.

a) $41 \cdot 39$ 1 599
b) $52 \cdot 48$ 2 496
c) $57 \cdot 63$ 3 591
d) $91 \cdot 89$ 8 099
e) $92 \cdot 88$ 8 096
f) $103 \cdot 97$ 9 991
g) $210 \cdot 190$ 39 900
h) $301 \cdot 299$ 89 999

19. No caderno, calcule algebricamente usando as regras dos produtos notáveis.

a) $(x + 1)^2 + (x - 1)^2 + 2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$ $4x^2$

b) $(a - 1) \cdot (a + 1) \cdot (a^2 + 1) \cdot (a^4 + 1) + 1$ a^8

c) $(2x + 1)^2 + (2x - 1)^2 + 2 \cdot (2x + 1) \cdot (2x - 1)$ $16x^2$

d) $\left(c - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(c + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(c^2 + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{16}$ c^4

e) $(\sqrt{7} + 3) \cdot (\sqrt{7} - 3) - (\sqrt{7} + 2) \cdot (\sqrt{7} - 2)$ -5

Na olimpíada

Qual é a diferença entre as medidas do lados dos quadrados?

(Obmep) Na figura vemos um quadrado dentro de outro, determinando uma região cinza. A área (em cm^2) e o perímetro (em cm) dessa região são numericamente iguais, ou seja, o valor numérico da soma dos perímetros desses quadrados é igual ao valor numérico da diferença entre suas áreas. Qual é a diferença entre as medidas dos lados desses quadrados? Alternativa **b**.

a) 1 cm
b) 4 cm
c) 6 cm
d) 8 cm
e) 10 cm

Reprodução/Obmep, 2017.

Identidades

Desenvolvendo $(x + 1)^2$, obtemos $x^2 + 2x + 1$. Por isso, dizemos que $(x + 1)^2$ e $x^2 + 2x + 1$ são expressões idênticas ou que a sentença $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ é uma identidade.

Atribuindo um valor numérico a x, o valor da expressão $(x + 1)^2$ será igual ao de $x^2 + 2x + 1$. Compare os resultados em cada caso:

$x = 1$:
- $(x + 1)^2 = (1 + 1)^2 = 2^2 = 4$
- $x^2 + 2x + 1 = 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 4$

$x = -5$:
- $(x + 1)^2 = (-5 + 1)^2 = (-4)^2 = 16$
- $x^2 + 2x + 1 = (-5)^2 + 2 \cdot (-5) + 1 = 25 - 10 + 1 = 16$

$x = \frac{2}{3}$:
- $(x + 1)^2 = \left(\frac{2}{3} + 1\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$
- $x^2 + 2x + 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 2 \cdot \frac{2}{3} + 1 = \frac{4}{9} + \frac{4}{3} + 1 = \frac{4 + 12 + 9}{9} = \frac{25}{9}$

Vamos, agora, calcular e comparar os valores numéricos das expressões $(x + y)^2$ e $x^2 + y^2$ para:

$x = 0$ e $y = 10$:
- $(x + y)^2 = (0 + 10)^2 = 10^2 = 100$
- $x^2 + y^2 = 0^2 + 10^2 = 0 + 100 = 100$

$x = 1$ e $y = 2$:
- $(x + y)^2 = (1 + 2)^2 = 3^2 = 9$
- $x^2 + y^2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$

$x = -3$ e $y = 3$:
- $(x + y)^2 = (-3 + 3)^2 = 0^2 = 0$
- $x^2 + y^2 = (-3)^2 + 3^2 = 9 + 9 = 18$

Pelos exemplos, você pode verificar que nem sempre $(x + y)^2$ e $x^2 + y^2$ têm valores numéricos iguais. Portanto, não são expressões idênticas, ou seja, não é possível transformar uma expressão na outra realizando operações algébricas. A sentença $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ não é uma identidade.

Duas **expressões algébricas são idênticas** quando é possível transformar uma na outra por meio de operações algébricas.
Uma **identidade** é uma igualdade em que os dois membros são expressões idênticas.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

20. No caderno, indique se as sentenças a seguir representam identidade ou não. Faça o cálculo, se achar necessário.

a) $(x + 4) \cdot (x - 4) = x^2 - 4$ não
b) $(x + 2)^2 = x^2 + 4$ não
c) $(x - 2) \cdot (x + 2) = x^2 - 4$ sim
d) $(x - 1)^2 = x^2 - 1$ não
e) $(x - 5) \cdot (x + 5) = x^2 - 25$ sim
f) $(5 + x) \cdot (x - 5) = 25 - x^2$ não
g) $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$ sim
h) $(3 - x)^2 = 9 - 6x + x^2$ sim

21. A expressão $x^2 + 20x + 100$ é idêntica a outra, que é o quadrado de um binômio. No caderno, responda: Qual é essa outra expressão? $(x + 10)^2$

22. A expressão $4x^2 - 81y^2$ é idêntica a outra, que é o produto da soma pela diferença dos mesmos dois termos. No caderno, responda: Qual é essa outra expressão? $(2x + 9y) \cdot (2x - 9y)$

23. No caderno, explique, usando medidas de área de figuras geométricas, por que as expressões $(x + y)^2$ e $x^2 + y^2$ não são idênticas.
O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Orientações didáticas

Identidades

Dando continuidade ao trabalho com produtos notáveis, através do cálculo do valor numérico de uma expressão algébrica, explora-se a igualdade entre as expressões $(x + y)^2$ e $x^2 + 2xy + y^2$, aprofundando o conceito de identidades algébricas no contexto de produtos notáveis.

Após apresentar os exemplos, instigue os estudantes a verificar se $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ é uma identidade. Incentive-os também a conjecturar e levantar hipóteses sobre quando essas expressões são iguais. Auxilie-os no desenvolvimento algébrico que prova os dois casos possíveis, dados a seguir:

$(x + y)^2 = x^2 + y^2$

$x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + y^2$

$2xy = 0$

Logo, $x = 0$ ou $y = 0$.

Por fim, para consolidar o conceito de identidade entre expressões algébricas, questione os estudantes sobre como se pode definir esse conceito, explorando o levantamento de hipóteses dos estudantes, o debate em turma e o pluralismo de ideias. Ao final, apresente-lhes a definição, comparando com o que foi levantado pela turma.

Atividades

Na atividade **20**, explore com os estudantes os resultados anteriormente apresentados, de modo a enfatizar o uso de produtos notáveis para determinar se cada uma das sentenças representa uma identidade. Para auxiliar, pergunte a eles qual é o produto notável relacionado ao primeiro termo da igualdade e peça que verbalizem qual é o desenvolvimento algébrico desse produto, comparando-o com o que é dado em cada item.

Nas atividades **21** e **22**, tem-se a preparação para os trabalhos de fatoração de polinômios, que serão tratados, no capítulo **4**. Dessa maneira, esse é um momento para que os estudantes enxerguem os produtos notáveis como uma ferramenta facilitadora não apenas do desenvolvimento de produtos como também na representação de expressões como produtos correspondentes. Para auxiliar na resolução, questione-os sobre com qual expressão elas se parecem – por exemplo, o quadrado de uma soma ou o produto de uma soma por uma diferença –, enfatizando os sinais dos termos e a existência (ou não) do termo misto, que envolve o produto dos dois termos considerados. Posteriormente, por meio de tentativa e erro, eles podem identificar a qual expressão cada uma delas é idêntica.

Orientações didáticas

Racionalização de denominadores

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento das habilidades **EF09MA03** e **EF09MA04** ao propor o trabalho com a racionalização de denominadores.

O processo de racionalização de denominadores é explorado a partir do eixo temático de Grandezas e Medidas, evidenciando que existem medidas de comprimento que são expressas por números irracionais. Fazendo associação com a medida da diagonal de um quadrado, os estudantes são levados a concluir que a medida do lado de um quadrado é igual à medida da diagonal dividida por $\sqrt{2}$. Por meio de exemplos numéricos explore que a divisão de um número racional por outro irracional (que é infinito e não periódico) pode ser trabalhosa, além de fornecer apenas resultados aproximados. Isso justifica a necessidade de representar tal divisão de outra maneira, por meio do processo denominado racionalização de denominadores.

A racionalização de denominadores deve ser bem justificada, mostrando que, com a equivalência de frações, é possível expressar uma fração com denominador irracional como outra com denominador racional, facilitando alguns cálculos. Possibilite que os estudantes descubram por si próprios um fator que, quando multiplicado pelo numerador e o denominador da fração, transforma o denominador em um número racional. É importante mediar este processo questionando os estudantes sobre o que é necessário para que a racionalização do denominador ocorra.

A racionalização de denominadores exige conhecimentos prévios de potências, raízes e produtos notáveis. Por isso, uma proposta de intervenção das aprendizagens consiste em abordar cada etapa do processo de racionalização com os estudantes de forma detalhada, explicitando a relação com produtos notáveis, até que eles consigam determinar uma fração equivalente, sem radical no denominador, de forma mais ágil. Além disso, os estudantes podem ser divididos em grupos de trabalho para construírem um fluxograma, ou mapa mental sobre racionalização de denominadores. Além de desenvolver o pensamento computacional, esse contexto também apresenta uma excelente aplicação dos conhecimentos matemáticos para a vida real dos estudantes.

Racionalização de denominadores

A medida da tela

As telas de televisão, celular e alto-falante são medidas pelo comprimento da diagonal. Em uma TV de 40" (40 polegadas), a diagonal mede 40". E temos que 1 polegada equivale a 2,54 cm aproximadamente.

Televisão de 40 polegadas.

Em um alto-falante com tela quadrada de 6" (6 polegadas), qual é a medida do lado da tela, em polegadas, com precisão de duas casas decimais?

Para responder a essa pergunta, vamos recorrer aos conhecimentos que temos de Geometria para descobrir uma relação entre as medidas do lado (x) e da diagonal (d) de um quadrado.

Em todo quadrado, as diagonais cruzam-se ao meio e são perpendiculares entre si. Desse modo, na figura *ABCD* apresentada a seguir, podemos notar que a medida de área do quadrado é a soma das medidas de área de 4 triângulos retângulos congruentes, cada um deles de medida de área igual a: $\dfrac{\frac{d}{2}\cdot\frac{d}{2}}{2}=\dfrac{d^2}{4}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{d^2}{8}$.

Alto-falante de 6 polegadas.

Como a medida de área do quadrado é x^2, temos:

$$x^2=4\cdot\frac{d^2}{8}\Rightarrow x^2=\frac{d^2}{2}\overset{(x>0)}{\Rightarrow}x=\sqrt{\frac{d^2}{2}}\overset{(d>0)}{\Rightarrow}x=\frac{d}{\sqrt{2}}$$

Concluímos que a medida do lado do quadrado é igual à medida da diagonal dividida por $\sqrt{2}$.

A tela do alto-falante tem diagonal medindo 6 polegadas; então, o lado mede $\dfrac{6}{\sqrt{2}}$ polegadas.

Como $\sqrt{2}=1{,}4142...$, verifique como fica a divisão $6:\sqrt{2}$ aproximando $\sqrt{2}$ por 1, por 2, por 3 e por 4 casas decimais:

$6:1{,}4\simeq 4{,}29$ $\quad 6:1{,}41\simeq 4{,}26$ $\quad 6:1{,}414\simeq 4{,}24$ $\quad 6:1{,}4142\simeq 4{,}24$

Assim, "parece" que a medida do lado da tela de 6 polegadas, com duas casas decimais, é 4,24 polegadas.

Para responder mais facilmente e com mais segurança, há outro modo de fazer essa conta. Trata-se de uma técnica denominada **racionalização de denominador**. Antes de efetuar a divisão, multiplicamos numerador e denominador de $\dfrac{6}{\sqrt{2}}$ por um mesmo fator.

Nesse problema, multiplicando o denominador $\sqrt{2}$ por ele mesmo, obtemos $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}\right)^2=2$. Então, fazemos assim:

$$\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}\overset{\sqrt{2}\simeq 1{,}41}{\Rightarrow}\frac{6}{\sqrt{2}}\simeq 3\cdot 1{,}41\simeq 4{,}23$$

Com duas casas decimais, a medida do lado da tela é aproximadamente 4,23 polegadas.

Um fator racionalizante

Sabemos que $\sqrt{5}$ é um número irracional e que $3+\sqrt{5}$ também é irracional.

Por quanto podemos multiplicar $\sqrt{5}$ para obter um número racional não nulo?

E por quanto podemos multiplicar $3+\sqrt{5}$ para obter um racional não nulo?

Como $(\sqrt{5})^2 = 5$, é fácil responder à primeira pergunta: basta multiplicar $\sqrt{5}$ por $\sqrt{5}$. O resultado, 5, é um número racional não nulo. (Há outras possibilidades – você pode tentar descobrir algumas delas –, mas uma é suficiente para responder à questão proposta.)

Porém, multiplicando a soma $3 + \sqrt{5}$ por ela mesma, obtemos:

$$(3+\sqrt{5}) \cdot (3+\sqrt{5}) = (3+\sqrt{5})^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 = 9 + 6\sqrt{5} + 5 = 14 + 6\sqrt{5}$$

O resultado, $14 + 6\sqrt{5}$, é um número irracional.

Por isso, vamos procurar outra possibilidade.

Como $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$.

Vamos multiplicar a soma $3 + \sqrt{5}$ pela diferença $3 - \sqrt{5}$:

$$(3+\sqrt{5}) \cdot (3-\sqrt{5}) = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 9 - 5 = 4$$

Agora, o resultado é um número racional não nulo, como foi solicitado.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

24. No caderno, escolha o fator (para substituir ////) e faça a multiplicação de modo que o resultado seja um número racional não nulo.

a) $\sqrt{3} \cdot$ //// $\sqrt{3}$

b) $3\sqrt{2} \cdot$ //// $\sqrt{2}$

c) $(\sqrt{3} + 1) \cdot$ //// $(\sqrt{3} - 1)$

d) $(7 - \sqrt{19}) \cdot$ //// $(7 + \sqrt{19})$

e) $(2\sqrt{5} - 5) \cdot$ //// $(2\sqrt{5} + 5)$

f) $(11 + \sqrt{11}) \cdot$ //// $(11 - \sqrt{11})$

Há outras respostas possíveis, além das mencionadas em cada item.

25. No caderno, responda: Quanto mede, em centímetros, o lado de uma tela quadrada de alto-falante de 16"? Use $1" \simeq 2{,}54$ cm e $\sqrt{2} \simeq 1{,}4$.
Aproximadamente 28,4 cm.

26. No caderno, racionalize o denominador e, em seguida, com o auxílio de uma calculadora, obtenha o valor aproximado e arredondado com duas casas decimais. Simplifique a resposta quando possível.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ou aproximadamente 0,58.

b) $\dfrac{5}{\sqrt{6}}$ $\dfrac{5\sqrt{6}}{6}$ ou aproximadamente 2,04.

c) $\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$ $\dfrac{\sqrt{5}}{10}$ ou aproximadamente 0,22.

d) $\dfrac{3}{10\sqrt{2}}$ $\dfrac{3\sqrt{2}}{20}$ ou aproximadamente 0,21.

27. No caderno, racionalize o denominador e simplifique:

a) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$ $2\sqrt{3}$

b) $\dfrac{15}{2\sqrt{10}}$ $\dfrac{3\sqrt{10}}{4}$

28. No caderno, responda às seguintes perguntas:

a) Por quanto podemos multiplicar $\sqrt{2} + 1$ para obter um resultado racional não nulo? $\sqrt{2} - 1$

b) Racionalize $\dfrac{1}{\sqrt{2} + 1}$. Qual é, aproximadamente, o valor encontrado com até 3 casas decimais?
Aproximadamente 0,414.

29. No caderno, racionalize o denominador:

a) $\dfrac{1}{4 + \sqrt{2}}$ $\dfrac{4 - \sqrt{2}}{14}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt{5} + 2}$ $2\sqrt{5} - 4$

c) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$ $\dfrac{3 + \sqrt{3}}{2}$

d) $\dfrac{-1}{7 - \sqrt{2}}$ $\dfrac{-7 - \sqrt{2}}{47}$

30. Um galpão de criação de frangos tem o formato retangular de dimensões medindo 10 m por $32\sqrt{2}$ m. Nesse galpão, o granjeiro costuma acomodar 3 600 frangos em cada ciclo de criação. No caderno, responda: Quantas aves por metro quadrado o granjeiro cria em cada ciclo?
8 aves por metro quadrado aproximadamente.

vivatchai/Shutterstock

Galpão de criação de frangos.

Orientações didáticas

Atividades

Por meio das atividades propostas, pode-se diagnosticar como os estudantes compreenderam o que foi abordado, possibilitando a identificação de quais aprendizagens precisam ser retomadas e recuperadas, sejam elas relacionadas às propriedades de potenciação ou racionalização.

Na atividade **24**, nos itens **a** e **b**, enfatiza-se o trabalho com potências com expoentes fracionários, pois é preciso analisar qual fator deve ser multiplicado para que o resultado seja um número racional não nulo. Posteriormente, nos outros itens dessa atividade, utiliza-se o conceito de produto da soma pela diferença para encontrar o fator correspondente. Para auxiliar na resolução, enfatize a análise do sinal do termo e de qual dos termos contém raiz quadrada.

No item **b** da atividade **27**, leve os estudantes a perceberem que o fator racionalizante pode ser $\sqrt{10}$ ou $2\sqrt{10}$. O resultado será o mesmo neste caso. Questione-os por que isso ocorre, levando-os a resgatar conhecimentos sobre simplificação de frações para responder.

Na atividade **29**, os estudantes precisam compreender que, no item **a**, o fator racionalizante é obtido a partir de conhecimentos de produtos notáveis, envolvendo o caso de produto da soma pela diferença. Mostre que o produto entre duas raízes quadradas iguais elimina o radicando. Nos itens desta atividade, explore diferentes estratégias de racionalização de denominadores. Os estudantes podem desenvolver o produto notável com detalhes ou encontrar estratégias pessoais mentais mais ágeis para determinar a forma racionalizada das frações apresentadas. Instigue a partilha de ideias entre os estudantes para possibilitar a aquisição de repertório acerca de estratégias de racionalização de denominadores.

Orientações didáticas

Fração algébrica e simplificação

Na BNCC

Este capítulo favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA09** ao explorar as frações algébricas e simplificação.

De modo a introduzir o conteúdo de frações algébricas, caso considere necessário, faça um resgate de conhecimentos prévios com os estudantes, retomando os conceitos de fração e de razão. Posteriormente, apresente o problema sobre os retângulos de bases iguais.

Para auxiliar os estudantes na investigação, auxilie-os a calcular as áreas dos retângulos, reconhecendo suas medidas e enfatizando que ambos possuem a base com a mesma medida. Em seguida, pergunte a eles qual é a razão entre as medidas de área do primeiro retângulo e do segundo retângulo. Este é um bom momento para diagnosticar se os estudantes têm dificuldade em identificar a ordem dos termos de uma razão.

Ao montar a razão, apresente a eles o conceito de fração algébrica e enfatize a eles que as frações numéricas são casos particulares de frações algébricas. Proporcione um momento de retomada das propriedades e conceitos relacionados a frações numéricas, entre eles, a simplificação. Para isso, pode-se utilizar o exemplo apresentado no livro, a fração $\frac{5 \cdot 6}{5 \cdot 7}$ está em uma representação propícia para que os estudantes a relacionem com a fração algébrica apresentada anteriormente. Ao simplificar essa fração numérica, pergunte aos estudantes se isso pode ser feito na fração algébrica e, posteriormente, simplifique a fração.

Por fim, retome o questionamento inicial. Dessa vez, enuncie-o de maneira generalizada: "Qual é a razão entre as áreas dos dois retângulos de bases iguais?".

Aproveite a oportunidade para questionar sobre aumentos ou diminuições proporcionais nas alturas e sua relação com a variação da área do retângulo.

Uma vez introduzida a simplificação de frações algébricas, dá-se continuidade aos estudos retomando estratégias de simplificação que preparam os trabalhos para a fatoração.

Fatoração de polinômios

Fração algébrica e simplificação

Retângulos de bases iguais

Nestas figuras há dois retângulos de base a; em um deles, a altura mede b, e, no outro, mede c. Qual é a razão entre as medidas de área desses retângulos?

As medidas de área são $a \cdot b$ e $a \cdot c$; portanto, a razão entre elas é $\frac{a \cdot b}{a \cdot c}$.

Uma razão entre expressões algébricas, como $\frac{a \cdot b}{a \cdot c}$, é denominada **fração algébrica**, na qual o denominador deve ser diferente de 0.

Recorde que uma fração numérica pode ser simplificada quando o numerador e o denominador apresentam um mesmo fator. Nesse caso, dividimos ambos por esse fator. Por exemplo:

$$\frac{\cancel{5} \cdot 6}{\cancel{5} \cdot 7} = \frac{6}{7}$$

Essa operação se aplica também às frações algébricas. Assim, dividindo numerador e denominador por a, com $a \neq 0$ e $c \neq 0$, obtemos a razão entre as medidas de altura dos retângulos:

$$\frac{\cancel{a} \cdot b}{\cancel{a} \cdot c} = \frac{b}{c}$$

Concluímos que a razão entre as medidas de área de dois retângulos de bases iguais é igual à razão entre as medidas de altura deles. Se dobrarmos a medida de altura, a medida de área dobrará. Se a medida de altura for triplicada, a medida de área também triplicará.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Simplificando

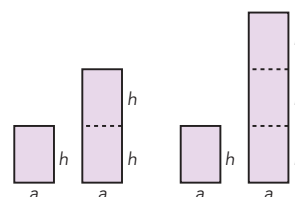
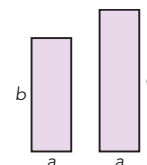
A fração numérica $\frac{51}{69}$ pode ser simplificada?

Como 51 e 69 são divisíveis por 3, temos:

$$\frac{51}{69} = \frac{\cancel{3} \cdot 17}{\cancel{3} \cdot 23} = \frac{17}{23}$$

Dividindo o numerador e o denominador por 3, o fator 3 é cancelado em ambos.

Agora, considere a fração algébrica $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$, em que $x \neq 1$ e $x \neq -1$. Uma fração como essa também pode ser simplificada?

Se o numerador e o denominador podem ser divididos por um mesmo fator, então podemos simplificar a fração. Uma maneira de descobrir esse fator comum é decompor tanto o numerador quanto o denominador em produtos, o que vamos estudar a seguir. Após esse estudo vamos simplificar essa fração algébrica.

Associar conceitos novos a conceitos aprendidos anteriormente contribui para o raciocínio por analogia.

Antes de prosseguir com as estratégias de simplificação de frações, retome a decomposição de um número em fatores primos e os critérios de divisibilidade. Na sequência, apresente os exemplos explorados no livro, sobre as frações $\frac{51}{69}$ e $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$.

Ao apresentar a simplificação da fração $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$, questione os estudantes sobre o que pode ser feito para verificar se há possibilidade de simplificação. Auxilie-os a perceber que decompor o numerador e o denominador da fração, utilizando os conhecimentos sobre produtos notáveis, pode facilitar a simplificação.

Fatoração

O processo de decomposição em fatores é denominado **fatoração**.

> **Fatorar** um polinômio significa transformá-lo em uma multiplicação cujo resultado é igual a ele. É o mesmo que decompor em fatores.

Para fatorar um polinômio, é preciso descobrir que fatores devem ser multiplicados, de modo que o resultado seja o polinômio dado. A forma fatorada é a expressão algébrica representada pela multiplicação desses fatores.

Verifique alguns casos de fatoração de polinômios aplicando a fatoração para simplificar e operar com frações algébricas.

Caso do fator comum

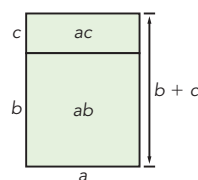
O polinômio $ab + ac$ representa a medida de área total da figura, formada por dois retângulos.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Esse polinômio é formado pelos termos ab e ac, que têm em comum o fator a (medida do lado comum dos retângulos).

Medida de área total: $ab + ac = a \cdot (b + c)$

Pela propriedade distributiva, sabemos que o produto $a \cdot (b + c)$ é a **forma fatorada** do polinômio $ab + ac$.

Na forma fatorada, dizemos que o **fator comum** a está em **evidência**.

> Quando os termos de um polinômio apresentam um fator comum, podemos colocá-lo em evidência, obtendo uma forma fatorada do polinômio.

Se dividirmos o polinômio $ab + ac$ pelo fator comum a, o resultado será $b + c$. Desse modo, podemos concluir que, na forma fatorada desse polinômio:

- o primeiro fator é o fator comum;
- o segundo fator é o quociente da divisão do polinômio pelo fator comum.

Vamos analisar alguns exemplos de fatoração pelo caso do fator comum:

- $ax + bx + cx$

  O fator comum a todos os termos é x. Temos:

  $$ax + bx + cx = x \cdot (a + b + c)$$

  (x: fator comum; a: $ax : x$; b: $bx : x$; c: $cx : x$)

- $2ab + 3abc$

  Para fazer a fatoração completa, é preciso pôr em evidência todos os fatores comuns: a e b. Temos:

  $$2ab + 3abc = ab \cdot (2 + 3c)$$

  (ab: fatores comuns; 2: $2ab : ab$; $3c$: $3abc : ab$)

- $a^2x^4 + a^3x^2 - 5a^4x$

  Se uma variável aparece em todos os termos com expoentes diferentes, ela é posta em evidência elevada ao menor expoente com que aparece. Verifique:

  $$a^2x^4 + a^3x^2 - 5a^4x = a^2x \cdot (x^3 + ax - 5a^2)$$

  (a^2x: fatores comuns; x^3: $a^2x^4 : a^2x$; ax: $a^3x^2 : a^2x$; $5a^2$: $5a^4x : a^2x$)

Orientações didáticas

Fatoração

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA09** ao explorar a fatoração. A seção *Atividades* favorece o desenvolvimento da **CG04**.

O conceito de fatoração pode ser abordado a partir da composição de áreas de figuras planas. Destaque que os termos de um binômio podem ser considerados áreas de retângulos de mesma base. Em seguida, questione-os sobre outras maneiras de representar a medida de área da figura total, levando-os a concluir que basta adicionar as larguras dos retângulos e multiplicar o resultado pela medida da base.

Caso do fator comum

Explique que, dada uma expressão algébrica, o fator comum é o termo de menor expoente comum a todos os termos. Na expressão algébrica $a^3 + a^2b$, por exemplo, o fator comum é a^2 e que a forma fatorada desta expressão é dada por $a^2 \cdot (a + b)$.

Intercale a teoria com os exercícios da seção *Atividades*, possibilitando o diagnóstico das dúvidas recorrentes e gerando elementos que indicam quais aprendizagens precisam ser recuperadas.

Explore os exemplos desta página com detalhes, questionando os estudantes sobre estratégias de determinação do fator comum. Espera-se que este caso de fatoração seja realizado com mais agilidade com a prática, a partir da resolução dos exercícios. Para determinar os termos que ficam entre parênteses, ressalte que é preciso realizar uma divisão de cada termo da expressão algébrica pelo fator comum e que as operações envolvendo expressões algébricas são um pré-requisito para a compreensão da fatoração de polinômios.

Uma possível proposta de intervenção nas aprendizagens com foco no esclarecimento de dúvidas consiste em resgatar com os estudantes os conhecimentos prévios associados a operações envolvendo expressões algébricas e decomposição em fatores primos, necessários para a realização de fatoração de polinômios.

Além disso, caso os estudantes demonstrem dificuldades relacionadas às aprendizagens de fatoração, pode-se associar este conceito com a decomposição de números naturais em fatores primos, como sugerido anteriormente nas orientações sobre simplificação de frações algébricas.

Orientações didáticas

Atividades

Com as atividades **1 e 2** é possível verificar se os estudantes compreenderam o assunto abordado. No item **c** da atividade **2**, observe se eles reconheceram que é necessário fatorar apenas o numerador da fração, enquanto, nos itens **b** e **d**, é preciso fatorar o numerador e o denominador.

Na atividade **3**, proponha que os estudantes iniciem a resolução e, com o intuito de valorizar as estratégias pessoais de cada estudante, organize um momento para que eles possam compartilhar suas estratégias pessoais. Isso pode ser feito por meio de grupos de resolução e partilhas de resoluções de atividades, em consonância com a **CG04** da BNCC.

Na atividade **4**, sugere-se que os estudantes sejam divididos em grupos para que possam debater estratégias de resolução e, posteriormente, compartilhar com a turma os problemas que elaboraram.

Fatoração por agrupamento

A fatoração por agrupamento é uma técnica de fatoração que envolve a obtenção de um fator comum mais de uma vez. Esta particularidade pode gerar dificuldades de aprendizagens nos estudantes. Por isso, dedique atenção especial no trabalho com este caso.

Ao apresentar o polinômio $ax - mx + ay - my$, questione os estudantes qual é o fator comum entre os dois primeiros termos e qual é o fator comum entre os dois últimos termos. Assim, pode-se concluir que a expressão pode ser reescrita como $x \cdot (a - m) + y \cdot (a - m)$. Agora, pode-se questionar os estudantes se eles conseguem perceber mais um fator comum nos dois termos resultantes, levando-os a concluir que $(a - m)$ pode ser posto em evidência, obtendo como expressão fatorada $(a - m) \cdot (x + y)$.

Desenvolva os exemplos propostos detalhadamente com os estudantes, questionando-os sobre cada etapa do processo de fatoração por agrupamento. Verifique como os estudantes respondem a estes questionamentos relacionados ao processo de fatoração e, se julgar necessário, proponha exemplos adicionais, deixando algum tempo para que eles tentem encontrar as soluções por conta própria.

- $20x^5 + 12x^4 + 4x^3$

Quando há coeficientes numéricos inteiros, colocamos em evidência o máximo divisor comum deles. Se uma variável aparece em todos os termos com expoentes diferentes, ela é posta em evidência elevada ao menor expoente que aparece. Nesse caso, como $\text{mdc}(20, 12, 4) = 4$, colocamos $4x^3$ em evidência:

$$20x^5 + 12x^4 + 4x^3 = 2^2 \cdot 5 \cdot x^5 + 2^2 \cdot 3 \cdot x^4 + 2^2 \cdot x^3 =$$
$$= 2^2 \cdot x^3 \cdot (5x^2 + 3x + 1) =$$
$$= \underbrace{4x^3}_{\text{fator comum}} \cdot (5x^2 + 3x + 1)$$

Se efetuarmos a multiplicação $4x^3 \cdot (5x^2 + 3x + 1)$, o resultado será $20x^5 + 12x^4 + 4x^3$.

Atividades

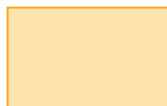
Faça as atividades no caderno.

1. No caderno, fatore e coloque em evidência os fatores comuns.

a) $xa + xy$ $a \cdot (x + y)$
b) $ap + bp + cp$ $p \cdot (a + b + c)$
c) $x + xy - xyz$ $x \cdot (1 + y - yz)$
d) $2ab + 8a$ $2a \cdot (b + 4)$
e) $x^2 + x$ $x \cdot (x + 1)$
f) $x^4 - x^3 + x^2$ $x^2 \cdot (x^2 - x + 1)$
g) $8x^3 - 6x^2 + 4x$ $2x \cdot (4x^2 - 3x + 2)$

2. No caderno, simplifique as frações algébricas efetuando as fatorações necessárias.

a) $\frac{10ab}{15ac}$ $\frac{2b}{3c}$
b) $\frac{2x + 4}{4x + 8}$ $\frac{1}{2}$
c) $\frac{a^2b + ab^2}{2ab}$ $\frac{a + b}{2}$
d) $\frac{27x^3 + 9x^2}{3 + 9x}$ $3x^2$

3. Paulo comprou um terreno retangular, de medida de área $2x^2 + 4x$, para construir uma casa e o representou com esta figura:

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Se a medida de um dos lados é $2x$, que expressão algébrica representa a medida do outro lado desse terreno? $x + 2$

b) Qual é a medida de perímetro desse terreno para $x = 3$? 22

4. Escolha um contexto e elabore no caderno um problema que possa ser resolvido utilizando-se esta ilustração, que representa uma toalha de mesa feita com retalhos quadrados, cuja solução seja a expressão algébrica $16x \cdot (x + 1)$.

Tiago Donizete Leme/Arquivo da editora

O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Fatoração por agrupamento

Verifique os termos do polinômio:

$$ax - mx + ay - my$$

Os dois primeiros termos apresentam o fator comum x; os dois últimos, o fator comum y.
Vamos agrupar os termos e pôr em evidência os fatores comuns:

$$(ax - mx) + (ay - my) = x \cdot (a - m) + y \cdot (a - m)$$

Temos, agora, uma adição de dois produtos dos quais $(a - m)$ é fator comum.

Colocando $(a - m)$ em evidência, obtemos:

$$(a - m) \cdot (x + y)$$

Assim, transformamos o polinômio dado no produto $(a - m) \cdot (x + y)$, que é a sua forma fatorada. Então:

$$ax - mx + ay - my = (a - m) \cdot (x + y)$$

Podemos **fatorar determinados polinômios agrupando seus termos** de maneira que:

- em cada grupo haja um fator comum;
- fatorando cada grupo, verificamos que eles apresentam um novo fator comum, que, ao ser posto em evidência, completa a fatoração.

Exemplo de fatoração por agrupamento:

- $ax - a - 3x + 3 = (ax - a) - (3x - 3) = a \cdot (x - 1) - 3 \cdot (x - 1) = (x - 1) \cdot (a - 3)$

Você sempre pode conferir se a fatoração está correta: efetuando a multiplicação indicada, o resultado deve ser o polinômio inicial.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

5. No caderno, transforme em produto.

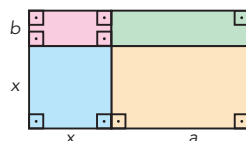
a) $x^2 + ax + bx + ab$ $(x + a) \cdot (x + b)$

b) $mp + np - mq - nq$ $(m + n) \cdot (p - q)$

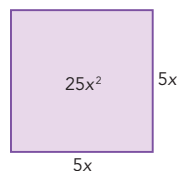
6. No caderno, simplifique, empregando a fatoração.

a) $\dfrac{ax + ay}{ax + bx + ay + by}$ $\dfrac{a}{a + b}$

b) $\dfrac{x^2 + 1}{x^3 - x^2 + x - 1}$ $\dfrac{1}{x - 1}$

7. Que fatoração pode ser explicada geometricamente com base na figura? Registre sua resposta no caderno. $x^2 + ax + bx + ab = (x + a) \cdot (x + b)$

Banco de imagens/ Arquivo da editora

Quadrados perfeitos

Quando estudamos os números, aprendemos que existem os números quadrados perfeitos. Agora, também falamos em expressões algébricas que são quadrados perfeitos. Verifique a figura em que apresentamos uma interpretação geométrica para o quadrado perfeito $25x^2$, que é igual a $(5x)^2$.

Banco de imagens/ Arquivo da editora

Um monômio é denominado quadrado perfeito quando é igual ao quadrado de outro monômio. Para isso, sendo não nulo, deve ter coeficiente positivo e todos os expoentes de suas letras devem ser números pares.

Orientações didáticas

Atividades

É importante que os estudantes reconheçam com detalhes o processo de fatoração por agrupamento, pois, assim, os cálculos podem ser realizados mentalmente para agilizar a fatoração. Enquanto perceber que os estudantes apresentam dúvidas, retome à investigação do processo a partir de outros exemplos e questionamentos norteadores.

Nas atividades **5** e **6**, trabalhe com os estudantes as estratégias de resolução apresentadas anteriormente e peça que compartilhem aquela que escolheram utilizar. Nesse momento, valorize também as estratégias pessoais e pergunte como cada um deles identificou os termos comuns nas etapas necessárias. Incentive-os a tirar a prova real ao final, multiplicando os fatores obtidos para verificar se o polinômio original é recuperado.

Na atividade **7**, proponha que os estudantes resolvam em grupo e, caso haja necessidade, interfira com questionamentos pontuais que os induzam a utilizar a medida de área de um retângulo. A ação de analisar e explicar um procedimento contribui para o desenvolvimento do pensamento abdutivo.

Quadrados perfeitos

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA09** ao explorar o conceito de números quadrados perfeitos e da **CEMAT03** ao relacionar conceitos de Álgebra à Aritmética e Geometria. A seção *Atividades* favorece o desenvolvimento da **CG04**.

Inicie o trabalho com o resgate dos conhecimentos prévios relacionados ao conceito de números quadrados perfeitos. Pode-se perguntar aos estudantes exemplos de quadrados perfeitos, como os números 4, 16 e 25. Posteriormente, pode-se introduzir o conceito de expressões algébricas que são quadrados perfeitos.

Destaque que o conceito de área do quadrado está diretamente relacionado a quadrados perfeitos.

Em seguida, trabalhe com os estudantes os exemplos, dando ênfase aos termos mistos que devem ser quadrados perfeitos tanto na parte numérica como na parte literal, por isso, o último exemplo trata dessa relação, uma vez que o 9 é quadrado perfeito, mas o x^3 não é.

Por fim, vale destacar que a representação do quadrado perfeito como uma potência de expoente 2 é uma forma de fatoração.

Orientações didáticas

Caso da diferença de dois quadrados

Para trabalhar a fatoração da diferença de dois quadrados, destaque aos estudantes que, para identificar o produto notável relacionado, deve-se analisar se a expressão algébrica corresponde à diferença de dois quadrados perfeitos.

De modo a valorizar o debate e o pluralismo de ideias, pode-se construir a representação geométrica da fatoração da diferença de quadrados junto com os estudantes e criar um momento para que eles debatam e verifiquem a medida da área colorida em suas duas representações, $a^2 - b^2$ e $(a + b) \cdot (a - b)$. Por fim, enuncie a forma fatorada da diferença de dois quadrados.

Aplicar uma regra geral para explicar ou resolver um caso particular contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo.

Atividades

Na atividade **8** proponha que os estudantes iniciem a resolução e, com o intuito de valorizar as estratégias pessoais de cada estudante, organize um momento para que eles possam compartilhar suas estratégias pessoais. Isso pode ser feito por meio de grupos de resolução e partilhas de resoluções de atividades, em consonância com a **CG04** da BNCC. Por fim, pergunte aos estudantes se as medidas das áreas destacadas são iguais ou diferentes.

Nas atividades **9** e **10**, caso haja necessidade, retome com os estudantes as fatorações trabalhadas nesse capítulo e, caso haja necessidade, enfatize com eles que nessas atividades podem ser utilizados vários tipos de fatoração.

Verifique outros exemplos:

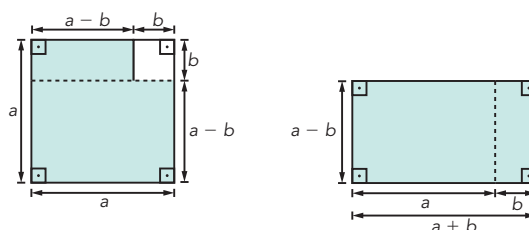
- $16a^2b^2$ é quadrado perfeito, porque tem coeficiente positivo e todos os expoentes de suas letras são números pares. Note que $16a^2b^2 = (4ab)^2$;
- $100p^2$ é quadrado perfeito, pois $100p^2 = (10p)^2$;
- $9x^3$ não é quadrado perfeito, pois o expoente de x é ímpar.

Caso da diferença de dois quadrados

A expressão $a^2 - b^2$ representa a diferença de dois quadrados: a^2 e b^2. A diferença de dois quadrados relaciona-se ao produto notável soma pela diferença.

Sabemos que $a^2 - b^2$ é igual ao produto da soma $(a + b)$ pela diferença $(a - b)$, isto é:

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

Podemos compreender essa igualdade trabalhando com medidas de área. Verifique as figuras a seguir.

Medida de área colorida: $a^2 - b^2$ Medida de área colorida: $(a + b) \cdot (a - b)$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

As medidas de área das partes coloridas nas duas figuras são iguais, pois são compostas de um retângulo de dimensões medindo a e $(a - b)$ e outro de dimensões medindo b e $(a - b)$. Então:

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

> A **forma fatorada da diferença de dois quadrados** é o produto da soma pela diferença das bases, na ordem dada.

Exemplos:

- $x^2 - 9 = (x + 3) \cdot (x - 3)$, com $9 = 3^2$
- $25a^2 - 1 = (5a)^2 - 1^2 = (5a + 1) \cdot (5a - 1)$, com $25a^2 = (5a)^2$ e $1 = 1^2$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

8. Copie e complete no caderno:
A forma fatorada de $x^2 - y^2$ é ▒▒▒. Logo, $x^2 - y^2 =$ ▒▒▒. $(x + y) \cdot (x - y)$; $(x + y) \cdot (x - y)$

9. No caderno, fatore completamente as expressões a seguir.

a) $x^2 - 36$ $(x + 6) \cdot (x - 6)$
b) $n^2 - 1$ $(n + 1) \cdot (n - 1)$
c) $100x^2 - 1$ $(10x + 1) \cdot (10x - 1)$
d) $a^2 - 4b^2$ $(a + 2b) \cdot (a - 2b)$
e) $9x^2 - 16a^2$ $(3x + 4a) \cdot (3x - 4a)$
f) $a^2b^2 - c^2d^2$ $(ab + cd) \cdot (ab - cd)$
g) $a^4 - b^4$ $(a^2 + b^2) \cdot (a + b) \cdot (a - b)$
h) $x^4 - 1$ $(x^2 + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$

10. No caderno, agrupe convenientemente os termos e fatore.

a) $x^3 + x^2 - 4x - 4$ $(x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)$
b) $x^2 - y^2 + x - y$ $(x - y) \cdot (x + y + 1)$

11. No caderno, simplifique $\dfrac{(x^2 - 1) \cdot (x + 2)}{(x^2 - 4) \cdot (x - 1)}$ e calcule o valor dessa fração algébrica para $x = 1\,002$. $\dfrac{x + 1}{x - 2}$; 1,003.

Trinômio quadrado perfeito

O trinômio $a^2 + 2ab + b^2$ é denominado **trinômio quadrado perfeito** porque é igual ao quadrado do binômio $(a + b)$. Ou seja: $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$

O trinômio $a^2 - 2ab + b^2$ também é um trinômio quadrado perfeito porque é igual ao quadrado do binômio $(a - b)$. Ou seja: $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

$(a + b)^2$ é a forma fatorada do trinômio $a^2 + 2ab + b^2$.

$(a - b)^2$ é a forma fatorada do trinômio $a^2 - 2ab + b^2$.

Reconhecemos um trinômio quadrado perfeito e obtemos sua forma fatorada verificando se:

- ele tem três termos;
- dois de seus termos são quadrados perfeitos $(a^2$ e $b^2)$;
- o outro termo é mais (ou menos) duas vezes o produto das bases desses quadrados $(+2ab$ ou $-2ab)$.

O sinal desse termo (+ ou −) é mantido na forma fatorada: $(a + b)$ ou $(a - b)$, respectivamente.

Trinômios quadrados perfeitos estão associados aos produtos notáveis quadrado da soma ou quadrado da diferença de dois termos.

Exemplos:

- $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \cdot 5 \cdot x + 5^2 = (x + 5)^2$ ($25 = 5^2$)
- $a^2 + 6ab + 9b^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 3b + (3b)^2 = (a + 3b)^2$ ($9b^2 = (3b)^2$)
- $x^2 - 10x + 25 = x^2 - 2 \cdot 5 \cdot x + 5^2 = (x - 5)^2$
- $a^2 - 6ab + 9b^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot 3b + (3b)^2 = (a - 3b)^2$

Agora, vamos simplificar a fração algébrica apresentada no início deste capítulo considerando que todos os denominadores sejam diferentes de zero.

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x + 1)^2}{(x + 1) \cdot (x - 1)} = \frac{\cancel{(x + 1)} \cdot (x + 1)}{\cancel{(x + 1)} \cdot (x - 1)} = \frac{x + 1}{x - 1}$$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

12. Verifique a figura e, no caderno, responda às questões propostas.

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Faça a soma da medida de área de cada uma das quatro partes indicadas. Qual é a medida de área do quadrado *BICO*? $a^2 + 2ab + b^2$

b) Qual é a medida do lado do quadrado *BICO*? $a + b$

c) Qual é a forma fatorada do trinômio que você obteve no item **a**? $(a + b)^2$

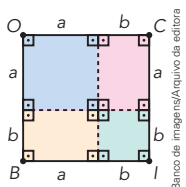
13. No caderno, fatore os trinômios seguintes:

a) $x^2 + 4x + 4$ $(x + 2)^2$

b) $n^2 - 10n + 25$ $(n - 5)^2$

c) $9a^2 + 6ab + b^2$ $(3a + b)^2$

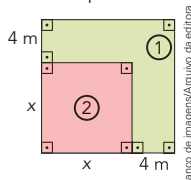
d) $4x^2 - 12xy + 9y^2$ $(2x - 3y)^2$

14. No caderno, coloque os fatores comuns em evidência e faça a fatoração completa.

a) $x^3 - 2x^2 + x$ $x \cdot (x - 1)^2$

b) $x^4 + 2x^3 + x^2$ $x^2 \cdot (x + 1)^2$

15. No caderno, calcule o valor numérico da fração algébrica $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}$ para $x = 999$. 0,998

16. Suponha que uma escola do campo, que desenvolva a metodologia de ensino citada no texto da abertura desta Unidade, tenha ao seu redor um terreno de medida de área 112 m², representado pela região ① da imagem. Sabendo que o local ocupado pela construção da escola, representado pela região ②, tem o formato de um quadrado, calcule no caderno a medida de área total desse terreno. 256 m²

Banco de imagens/Arquivo da editora

Na olimpíada

São naturais

(Obmep) Os números naturais *x* e *y* são tais que $x^2 - xy = 23$. Qual é o valor de $x + y$? Alternativa **e**.

a) 24
b) 30
c) 34
d) 35
e) 45

Orientações didáticas

Trinômio quadrado perfeito

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA09** ao explorar a técnica algébrica da fatoração pelo caso do trinômio quadrado perfeito que está associada aos produtos notáveis do quadrado da soma ou do quadrado da diferença de dois termos.

Destaque essa relação com os estudantes, fazendo-os perceber que este caso de fatoração é o processo inverso dos produtos notáveis mencionados.

Apresente para os estudantes as condições para que um trinômio seja quadrado perfeito, ou seja, dois de seus termos são quadrados perfeitos e o outro termo, que pode ser positivo ou negativo, é o dobro do produto das bases desses quadrados.

Em seguida, explore cada um dos exemplos apresentados, detalhando o processo de fatoração e destacando que um erro comum consiste em verificar apenas se dois de seus termos são um quadrado perfeito, sem analisar a outra condição. Mostre, por exemplo, que o trinômio $x^2 + 12x + 25 = x^2 + 12x + 52$ não pode ser escrito como $(x + 5)^2$. Se necessário, retome a representação geométrica do produto notável do quadrado da soma de dois termos, fazendo-os perceber que, além da área de dois quadrados, deve-se considerar a área de dois retângulos.

Atividades

A atividade **12** associa técnicas algébricas de produtos notáveis e fatoração com a Geometria, possibilitando a compreensão de que $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$. Destaque com os estudantes que nem sempre é vantajoso construir a representação geométrica de um trinômio para verificar se ele é ou não um quadrado perfeito para prosseguir com a fatoração. Por isso, é necessário aplicar estratégias mais ágeis de fatoração.

Na atividade **14**, questione os estudantes se os trinômios são quadrados perfeitos como estão apresentados e qual técnica algébrica pode ser utilizada para se obter um trinômio quadrado perfeito. Espera-se que eles concluam que é necessário colocar um fator comum em evidência e analisar o resultado do trinômio que surge neste processo, verificando que se trata de um quadrado perfeito e, em seguida, deve-se realizar nova fatoração. Com isso, destaque que, se for preciso, uma expressão algébrica pode ser fatorada mais de uma vez, envolvendo dois ou mais casos de fatoração.

Na atividade **15**, questione os estudantes sobre como simplificar a fração algébrica, possibilitando a conclusão de que os casos de fatoração podem ser úteis nesses procedimentos.

Na atividade **16**, instigue os estudantes a realizarem divisões na imagem de modo a concluir que a medida de área equivalente a 112 m² é expressa por $4x + 4x + 16 = 112$. Logo, $x = 12$ m. Com isso, a medida de área total do terreno é, em metros quadrados: $12^2 + 112 = 256$.

Na olimpíada

A igualdade permite a seguinte fatoração:

$x^2 - xy = 23$

$x \cdot (x - y) = 23$

Pergunte aos estudantes se é possível decompor o número 23 em fatores primos e lembre-os de que *x* e *y* são números naturais. Auxilie-os na conclusão de que o primeiro membro da igualdade é uma decomposição do número 23 e, como *x* e *y* são naturais, $x - y$ também o é. Assim, tem-se que $x = 23$ e $x - y = 1$ (ou $y = 22$).

Portanto, substituindo os valores de *x* e *y* na expressão $x + y$, tem-se: $x + y = 23 + 22 = 45$.

Orientações didáticas

Na mídia

Na BNCC

Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Saúde* ao explorar um contexto envolvendo esportes.

Comente com os estudantes que de acordo com a Organização Mundial da Saúde (OMS), a prática regular de atividades físicas colabora com a prevenção de doenças (fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Saúde. OMS lança plano de ação global sobre atividade física para reduzir comportamento sedentário e promover a saúde. *Biblioteca virtual em saúde*. Disponível em: https://bvsms.saude.gov.br/oms-lanca-plano-de-acao-global-sobre-atividade-fisica-para-reduzir-comportamento-sedentario-e-promover-a-saude/. Acesso em: 16 jun. 2022) Explique que existem diversas modalidades esportivas, muitas das quais não precisam de investimentos financeiros, como a caminhada. Destaque que, para a prática de atividades físicas de alta intensidade, é necessária uma avaliação médica prévia.

Fale também sobre os esportes que visam incluir um público mais jovem nos Jogos Olímpicos, como a escalada, o surfe, o *breaking* e o *skate*. Promova um debate de como esses esportes dialogam com as culturas juvenis e verifique a possibilidade de realizar uma atividade interdisciplinar que una **Arte** e **Educação Física** com o foco no *rap*, no *breaking* e no *graffiti*.

Do ponto de vista do ensino da Matemática, esta seção possibilita o desenvolvimento de habilidades e competências relacionadas à unidade temática Probabilidade e Estatística. As atividades podem ser planejadas para serem realizadas em dois momentos. Em um momento anterior à aula, os estudantes podem ser instigados a pesquisarem sobre as Olimpíadas, de modo a terem elementos para responder a atividade **3**. No segundo momento, pode-se dividir os estudantes em grupos para realização das outras atividades.

Na atividade **1**, retome com os estudantes os conceitos de gráficos de barras e de setores, incluindo a construção deles respeitando as representações em escalas proporcionais. Oriente-os a analisar o quadro e quantificar o número de medalhas de ouro, prata e bronze para, por fim, elaborarem os gráficos. Para incentivar o pluralismo de ideias e o debate em turma, proponha um momento para discutir as proporções e percentuais envolvidos na elaboração dos gráficos.

Na atividade **2**, enfatize com os estudantes que a análise dos dados do quadro agora é diferente, antes tinha-se uma análise do número de medalhas de cada tipo e agora tem-se uma análise da quantidade de medalhas por esporte.

Na atividade **3**, peça aos estudantes que apresentem suas pesquisas propostas de maneira prévia a essa aula.

Na mídia

Faça as atividades no caderno.

O Brasil nos Jogos Olímpicos de Tóquio

Verifique, a seguir, o quadro de medalhas do Brasil nos Jogos Olímpicos de Tóquio-2020.

3. Exemplo de resposta: Entre os dias 26 de julho e 11 de agosto de 2024 serão realizados os Jogos Olímpicos de Paris. Os Jogos Olímpicos de Verão de 2028 serão em Los Angeles, nos Estados Unidos, e os de 2032 serão em Brisbane, na Austrália. Nos jogos de Paris em 2024, será incluído o *breaking* como modalidade nova. (Fonte dos dados: Comitê Olímpico Internacional. *Breaking*. Disponível em: https://olympics.com/pt/esportes/breaking/. Acesso em: 1º maio 2022.)

Medalha	Modalidade	Atleta
Ouro	Surfe	Ítalo Ferreira
Ouro	Vela	Martine Grael e Kahena Kunze
Ouro	Ginástica artística	Rebeca Andrade
Ouro	Maratona aquática	Ana Marcela Cunha
Ouro	Canoagem	Isaquias Queiroz
Ouro	Boxe	Hebert Conceição
Ouro	Futebol masculino	Seleção Brasileira
Prata	*Skate Street*	Rayssa Leal
Prata	*Skate Street*	Kelvin Hoefler
Prata	Ginástica artística	Rebeca Andrade
Prata	*Skate Park*	Pedro Barros
Prata	Boxe	Beatriz Ferreira
Prata	Vôlei feminino	Seleção Brasileira
Bronze	Judô	Daniel Cargnin
Bronze	Natação	Fernando Scheffer
Bronze	Judô	Mayra Aguiar
Bronze	Tênis	Luisa Stefani e Laura Pigossi
Bronze	Atletismo	Alison dos Santos
Bronze	Atletismo	Thiago Braz
Bronze	Boxe	Abner Teixeira
Bronze	Natação	Bruno Fratus

Fonte dos dados: VEJA TODAS as medalhas do Brasil em Tóquio 2020. *Globo Esporte*, 26 jul. 2021. Disponível em: https://ge.globo.com/olimpiadas/noticia/quantas-medalhas-o-brasil-ja-ganhou-nas-olimpiadas-2020-veja-quadro.ghtml. Acesso em: 4 abr. 2022.

2. Surfe, Vela, Maratona Aquática, Canoagem, Futebol Masculino, *Skate Park*, Vôlei Feminino e Tênis ganharam 1 medalha cada. Ginástica Artística, *Skate Street*, Judô, Natação e Atletismo ganharam 2 medalhas cada.

1. Determine a quantidade de medalhas de ouro, de prata e de bronze que o Brasil ganhou nos Jogos Olímpicos de Tóquio-2020. Represente esses dados de duas formas: em um gráfico de barras e em um gráfico de setores (*pizza*). A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

2. Agora, determine a quantidade total de medalhas que o Brasil ganhou nos Jogos Olímpicos de Tóquio-2020 em cada modalidade: Surfe, Vela, Ginástica Artística, Maratona Aquática, Canoagem, Boxe, Futebol Masculino, *Skate Street*, *Skate Park*, Vôlei Feminino, Judô, Natação, Tênis e Atletismo. Quais dessas modalidades ganharam a mesma quantidade de medalhas?

3. Pesquise e, no caderno, responda: Quais serão as três próximas edições dos Jogos Olímpicos de Verão? Onde e quando ocorrerão? Quais esportes novos serão incluídos nos próximos Jogos Olímpicos? Prática de pesquisa

Proposta para o estudante

Para expandir a abordagem sobre os Jogos Olímpicos, peça que os estudantes pesquisem e elaborem um quadro de medalhas do Brasil nas últimas Paralimpíadas, elaborando também os gráficos e respondendo os mesmos itens da seção.

Na Unidade

Faça as atividades no caderno.

Verifique a figura a seguir para responder às questões **1** e **2**.

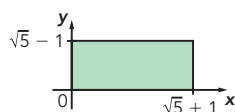
Banco de imagens/Arquivo da editora

1. A medida de área do quadrado interno é: Alternativa **d**.

a) $n^2 - 1$
b) $n^2 + 1$
c) $n^2 + 2n - 1$
d) $n^2 - 2n + 1$

2. A medida de área da região colorida é: Alternativa **b**.

a) $2n$
b) $4n$
c) $2n + 2$
d) $4n + 2$

3. A medida de área do retângulo colorido é: Alternativa **b**.

a) 2,5
b) 4
c) 4,5
d) 5

4. $\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ é igual a: Alternativa **a**.

a) 4,5
b) 4
c) 3,5
d) 2,5

5. Como $\sqrt{7} \simeq 2{,}646$, $\frac{35}{\sqrt{7}}$ é, aproximadamente: Alternativa **c**.

a) 11,22
b) 12,23
c) 13,23
d) 13,28

6. $\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}$ é igual a: Alternativa **c**.

a) $4 + 2\sqrt{3}$
b) $2 + 2\sqrt{3}$
c) $2 + \sqrt{3}$
d) $2 - \sqrt{3}$

7. (FGV-SP) Seja n o resultado da operação $375^2 - 374^2$. A soma dos algarismos de n é: Alternativa **c**.

a) 18
b) 19
c) 20
d) 21

8. (Saresp) Simplificando-se a expressão $\frac{x^2 + 3x}{x^2 - 9}$ em que $x \neq 3$ e $x \neq -3$, obtém-se: Alternativa **b**.

a) $\frac{3}{x - 9}$
b) $\frac{x}{x - 3}$
c) $\frac{x}{3}$
d) $-\frac{x}{3}$

9. (Saresp) A simplificação de $\left(\frac{9x^2 + 6x + 1}{9x^2 - 1}\right)$ é: Alternativa **c**.

a) $\frac{(3x - 1)}{(3x - 1)}$
b) $\frac{(3x + 1)}{(3x + 1)}$
c) $\frac{(3x + 1)}{(3x - 1)}$
d) $\frac{(3x - 1)}{(3x + 1)}$

10. (Unesp-SP) Sabe-se que $a + b = 10$. Nessa condição, o valor numérico da fração algébrica $\frac{5a + 5b}{a^2 + 2ab + b^2}$ é: Alternativa **d**.

a) 2
b) $\frac{3}{2}$
c) 1
d) $\frac{1}{2}$

Orientações didáticas

Na Unidade

Na BNCC

Esta seção favorece o desenvolvimento das habilidades exploradas ao longo de toda a Unidade e mobiliza com maior ênfase a **CEMAT02**, a **CEMAT06** e a **CG02** ao propor a resolução de atividades diversas por meio de diferentes contextos e estratégias de resolução.

Esta seção traz atividades dos principais conteúdos abordados na Unidade que podem ser utilizadas como ferramentas de avaliação. Proponha a resolução das atividades individualmente. Acompanhe os estudantes durante a realização delas e registre avanços e dificuldades para, ao final, propor novas atividades para remediação coletiva ou individual de defasagens, conforme cada caso.

A seguir, listamos algumas sugestões e estratégias para remediação.

Nas atividades **1** e **2**, os estudantes são levados a associar a medida de área de um quadrado com produtos notáveis. Na atividade **1**, trata-se do quadrado da diferença, uma vez que a dimensão do quadrado mencionado nesta atividade é $n - 1$. Na atividade **2**, explora-se o quadrado da soma. Caso haja dificuldades, para remediação solicite que os estudantes revejam esses conceitos no livro do estudante.

As atividades **3** e **4** envolvem o desenvolvimento de produtos notáveis em que um dos termos contém raízes quadradas. Ressalte com os estudantes esta particularidade, fazendo-os resgatar o que já fizeram em atividades semelhantes. No caso de dúvidas, proponha atividades de remediação, para serem feitas em duplas.

As atividades **5** e **6** envolvem o uso da racionalização como ferramenta para a simplificação de expressões algébricas cujo denominador apresenta raiz quadrada. Caso haja necessidade, retome com os estudantes as estratégias de identificação do fator racionalizante.

Na atividade **7**, questione os estudantes sobre como podemos utilizar produtos notáveis para facilitar o cálculo da expressão numérica apresentada. Leve-os a perceber que se trata da diferença de dois quadrados e que a expressão pode ser escrita como $(375 + 374) \cdot (375 - 374)$, simplificando os cálculos envolvidos no processo.

Nas atividades **8** e **9**, trata-se da simplificação de frações algébricas por meio de fatorações. Portanto, questione os estudantes sobre que tipo de fatoração pode ser feita nas expressões e auxilie-os a identificar que $x^2 + 3x$ pode ser fatorado como $x \cdot (x + 3)$, $x^2 - 9$ pode ser fatorado como $(x + 3) \cdot (x - 3)$, $9x^2 + 6x + 1$ pode ser fatorado como $(3x + 1)^2$ e $9x^2 - 1$ pode ser fatorado como $(3x + 1) \cdot (3x - 1)$.

Na atividade **10**, espera-se que os estudantes compreendam que, para utilizar o resultado $a + b = 10$, é preciso simplificar a fração algébrica apresentada. Ou seja, os casos de produtos notáveis e fatoração são aplicados neste processo de simplificação. No numerador, deve-se realizar a fatoração do fator comum em evidência, já no denominador é preciso aplicar a fatoração do trinômio quadrado perfeito.

Outras dificuldades diferentes das listadas podem surgir; por isso, é importante o monitoramento individual e contínuo dos estudantes.

Orientações didáticas

Abertura

Na BNCC

A abertura da Unidade mobiliza com maior ênfase a **CG08** e possibilita a discussão sobre assuntos relacionados aos TCTs *Saúde* e *Educação Alimentar e Nutricional*, ao propor uma reflexão sobre hábitos alimentares e o impacto deles na saúde do indivíduo.

Antes da leitura do texto apresentado na abertura, questione os estudantes: "O que é ter uma alimentação balanceada?"; "Qual é a importância de ter uma alimentação rica em proteínas, vegetais e frutas?"; "Que doenças pode gerar o consumo regular de alimentos com altos índices de açúcar, gordura?".

Também podem ser feitas questões que mobilizam a **CG08**, relacionadas ao autocuidado: "Como é a sua alimentação?". Faça o registro das repostas, em forma de tabela na lousa, para promover um debate, sempre com a preocupação em não expor os estudantes, mas sim orientá-los sobre o valor nutricional dos alimentos, valorizando o TCT *Educação Alimentar e Nutricional*.

3 UNIDADE

Equações

beats1/Shutterstock

NESTA UNIDADE VOCÊ VAI:

- compreender diferentes maneiras de resolver problemas envolvendo equações do 2º grau;
- resolver problemas equacionados na forma $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$;
- resolver problemas utilizando equações redutíveis a uma equação do 2º grau.

CAPÍTULOS

Ter hábitos de alimentação saudáveis pode ajudar na qualidade de vida.

O livro *74 dias para o fim*, de Angélica Lopes (Belo Horizonte: Lê, 2015), narra, em primeira pessoa, a violência psicológica e física sofrida por Valdir, um estudante de 16 anos do último ano do Ensino Médio. Trata-se de um trabalho que apresenta aos jovens as temáticas da cultura digital nos conflitos da adolescência, de modo a sensibilizar o leitor para os fatos vividos pelo personagem. A narrativa aborda questões diversas relacionadas, sobretudo, ao *bullying* no contexto escolar e nas redes sociais. Valdir rememora esses acontecimentos anos mais tarde, ao tentar compreender o que motivou um grupo de colegas de sala de aula a elegê-lo objeto de injúria, além das inúmeras agressões físicas sofridas por ele. O texto aborda de maneira sensível os conflitos e sentimentos vivenciados por Valdir nos últimos 74 dias que faltam para sua formatura no Ensino Médio. Esse relato coloca em evidência as relações sociais, afetivas e emocionais no espaço escolar e o modo como a escola lida com o *bullying* entre os estudantes. Os atos de *bullying*, muitas vezes vistos como mera brincadeira, ofendem a honra, a dignidade e a identidade daquele que os sofre, colocando-o diante de situações diversas de conflitos que podem ocorrer tanto no espaço físico escolar quanto no ciberespaço. Os colegas de Valdir se valem de tecnologias, como as redes sociais, *e-mails*, blogues e mensagens via celular, para praticar o *cyberbullying*.

68

Reprodução do Livro do Estudante em tamanho reduzido.

Proposta para o estudante

Sugerimos a leitura do texto da referência a seguir, em que é apresentado um estudo sobre 10 coisas que os adolescentes querem saber sobre *bullying* e *cyberbullying*.

UNICEF. *Cyberbullying*: O que é e como pará-lo. [*s. l.*]. Disponível em: https://www.unicef.org/brazil/cyberbullying-o-que-eh-e-como-para-lo#:~:text5Cyberbullying%20%C3%A9%20o%20bullying%20realizado,envergonhar%20aqueles%20que%20s%C3%A3o%20v%C3%ADtimas. Acesso em: 13 maio 2022.

Saúde em primeiro lugar

Segundo uma pesquisa do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) em parceria com o Ministério da Saúde, divulgada em outubro de 2020, o percentual de pessoas em idade adulta obesas no Brasil em 2019 era de 26,8%, mais do que o dobro em comparação a 2002, e de pessoas com sobrepeso, de 61,7%.

Uma pessoa adulta é considerada obesa quando o seu Índice de Massa Corpórea (IMC) ultrapassa 30 kg/m^2. Esse índice relaciona a medida de massa (em kg) e a medida da altura (em m) de uma pessoa pela expressão $\text{IMC} = \dfrac{\text{Massa}}{(\text{Altura})^2}$, e a classificação dos resultados se encontra no quadro.

IMC (em kg/m^2)	Classificação da obesidade
Menor do que 18	Magreza
De 18 a 25	Normal
De 25 a 30	Sobrepeso
De 30 a 35	Obesidade grau I
De 35 a 40	Obesidade grau II
Maior do que 40	Obesidade grau III (obesidade grave ou mórbida)

Fonte dos dados: CENTRO DE FISIOLOGIA DIGESTIVA DE PIRACICABA. *Índice de massa corporal.* Piracicaba: Cefidi, c2018. Disponível em: https://www.cefidi.com.br/indice-de-massa-corporal-imc/. Acesso em: 23 abr. 2022.

Visto de maneira isolada, o IMC pode gerar equívocos de interpretação, pois uma pessoa forte com baixa estatura, por exemplo, pode apresentar um IMC alto. Para que o diagnóstico seja mais preciso, é necessário considerar outros índices, como a Relação Cintura-Quadril (RCQ), calculada por meio da razão entre as medidas de comprimento das circunferências da cintura e do quadril (ambas em centímetros), e o Índice de Adiposidade Corporal (IAC), calculado por $\text{IAC} = \dfrac{(\text{Circunferência do quadril})}{(\text{Altura}) \times \sqrt{(\text{Altura})}} - 18$, com a medida da circunferência do quadril em centímetros e a medida da altura em metros. Se a RCQ for maior ou igual a 0,85 para mulheres e 0,9 para homens, há risco de doenças cardiovasculares, e, se o IAC for maior do que 38 para mulheres e 25 para homens, a pessoa pode ser considerada obesa.

As causas comuns de obesidade incluem: genética; influências fisiológicas; ingestão de alimentos e transtornos alimentares; histórico de peso; hereditariedade; dieta não saudável; estilo de vida sedentário; uso de drogas, como hormônios esteroides e as usadas para tratar doenças psiquiátricas; gravidez; poucas horas de sono.

Para evitar a obesidade, recomenda-se manter uma alimentação balanceada com alimentos naturais, como frutas e verduras, e praticar atividades físicas regularmente. Vale ressaltar que a principal motivação da prevenção da obesidade deve ser a saúde, visto que ela pode ocasionar outras doenças, como hipertensão e diabetes. Fatores estéticos devem estar em segundo plano, pois é preciso normalizar a diversidade de corpos que existe na sociedade.

Fontes dos dados: CABRAL, Umberlândia. Um em cada quatro adultos do país estava obeso em 2019; atenção primária foi bem avaliada. *Agência IBGE Notícias*, [*s. l.*], 21 out. 2020. Disponível em: https://agenciadenoticias.ibge.gov.br/agencia-noticias/2012-agencia-de-noticias/noticias/29204-um-em-cada-quatro-adultos-do-pais-estava-obeso-em-2019; COLLETI, César. IMC, RCQ e IAC: que confusão! *Jornal da Franca*, [*s. l.*], 8 out. 2020. Disponível em: https://www.jornaldafranca.com.br/imc-rcq-e-iac-que-confusao/; QUAIS são as consequências da obesidade para a saúde? *Vida Nova*, [*s. l.*], 14 maio 2019. Disponível em: https://www.vidanovametabolica.org.br/obesidade-consequencias/; TUCHLINSKI, Camila. O que é gordofobia? Saiba quais são os efeitos para quem sofre discriminação. *Estadão*, São Paulo, 7 ago. 2020. Disponível em: https://emais.estadao.com.br/noticias/comportamento,o-que-e-gordofobia-saiba-quais-sao-os-efeitos-para-quem-sofre-discriminacao,70003391269. Acesso em: 5 jan. 2022.

No caderno, responda: Em sua opinião, o que mais pode ser feito para prevenir a obesidade? Avalie se seus hábitos alimentares são de fato saudáveis.

Resposta pessoal. Exemplo de resposta: Redução do consumo de sal, açúcares e gorduras.

Orientações didáticas

Abertura

A leitura e interpretação do texto da abertura permite a interdisciplinaridade com **Língua Portuguesa**. Desenvolva estratégias de leitura que promovam inferências. Por exemplo, os estudantes podem calcular os seus próprios índices de massa corpórea e tomar decisões sobre a necessidade de mudanças de estilo de vida para o bem da saúde.

Além das questões trazidas por esse texto, como: o cálculo do IMC e do IAC, as causas da obesidade e como evitá-la, pode ser abordada uma questão delicada, porém necessária para conscientizar os estudantes sobre um tipo de *bullying*: a gordofobia, sendo esta entendida como a discriminação de pessoas acima do peso. Essa discussão e, também, a leitura do livro indicado no boxe mobilizam a **CG09** e a **CG10**, ao incentivar os estudantes ao respeito aos outros, à valorização da diversidade de indivíduos, à empatia, à inclusão, etc.

Proposta para o estudante

Sugerimos que os estudantes façam uma pesquisa sobre *bullying* e *cyberbullying*.

Destaque pontos importantes da pesquisa:

- compreender qual é o significado desses termos;
- conhecer a consequência para quem pratica esse tipo de agressão;
- conhecer o que pode acontecer com quem recebe esse tipo de agressão;
- identificar situações que sugerem esse tipo de agressão;
- verificar a existência da relação entre obesidade e *bullying*.

Após a pesquisa, apresente os resultados em uma roda de conversa, em que os estudantes possam expor as informações coletadas.

Em seguida, proponha que escrevam quais atitudes eles teriam frente a uma situação de *bullying*.

Orientações didáticas

Produto igual a zero

Na BNCC

Este capítulo auxilia no desenvolvimento das habilidades: **EF09MA03** e **EF09MA04**, quando se efetuam cálculos na resolução de problemas com números reais; e **EF09MA09**, por possibilitar a utilização da fatoração de expressões algébricas para resolver problemas representados por equações polinomiais do 2º grau.

Sugerimos a leitura com os estudantes da situação "O fator necessário" apresentada neste tópico. Na lousa, mostre outros exemplos em que o produto de dois números é igual a zero, como sugestão:

$6 \cdot 0$; $0 \cdot 7$;
$-7 \cdot 0$; $0 \cdot (-1{,}2)$;
$\frac{1}{3} \cdot 0$; $0{,}1313... \cdot 0$;
$0{,}123 \cdot 0$; $0 \cdot 0$.

Explique que "ou", utilizado em Matemática, é proveniente da Lógica e, por isso, não significa exclusão, pelo contrário: ele representa inclusão. Portanto, *a* pode ser zero, *b* pode ser zero e ambos podem ser zero. Esse contexto auxilia na valorização da argumentação matemática, que favorece o desenvolvimento da **CEMAT02**.

Capítulo 5 — Resolução de equações por meio de fatoração

EF09MA03
EF09MA04
EF09MA09

Produto igual a zero

O fator necessário

Luísa escolheu 2 números, multiplicou um pelo outro e obteve resultado igual a 0 (zero). O que se pode afirmar a respeito dos números que ela escolheu?

$$? \cdot ? = 0$$

Se Luísa tivesse escolhido 2 números diferentes de 0, o produto não daria 0.

Para que o produto dê 0, é necessário que ao menos 1 dos fatores seja 0.

Portanto, pelo menos 1 dos números que Luísa escolheu foi 0.

A multiplicação $a \cdot b$ só pode resultar em 0 se tivermos $a = 0$ ou $b = 0$. Mais precisamente:

$a \cdot b = 0$ se, e somente se, $a = 0$ ou $b = 0$.

É claro que podemos ter ambos os números iguais a zero ($a = b = 0$). Em Matemática, o conectivo **ou** não é exclusivo. Quando dizemos $a = 0$ ou $b = 0$, pode ocorrer apenas $a = 0$, apenas $b = 0$ ou $a = 0$ e $b = 0$.

Fatoração e resolução de equações

Vamos pensar na situação apresentada pelo professor.

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Para calcular um número desconhecido (incógnita), representamos esse número por uma letra (por exemplo, x), montamos a equação a que esse número satisfaz e, depois, a resolvemos.

Neste exemplo, temos:

Número desconhecido $\rightarrow x$

Subtraindo 3 de $x \rightarrow x - 3$

Multiplicando o resultado por 10, o produto é 0.

Equação $\rightarrow (x - 3) \cdot 10 = 0$

No primeiro membro, temos o número $(x - 3)$ multiplicado por 10; no segundo membro, temos 0. Como o resultado dessa multiplicação deve ser 0, pelo menos um dos fatores precisa ser igual a 0.

Conclusão: $x - 3 = 0$. Logo, $x = 3$.

Conferindo: $(3 - 3) \cdot 10 = 0 \cdot 10 = 0$.

Resposta: O número 3 é a única raiz da equação.

Note, agora, outra situação apresentada pelo professor.

Vamos montar a equação:

Número desconhecido $\rightarrow x$

Adicionando $\frac{2}{3}$ a $x \rightarrow x + \frac{2}{3}$

Multiplicando o resultado pelo número desconhecido, o produto é 0.

Equação $\rightarrow \left(x + \frac{2}{3}\right) \cdot x = 0$

Para que o produto seja 0, um dos fatores precisa ser igual a 0. Então:

$x + \frac{2}{3} = 0$ ou $x = 0$

$x = -\frac{2}{3}$ ou $x = 0$

Esse problema tem 2 soluções: $-\frac{2}{3}$ e 0.

Verifique:

- x pode ser $-\frac{2}{3}$ porque $\left(-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = 0 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = 0$;
- x pode ser 0 porque $\left(0 + \frac{2}{3}\right) \cdot 0 = \frac{2}{3} \cdot 0 = 0$.

Resposta: O número é $-\frac{2}{3}$ ou 0.

Orientações didáticas

Fatoração e resolução de equações

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA09** ao propor a utilização da fatoração de expressões algébricas para resolver e elaborar problemas representados por equações polinomiais do 2º grau.

Neste tópico é explorada uma situação representada por uma equação, a qual é resolvida utilizando-se fatoração. Na segunda situação, a equação apresenta 2 soluções distintas. Verifique se os estudantes percebem a diferença e o que há em comum entre essa equação e a do exemplo anterior. Em ambas, pelo menos um dos fatores da multiplicação deve ser zero, porém na equação da primeira situação já se sabe que um deles é diferente de zero (10).

Orientações didáticas

Aplicando fatoração

Inicialmente, converse com os estudantes para verificar o que compreendem sobre a leitura da situação apresentada neste tópico. Depois de ouvir as respostas dos estudantes, sugerimos que seja feita a leitura conjunta do texto.

Em relação à pergunta "Qual número é igual ao quadrado dele?", mostre o que acontece com valores diferentes de 1 e 0.

Como sugestão:

$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) \Leftrightarrow (-2)^2 = 4;$

$(-1)^2 = (-1) \cdot (-1) \Leftrightarrow (-1)^2 = 1;$

$2^2 = 2 \cdot 2 \Leftrightarrow 2^2 = 4;$

$0{,}2^2 = 0{,}2 \cdot 0{,}2 \Leftrightarrow 0{,}2^2 = 0{,}04;$

$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}.$

O segundo exemplo deste tópico é mais complexo e merece ser desenvolvido passo a passo com a turma.

As fatorações utilizadas tampouco são óbvias – reserve um tempo maior para reforçar que na primeira foi usado o fator comum $(x + 1)$ e, na segunda, a diferença de quadrados.

A conferência das demais respostas mentalmente segue o seguinte raciocínio:

Conferindo $x = -2$ na equação ①:

$(-2)^3 + (-2)^2 - 4 \cdot (-2) - 4 =$
$= -8 + 4 + 8 - 4 = 0.$

Conferindo $x = 2$ na equação ①:

$(2)^3 + (2)^2 - 4 \cdot (2) - 4 =$
$= 8 + 4 - 8 - 4 = 0.$

Aplicando fatoração

Quando uma equação apresenta o segundo membro igual a 0 e seu primeiro membro pode ser decomposto em produto, podemos resolvê-la recaindo em equações mais simples.

Verifique alguns exemplos.

Número desconhecido: x

Quadrado do número desconhecido: x^2

Equação: $\underbrace{x^2}_{\text{primeiro membro}} = \underbrace{x}_{\text{segundo membro}}$

Adicionando $-x$ aos dois membros: $\underbrace{x^2 + (-x)}_{\text{primeiro membro}} = \underbrace{x + (-x)}_{\text{segundo membro}}$, temos que $x^2 - x = 0$

Fatorando: $x \cdot (x - 1) = 0$

Igualando os fatores a zero: $x = 0$ ou $x - 1 = 0$

Resolvendo as equações: $x = 0$ ou $x = 1$

Conferindo na equação: $0^2 = 0$ e $1^2 = 1$.

Resposta: Os números 0 e 1.

> Note que, para zerar o segundo membro da equação, adicionamos o termo $-x$ nos dois membros dela. Dessa maneira, podemos reescrever $x^2 = x$ como $x^2 - x = 0$.

Acompanhe mais um exemplo.

Proposta para o professor

Sugerimos a leitura do trabalho a seguir, que apresenta a análise de registros feitos por estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, ao resolverem equações polinomiais do 2º grau por meio de fatoração.

FREITAS, J. L. M.; GUADAGNINI, M. R. O uso da fatoração na resolução de equações do 2º grau por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. *In*: SEMINÁRIO SUL-MATO-GROSSENSE DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7, 2013, Campo Grande. *Anais do VII Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática*. Campo Grande: Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, 2013. p. 1-12. Disponível em: https://desafioonline.ufms.br/index.php/sesemat/article/view/3794. Acesso em: 13 maio 2022.

Número desconhecido: x

Cubo do número desconhecido: x^3

Quadrado do número desconhecido: x^2

Quádruplo do número desconhecido: $4x$

Equação: $\underbrace{x^3 + x^2}_{\text{primeiro membro}} = \underbrace{4 + 4x}_{\text{segundo membro}}$

Para solucionar essa equação, precisamos determinar uma expressão que zere o segundo membro e, depois, repetir essa ação no primeiro membro. No caso, $(4 + 4x) + (-4 - 4x) = 0$. Então, fazendo isso para os dois membros, temos:

$$\underbrace{x^3 + x^2 + (-4 - 4x)}_{\text{primeiro membro}} = \underbrace{4 + 4x + (-4 - 4x)}_{\text{segundo membro}}$$

$$\underbrace{x^3 + x^2 - 4x - 4}_{\text{primeiro membro}} = \underbrace{0}_{\text{segundo membro}} \quad (1)$$

Fatorando: $x^2 \cdot (x + 1) - 4 \cdot (x + 1) = 0$

Colocando $(x + 1)$ em evidência: $(x + 1) \cdot (x^2 - 4) = 0$

Fatorando $(x^2 - 4)$ obtemos: $(x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 2) = 0$

Igualando cada fator a 0:

$x + 1 = 0$ ou $x + 2 = 0$ ou $x - 2 = 0$

$x = -1$ ou $x = -2$ ou $x = 2$

Conferindo $x = -1$ na equação (1): $(-1)^3 + (-1)^2 - 4 \cdot (-1) - 4 = -1 + 1 + 4 - 4 = 0$.

Confira as outras respostas mentalmente.

Resposta: Há 3 respostas: -1, -2 e 2.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. No caderno, calcule o valor de x em cada equação.
   a) $15 \cdot (x + 2) = 0$ -2
   b) $x \cdot (x - 4) = 0$ 0 ou 4.
2. Adicionando o triplo de um número ao quadrado desse número, obtemos 0. No caderno, responda: Qual é o número? 0 ou -3.
3. Adicionando 4 ao quadrado da idade de Júnior, obtemos o quádruplo da idade dele. No caderno, responda: Quantos anos Júnior tem? 2 anos.
4. No caderno, resolva as equações utilizando afatoração.
   a) $x^2 - 10x + 25 = 0$ 5
   b) $x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$ 2; -2 ou 5.
5. No caderno, responda: Que número é igual à metade do seu quadrado? 0 ou 2.
6. No caderno, responda: Que número é igual ao quádruplo de seu cubo? 0; $\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}$.
7. O dia e o mês do aniversário da Natasha são raízes da equação $x^3 - 10x^2 - 4x + 40 = 0$. Sabendo que ela nasceu no primeiro semestre, responda no caderno: Quando é o aniversário dela? 10 de fevereiro.
8. Ao perguntarem sobre a idade de Juliana, ela respondeu: "É uma das raízes da equação $x^3 - 13x^2 - 2x + 26 = 0$".
   No caderno, responda: Qual é a idade de Juliana? 13 anos.

Orientações didáticas

Atividades

As atividades desta seção consideram a resolução de equações por fatoração.

Nas atividades **2**, **3**, **5** e **6**, objetiva-se a resolução de problemas. Valorize o desenvolvimento do pensamento algébrico e verifique se os estudantes escrevem corretamente a equação que traduz cada problema.

Destacamos a atividade **4**, em que se objetiva determinar as soluções para cada equação. Verifique se os estudantes notam a semelhança entre essa atividade e os exemplos apresentados no texto.

Proposta para o estudante

Sugerimos que os estudantes resolvam estas equações:

a) $(x - 3) \cdot (x + 4) = 0$

b) $(4x + 3) \cdot (5x - 2) = 0$

c) $(x + 2) \cdot (3x - 4) = 0$

d) $(2x - 1) \cdot (x + 5) = 0$

Após a resolução, solicite que verifiquem se as raízes encontradas satisfazem as equações.

Orientações didáticas

Trinômio do 2º grau

Converse com os estudantes para verificar os conhecimentos prévios sobre Álgebra necessários para prosseguir com este tópico. Depois, faça a resolução do exemplo na lousa, explicando cada etapa. Explique que, para obtermos a expressão algébrica correspondente, podemos aplicar a propriedade distributiva da multiplicação e, depois, reduzir os termos semelhantes.

Apresente os exemplos do livro.

Fatoração do trinômio do 2º grau

Discuta com os estudantes a generalização da equação de raízes m e n.

A resolução de equações por soma e produto das raízes é geralmente subestimada pelos professores como recurso didático alternativo. Cuide para que, no decorrer do ano letivo, ocorra simultaneamente com as resoluções que tradicionalmente usem a fórmula de Bhaskara.

As fatorações indicadas neste tópico são muito úteis, pois resultam em polinômios formados por produtos que facilitam a obtenção das raízes. Essa estratégia será muito utilizada em todo o Ensino Médio como auxiliar na pesquisa de raízes racionais das equações polinomiais.

Trinômio do 2º grau

Formando uma equação

Você sabe formar uma equação que tem como raízes os números 2 e 3? Verifique como fazer.

- Equação que tem o número 2 como raiz:
  $x = 2$ ou, então, $x - 2 = 0$.
- Equação que tem o número 3 como raiz:
  $x = 3$ ou, então, $x - 3 = 0$.

Considere a equação produto $(x - 2) \cdot (x - 3) = 0$.

Para resolvê-la, igualamos cada fator a 0. Logo, suas raízes são 2 e 3. Assim, uma equação de raízes 2 e 3 é $(x - 2) \cdot (x - 3) = 0$. Efetuando a multiplicação, obtemos $x^2 - 5x + 6 = 0$, que também é uma equação com raízes 2 e 3. Por isso, dizemos que os **zeros** do trinômio $x^2 - 5x + 6$ são 2 e 3.

Denominamos **zeros** do polinômio P na variável x as **raízes** da equação $P = 0$.

Fatoração do trinômio do 2º grau

Repare que $x^2 - 5x + 6$ é um trinômio do 2º grau (o grau 2 é o maior expoente de x). A sua forma fatorada é $(x - 2) \cdot (x - 3)$, isto é:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \cdot (x - 3)$$

Podemos fazer uma generalização. Para formar a equação de raízes m e n, temos:

raiz m ⟶ $x - m = 0$

raiz n ⟶ $x - n = 0$

raízes m e n ⟶ $(x - m) \cdot (x - n) = 0$

Efetuando a multiplicação, obtemos:

$$x^2 - mx - nx + mn = 0$$
$$x^2 - x \cdot (m + n) + mn = 0$$
$$x^2 - (m + n) \cdot x + mn = 0$$

Substituindo a soma $m + n$ por s e o produto mn por p, a equação fica: $x^2 - sx + p = 0$.

Uma equação de raízes m e n é $(x - m) \cdot (x - n) = 0$,
ou, então, $x^2 - sx + p = 0$, em que $s = m + n$ e $p = m \cdot n$.

A forma fatorada do trinômio do 2º grau em x, $x^2 - s \cdot x + p$, em que $s = m + n$ e $p = m \cdot n$, é $(x - m) \cdot (x - n)$.

$$x^2 - \underbrace{s}_{\text{soma das raízes}} \cdot x + \underbrace{p}_{\text{produto das raízes}} = (x - \underbrace{m}_{\text{uma raiz}}) \cdot (x - \underbrace{n}_{\text{outra raiz}})$$

Como formamos uma equação de raízes 5 e 7?

1º modo: Partindo da equação produto:

$$(x - 5) \cdot (x - 7) = 0$$
$$x^2 - 5x - 7x + 35 = 0$$
$$x^2 - 12x + 35 = 0$$

Proposta para o estudante

Para complementar os tópicos apresentados até agora, sugerimos o vídeo em que se apresenta a explicação de alguns casos de fatoração associados ao pensamento geométrico.

14/12 – 9º ano EF – Matemática – Expressões algébricas – Fatoração e produtos notáveis: Parte I. São Paulo, 2020. 1 vídeo (39 min). Publicado pelo canal 9º ano EF – CMSP. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=wf7daMpcLH8. Acesso em: 13 maio 2022.

2º modo: Partindo da soma e do produto das raízes:

$$5 + 7 = 12 \text{ e } 5 \cdot 7 = 35$$
$$\text{equação: } x^2 - 12x + 35 = 0$$

A forma fatorada de $x^2 - 12x + 35$ é $(x - 5) \cdot (x - 7)$.
Verifique outros exemplos.
Como fatoramos os trinômios $x^2 - 8x + 12$ e $x^2 + 8x + 12$?

- $x^2 - \underbrace{8}_{\text{soma}} \cdot x + \underbrace{12}_{\text{produto}}$

  Os dois números cuja soma é 8 e cujo produto é 12 são 6 e 2, porque $6 + 2 = 8$ e $6 \cdot 2 = 12$. Então, os zeros do trinômio são 6 e 2, e temos:

  $$x^2 - 8x + 12 = (x - 6) \cdot (x - 2)$$

  Podemos conferir a fatoração efetuando a multiplicação:

  $$(x - 6) \cdot (x - 2) = x^2 - 2x - 6x + 12 = x^2 - 8x + 12$$

- $x^2 + 8x + 12 = x^2 - \underbrace{(-8)}_{\text{soma}} \cdot x + \underbrace{12}_{\text{produto}}$

  Os dois números cuja soma é -8 e cujo produto é 12 são -6 e -2, porque $(-6) + (-2) =$ $= -8$ e $(-6) \cdot (-2) = 12$. Então, os zeros do trinômio são -6 e -2 e temos:

  $$x^2 + 8x + 12 = [x - (-6)] \cdot [x - (-2)] = (x + 6) \cdot (x + 2)$$

  Confira a fatoração efetuando a multiplicação.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

9. No caderno, forme uma equação de raízes:
a) 3 e 4; $x^2 - 7x + 12 = 0$ **b)** -2 e -5; $x^2 + 7x + 10 = 0$ **c)** -6 e 3; $x^2 + 3x - 18 = 0$ **d)** -3 e 6. $x^2 - 3x - 18 = 0$

10. No caderno, fatore cada trinômio a seguir. Confira se sua resposta está correta efetuando mentalmente a multiplicação.
a) $x^2 - 4x + 3$ $(x - 3) \cdot (x - 1)$
b) $y^2 + 11y + 24$ $(y + 8) \cdot (y + 3)$
c) $a^2 - 4a - 45$ $(a - 9) \cdot (a + 5)$
d) $t^2 - t - 12$ $(t - 4) \cdot (t + 3)$
e) $y^2 + 11y + 30$ $(y + 5) \cdot (y + 6)$
f) $x^2 - 10x + 24$ $(x - 4) \cdot (x - 6)$
g) $x^2 - 7x + 6$ $(x - 6) \cdot (x - 1)$
h) $y^2 + 4y - 5$ $(y + 5) \cdot (y - 1)$
i) $a^2 + a - 2$ $(a + 2) \cdot (a - 1)$
j) $t^2 + 7t - 8$ $(t + 8) \cdot (t - 1)$

11. No caderno, fatore o numerador e o denominador e simplifique a expressão algébrica em cada caso.
a) $\dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 6x + 8}$ $\dfrac{x + 2}{x - 4}$
b) $\dfrac{x^2 + 8x + 16}{x^2 + 10x + 16} \cdot \dfrac{x^2 - 64}{x^2 - 4x - 32}$ $\dfrac{x + 4}{x + 2}$

12. No caderno, resolva as equações.
a) $x^2 + 12x + 32 = 0$ -8 ou -4.
b) $x^2 - 12x + 32 = 0$ 8 ou 4.
c) $x^2 + 4x - 32 = 0$ -8 ou 4.
d) $x^2 - 4x - 32 = 0$ 8 ou -4.
e) $x^2 - 2x - 3 = 0$ 3 ou -1.
f) $x^2 - 16 = 0$ 4 ou -4.

13. Os lados de um quadrado têm medidas iguais à da altura de um triângulo de base medindo 20 cm. Se a medida de área do quadrado excede a do triângulo em 24 cm^2, responda no caderno: Quanto mede a altura do triângulo? 12 cm

Orientações didáticas

Atividades

As atividades desta seção têm por objetivo apresentar a resolução de equações polinomiais do 2º grau, por meio da fatoração.

Destacamos que na atividade **10** é feita a fatoração de cada trinômio.

Com a fatoração também é possível simplificar expressões algébricas, como é proposto na atividade **11**.

O objetivo da atividade **12** é resolver equações polinomiais do 2º grau. Nesse momento, incentive a resolução por meio da fatoração. Caso os estudantes apresentem dúvidas, retome os casos de fatoração e as etapas de resolução de uma equação. A verificação é uma etapa importante, que pode ter um papel decisivo, portanto, lembre-os de realizá-la.

A atividade **13** requer a montagem de uma equação polinomial do 2º grau para resolver o problema.

Proposta para o estudante

Para ampliar o estudo das equações polinomiais do 2º grau, sugira que os estudantes acompanhem as aventuras vividas pelos personagens do livro a seguir.

ROSA, E. *As mil e uma equações*. 10. ed. São Paulo: Ática, 2001.

Esta referência apresenta uma possibilidade de utilização desse livro para o estudo das equações.

MORAES, Ernani N. *O uso de multimeios no ensino de Matemática*, [*s.l.*], 2015. Disponível em: https://www.ime.usp.br/caem/anais_mostra_2015/arquivos_auxiliares/oficinas/Oficina15_Ernani.pdf. Acesso em: 13 maio 2022.

Orientações didáticas

O que são equações do 2º grau?

Na BNCC

Este capítulo auxilia no desenvolvimento das habilidades: **EF09MA03** e **EF09MA04**, quando se efetuam cálculos na resolução e elaboração de problemas com números reais; e **EF09MA09**, por possibilitar a utilização da fatoração de expressões algébricas para resolver e elaborar problemas representados por equações polinomiais do 2º grau. As questões propostas em Atividades mobilizam com maior ênfase a **CG08**, a **CG09**, a **CG10** e a **CEMAT03**, além do TCT *Educação Alimentar e Nutricional.*

Inicie este tópico explicando a seguinte diferença: em uma expressão algébrica, a letra representa a variável e, em uma equação, a letra representa a incógnita.

É importante que os estudantes possam percebam que os conteúdos vistos anteriormente são ampliados de modo gradativo e contínuo. Por isso, sugerimos que sejam retomadas situações apresentadas no capítulo anterior.

Sugerimos que durante a resolução da situação "À beira da quadra", você converse com os estudantes sobre a importância do pensamento geométrico para a compreensão desse e outros problemas. Ilustrar uma representação da quadra de futebol é uma estratégia que pode facilitar a compreensão do problema e, consequentemente, a escrita da equação que modela o problema e que deve ser resolvida.

Comente sobre a necessidade de 3 coeficientes para se ter uma equação completa: um que multiplica o quadrado da incógnita, outro que multiplica a incógnita e uma constante aditiva.

Equações do 2º grau

EF09MA03
EF09MA04
EF09MA09

O que são equações do 2º grau?

Ao resolver um problema por meio de uma equação, você escolhe a letra que vai representar a incógnita e é preciso explicar o que essa letra representa.

À beira da quadra

Em torno de uma quadra de futebol de salão de 15 m de medida do comprimento e 8 m de medida da largura, deseja-se deixar uma faixa de mesma largura em todos os lados.

A medida de área da quadra mais a medida de área da faixa deve totalizar 198 m². Qual deve ser a medida da largura da faixa?

Banco de imagens/Arquivo da editora

Se x representa a medida da largura da faixa em metros, a quadra com a faixa tem o formato de um retângulo com dimensões medindo, em metros, $15 + 2x$ e $8 + 2x$.

Então, devemos ter:

$$(15 + 2x) \cdot (8 + 2x) = 198$$
$$120 + 30x + 16x + 4x^2 = 198$$
$$4x^2 + 46x - 78 = 0$$

Podemos dividir todos os termos da equação por 2 para simplificá-la:

$$4x^2 + 46x - 78 = 0 \qquad (:2)$$
$$2x^2 + 23x - 39 = 0$$

Essa é a equação que nos diz a medida da largura, em metros, da faixa, que é o valor representado pela incógnita x. Nessa equação, o termo de maior grau tem grau 2; por isso, é chamada **equação do 2º grau**.

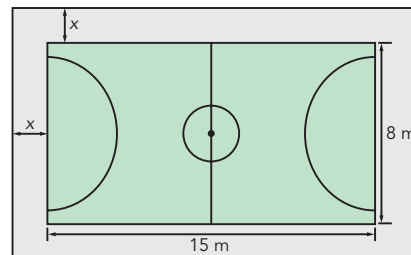
Chama-se equação do 2º grau na incógnita x toda equação que pode ser escrita como:

$ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são números reais e $a \neq 0$.

Uma equação do 2º grau é **completa** quando todos os coeficientes são não nulos.

Os números a, b e c são os coeficientes, e x é a incógnita.

Assim, na equação $2x^2 + 23x - 39 = 0$, temos:

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 23 \\ c = -39 \end{cases}$$

Resolvendo uma equação do 2º grau

Você estudou anteriormente que resolver uma equação significa determinar o(s) valor(es) que a satisfaz(em), ou seja, suas raízes.

> Um número é raiz (ou solução) de uma equação quando, colocado no lugar da incógnita, a equação se transforma em uma sentença verdadeira.

Por exemplo, na equação $3x^2 + 4x + 1 = 0$, trocando x por -1, obtemos:

$$3 \cdot (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 1 = 0$$
$$3 - 4 + 1 = 0$$

que é uma sentença verdadeira. Logo, -1 é raiz (ou solução) da equação.

Vamos ver alguns casos de resolução de equações do 2º grau.

1º caso: Quando o coeficiente b é igual a zero, ou seja, quando a equação tem a forma:

$$ax^2 + c = 0$$

Participe — Faça as atividades no caderno.

I. Na equação $4x^2 - 9 = 0$, temos $a = 4$, $b = 0$ e $c = -9$. Vamos determinar suas raízes.

1º modo: empregando fatoração.

a) Qual é a forma fatorada de $4x^2 - 9$? $(2x + 3) \cdot (2x - 3)$

b) Igualando os fatores a 0, que raízes encontramos? $-\frac{3}{2}$ e $\frac{3}{2}$.

2º modo:

a) Partindo de $4x^2 - 9 = 0$ e calculando x^2, quanto dá? $x^2 = \frac{9}{4}$

b) Quais são as raízes? $\frac{3}{2}$ e $-\frac{3}{2}$.

II. Sobre a equação $-2x^2 + 10 = 0$, responda:

a) Quais são os valores dos coeficientes a, b e c? $a = -2$, $b = 0$ e $c = 10$.

b) Calculando x^2, quanto dá? $x^2 = 5$

c) Quais são as raízes? $\sqrt{5}$ e $-\sqrt{5}$.

III. Sobre a equação $x^2 + 2 = 0$, responda:

a) Qual é o valor de x^2? $x^2 = -2$

b) Quais são as raízes? Nenhum número real elevado ao quadrado dá resultado negativo. Portanto, não há raiz real.

2º caso: Quando a equação do 2º grau tem coeficiente c igual a zero, temos a forma:

$$ax^2 + bx = 0$$

Exemplo

Na equação $3x^2 - 10x = 0$, temos $a = 3$, $b = -10$ e $c = 0$.

Verifique no primeiro membro que x é o fator comum, então, podemos colocá-lo em evidência:

$$x \cdot (3x - 10) = 0$$

Sabemos que o produto de números reais é zero somente se pelo menos um dos fatores for zero.

Então, se $x \cdot (3x - 10) = 0$, podemos concluir que:

$$x = 0 \text{ ou } 3x - 10 = 0$$

Ou seja, $x = 0$ ou $x = \frac{10}{3}$.

Portanto, as raízes da equação $3x^2 - 10x = 0$ são 0 e $\frac{10}{3}$.

3º caso: Quando podemos descobrir as raízes por meio da soma e do produto delas.

Orientações didáticas

Resolvendo uma equação do 2º grau

No boxe *Participe* é apresentado o 1º caso para se resolver uma equação do 2º grau incompleta, em que $b = 0$, e são discutidas diferentes estratégias que podem ser utilizadas para encontrar as raízes desse tipo de equação. Explore os procedimentos apresentados e proporcione momentos para discussão e compartilhamento de opiniões dos estudantes, incentivando, assim, a argumentação matemática.

Em seguida, é dado um exemplo do 2º caso, em que $c = 0$, para o qual serve a estratégia de fatoração da incógnita por fator comum; essa estratégia já foi utilizada no capítulo anterior.

O 3º caso trata da possibilidade de determinar as raízes considerando os valores da soma e do produto delas.

Proposta para o professor

Ao abordar a atividade **III** do *Participe*, explique que nem toda equação polinomial do 2º grau incompleta tem raízes reais. Caso você queira contextualizar o aparecimento de números complexos, indicamos o artigo:

MILIES, César P. A Emergência dos Números Complexos. *Revista do Professor de Matemática (RPM)*, São Paulo, v. 24, 1993. Disponível em: https://www.rpm.org.br/cdrpm/24/2.htm. Acesso em: 14 maio 2022.

Orientações didáticas

Resolvendo uma equação do 2º grau

Continuando este tópico, o boxe *Participe* traz questões com diversos exemplos de equações completas do 2º grau. Todas elas apresentam soluções inteiras, o que torna mais simples a escolha de valores candidatos a raízes para soma e produto. Essas diversas questões levam os estudantes a perceber de que maneira os sinais das raízes influenciam nos sinais da soma e do produto delas.

Os itens **f**, **i**, **m** e **n** contribuem para o desenvolvimento da argumentação matemática.

Atividades

O objetivo da atividade **1** é resolver equações polinomiais do 2º grau incompletas do tipo $ax^2 + c = 0$, sendo que $a = 0$, $c = 0$ e $b = 0$. Converse com os estudantes para que analisem e resolvam as equações usando uma das estratégias apresentadas. No item **c**, uma maneira de resolver é: a equação dada se transforma em $x^2 + 0x - \frac{25}{4} = 0$, a soma das raízes é 0, então as raízes são opostas. Como o produto é $-\left(\frac{5}{2}\right)^2$, as raízes são $\frac{5}{2}$ e o oposto, $-\frac{5}{2}$.

Após a resolução da atividade, verifique se os estudantes perceberam que se $a > 0$ e $c > 0$, então a equação incompleta não tem solução.

Participe — Faça as atividades no caderno.

No capítulo **5**, você estudou que uma equação que tem duas raízes de soma s e produto p é da forma: $x^2 - sx + p = 0$.

a) Na equação $x^2 - 6x + 5 = 0$, temos $s = 6$ e $p = 5$. Quais são os 2 números que têm soma 6 e produto 5? São 5 e 1, pois $5 + 1 = 6$ e $5 \cdot 1 = 5$.

b) Quais são as raízes da equação $x^2 - 6x + 5 = 0$? 5 e 1.

c) Confirme a resposta anterior substituindo as raízes na equação. $5^2 - 6 \cdot 5 + 5 = 25 - 30 + 5 = 0$ e $1^2 - 6 \cdot 1 + 5 = 1 - 6 + 5 = 0$

d) Na equação $x^2 + 9x + 18 = 0$, quanto vale s? E p? $s = -9$ e $p = +8$.

e) Para resultar em soma negativa e produto positivo, qual deve ser o sinal das duas raízes? Negativo.

f) Quais são as raízes da equação do item **d**? Por quê? -6 e -3, porque $(-6) + (-3) = -9$ e $(-6) \cdot (-3) = 18$.

g) Em $x^2 + 2x - 8 = 0$, quanto vale s? E p? $s = -2$ e $p = -8$.

h) Para ter produto negativo, as raízes devem ter sinais contrários. Se a soma é negativa, que raiz tem maior valor absoluto? A negativa.

i) Quais são as raízes da equação do item **g**? Por quê? -4 e 2, porque $(-4) + 2 = -2$ e $(-4) \cdot 2 = -8$.

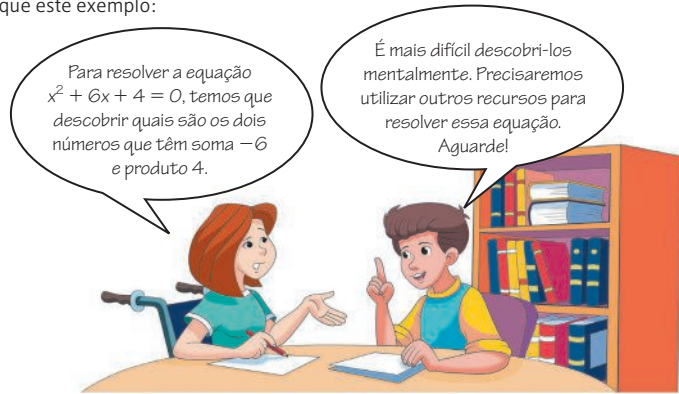
j) Confira a raiz negativa da equação $x^2 + 2x - 8 = 0$, substituindo-a na equação. $(-4)^2 + 2 \cdot (-4) - 8 = 16 - 8 - 8 = 0$

k) Em $x^2 - x - 20 = 0$, quanto vale s? E p? $s = 1$ e $p = -20$.

l) Quais são os sinais das raízes da equação do item anterior? Uma positiva e uma negativa.

m) Qual raiz da equação $x^2 - x - 20 = 0$ tem o maior valor absoluto? Por quê? Como a soma é positiva, a raiz positiva tem maior valor absoluto.

n) Quais são as raízes da equação $x^2 - x - 20 = 0$? Por quê? 5 e -4, porque $5 + (-4) = 1$ e $5 \cdot (-4) = -20$.

Verifique este exemplo:

Para resolver equações do 2º grau escritas como:

$$x^2 - sx + p = 0$$

procuramos descobrir dois números que têm soma s e produto p. Se determinarmos esses números, eles serão as raízes.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. No caderno, resolva as equações sendo x um número real.

a) $x^2 - 4 = 0$ -2 ou 2.

b) $x^2 = 9$ -3 ou 3.

c) $4x^2 - 25 = 0$ $-\frac{5}{2}$ ou $\frac{5}{2}$.

d) $9x^2 = 16$ $-\frac{4}{3}$ ou $\frac{4}{3}$.

e) $2 = x^2$ $-\sqrt{2}$ ou $\sqrt{2}$.

f) $-2x^2 + 5 = 0$ $-\sqrt{\frac{5}{2}}$ ou $\sqrt{\frac{5}{2}}$.

g) $x^2 + 1 = 0$ Não tem raízes reais.

h) $3x^2 = 2$ $-\sqrt{\frac{2}{3}}$ ou $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

i) $4x^2 = 100$ -5 ou 5.

j) $2x^2 + 11 = 0$ Não tem raízes reais.

Proposta para o professor

No seguinte artigo é apresentado um breve histórico das equações polinomiais do 2º grau, destacando o desenvolvimento dessa ferramenta ao longo do tempo, com os diversos métodos de resolução, desde os mais primordiais até a famosa fórmula geral de resolução.

PEDROSO, Hermes. A. Uma breve história da equação do 2º grau. *Revista Eletrônica de Matemática*, [*s. l.*], n. 2, 2010. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/122614/ISSN2177-5095-2010-02-01-13.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 14 maio 2022.

2. Para revestir uma parede de 9 m^2 de medida de área são necessários exatamente 400 azulejos quadrados. No caderno, responda: Quanto mede o lado do azulejo? 15 cm

Luigi Rocco/Arquivo da editora

3. Uma pessoa diagnosticada com sobrepeso apresenta um IMC igual a 28. Sabendo que essa pessoa tem 70 kg, responda no caderno: Qual é a medida de altura aproximada dela? Verifique a fórmula para o cálculo do IMC apresentada na abertura desta Unidade. Você sabe quais são os riscos de não tratar o sobrepeso e como evitá-lo? Aproximadamente 1,58 m. Resposta pessoal.

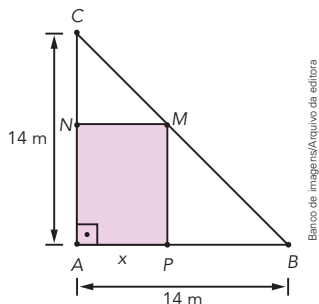
4. No caderno, resolva as equações sendo x um número real.

a) $x^2 - 2x = 0$ 0 ou 2.
b) $x^2 + 5x = 0$ 0 ou −5.
c) $3x^2 - x = 0$ 0 ou $\frac{1}{3}$.
d) $2x^2 + x = 0$ 0 ou $-\frac{1}{2}$.

5. No caderno, determine as raízes das equações por meio da soma e do produto. Confira mentalmente se estão corretas, substituindo-as na equação.

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$ 3 e 2.
b) $x^2 + 8x + 15 = 0$ −3 e −5.
c) $x^2 + 3x - 10 = 0$ −5 e 2.
d) $x^2 - \left(1+\sqrt{2}\right)x + \sqrt{2} = 0$ 1 e $\sqrt{2}$.

6. No caderno, responda: A que medida de distância de A deve ser marcado o ponto P, de modo que a parte retangular colorida tenha medida de área 48 m^2? 6 m ou 8 m.

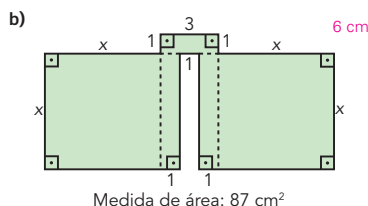
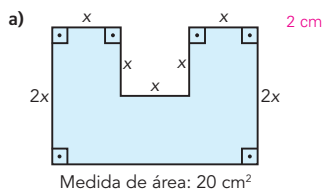
Banco de imagens/Arquivo da editora

7. Em cada caso, calcule no caderno o valor de x, sendo dada a medida de área da região colorida. Se possível, simplifique a equação.

a) 2 cm

Medida de área: 20 cm^2

b) 6 cm

Medida de área: 87 cm^2

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

8. Os 40 estudantes de uma turma sentam-se em n fileiras de carteiras, cada uma com $(n + 3)$ carteiras. No caderno, responda: Se não sobra carteira vazia, quantos estudantes há em cada fileira? 8 estudantes.

Orientações didáticas

Atividades

As atividades **2**, **3**, **6** a **8** apresentam problemas que demandam a montagem de equações para traduzi-los e, posteriormente, a resolução dessas equações por meio de uma das estratégias estudadas.

Na atividade **3** é possível retomar a discussão da abertura desta Unidade sobre o índice IMC e a importância de uma alimentação equilibrada e saudável. Verifique se, após a conversa inicial que tiveram, houve alguma mudança positiva de comportamento em relação à alimentação dos estudantes, valorizando, assim, o desenvolvimento do TCT *Educação Alimentar e Nutricional* e a **CG08**, a **CG09** e a **CG10**. Não tratar o sobrepeso pode gerar a obesidade, que é uma porta para outras doenças, como aumento da pressão arterial, dos níveis de colesterol e triglicerídeos sanguíneos e resistência à insulina. Para evitar o sobrepeso, é recomendada a prática regular de atividades físicas e dieta equilibrada.

As atividades **4** e **5** propõem a resolução de equações do 2º grau completas e incompletas para a resolução.

No item **c** da atividade **4**, uma maneira de resolver é: a equação dada se transforma em $x^2 - \frac{1}{3}x + 0 = 0$, o produto das raízes é 0, então uma das raízes é nula. Como a soma é $-\frac{1}{3}$, a outra raiz é $-\frac{1}{3}$.

Além disso, nas atividades **6** e **7**, é possível consolidar e ampliar a resolução de problemas que envolvem a unidade temática Álgebra articulada a outro campo da Matemática, como a Geometria, mobilizando a **CEMAT03**.

Na atividade **8**, verifique se os estudantes percebem que o valor negativo de n não serve como solução, pois se trata de quantidade de fileiras de carteiras, ou seja, um número natural.

Orientações didáticas

Completando quadrados

Antes de realizar a resolução do exemplo, pergunte aos estudantes: "Quais são os 2 números que, adicionados, resultam em -6 e, multiplicados, resultam em $+4$?". O objetivo é mostrar que há situações em que nem sempre é fácil obter as raízes usando esse método.

Para continuar com essa discussão, proponha outros exemplos similares, como: $x^2 + 10x - 11 = 0$ ou $x^2 - 4x - 21 = 0$.

Depois, resolva na lousa o exemplo apresentado no livro, explicando cada etapa do procedimento. Incentive a representação geométrica como estratégia para a compreensão da técnica algébrica apresentada.

Atividades

Este bloco de atividades tem por objetivo consolidar e ampliar a resolução de equações polinomiais do 2º grau completas. Incentive a resolução das equações usando a técnica algébrica de completar os quadrados. Caso os estudantes apresentem dúvidas, faça a correção na lousa retomando os procedimentos considerados.

Destacamos a atividade **11**, na qual os estudantes precisam demonstrar que não existem 2 números reais cuja soma seja 4 e cujo produto seja 5. Proponha que essa atividade seja realizada em duplas de estudantes e, depois, disponibilize um momento para que compartilhem os resultados obtidos. Incentive a argumentação matemática, valorizando o desenvolvimento da **CG09**, da **CG10**, da **CEMAT02** e da **CEMAT03**.

Completando quadrados

Quais são os 2 números que têm soma -6 e produto 4? São as raízes da equação $x^2 + 6x + 4 = 0$.

É difícil descobri-los mentalmente. Por isso, resolveremos essa equação empregando uma técnica algébrica que denominamos **completar quadrados**. Você se recorda dos trinômios quadrados perfeitos? Pois então, vamos utilizá-los aqui:

- $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$
- $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

Note:

$$x^2 + 6x + 4 = 0$$
$$x^2 + 6x = -4$$
$$x^2 + 6x + \square = -4 + \square$$

Quanto devemos adicionar a ambos os membros para que tenhamos, no 1º membro, um trinômio quadrado perfeito?

$$x^2 + 6x + \square$$

Será um quadrado perfeito se for igual a:

$$(x + \square)^2$$

que, desenvolvido, resulta em $x^2 + 2\square x + \square^2$.

Compare os polinômios:

Eles serão idênticos se $2\square = 6$, logo $\square = 3$ e $\square^2 = \square = 9$.

Podemos também usar uma interpretação geométrica. Verifique a figura.

Medida de área colorida: $x^2 + 6x$.

Para completar o quadrado, precisamos adicionar a medida de área do quadradinho de lado de medida 3.

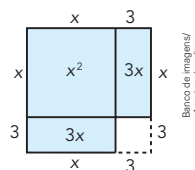
x, 3, x², 3x, 3x, x, 3, 3

Banco de imagens/Arquivo da editora

Voltemos à nossa equação:

$$x^2 + 6x + 9 = -4 + 9$$
$$(x + 3)^2 = 5$$
$$x + 3 = \pm\sqrt{5}$$
$$x = -3 \pm\sqrt{5}$$

Assim, os 2 números que têm soma -6 e produto 4 são $-3 + \sqrt{5}$ e $-3 - \sqrt{5}$. Vamos conferir?

$$(-3 + \sqrt{5}) + (-3 - \sqrt{5}) = -3 + \cancel{\sqrt{5}} - 3 - \cancel{\sqrt{5}} = -6 \text{ e}$$
$$(-3 + \sqrt{5}) \cdot (-3 - \sqrt{5}) = (-3)^2 - (\sqrt{5})^2 = 9 - 5 = 4$$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

9. No caderno, resolva as equações completando quadrados e simplificando a resposta sempre que possível.

a) $x^2 + 6x + 2 = 0$ $-3 \pm \sqrt{7}$

b) $x^2 - 10x + 14 = 0$ $5 \pm \sqrt{11}$

c) $x^2 - 2x - 2 = 0$ $1 \pm \sqrt{3}$

d) $x^2 + 4x - 16 = 0$ $-2 \pm 2\sqrt{5}$

10. Dois números têm soma 4 e produto 2. No caderno, responda: Quais são eles? $2 + \sqrt{2}$ e $2 - \sqrt{2}$.

11. No caderno, prove que não existem dois números reais que tenham soma 4 e produto 5.
A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

A fórmula de Bhaskara

Ainda não respondemos ao problema "À beira da quadra", do início deste capítulo: a medida da largura da faixa, em metros, é raiz da equação $2x^2 + 23x - 39 = 0$.

Vamos partir da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$:

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$ax^2 + bx = -c$$

Multiplicamos os dois membros por $4a$:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

Completamos o quadrado do 1º membro:

$$\begin{array}{ccccccccc} \underbrace{4a^2x^2} & + & \underbrace{4abx} & + & \square & = & -4ac & + & \square \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ (2ax)^2 & & 2 \cdot 2ax \cdot b & & b^2 & & & & b^2 \end{array}$$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$$
$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

Caso $b^2 - 4ac$ seja negativo, a equação não tem raízes reais. Caso $b^2 - 4ac$ seja positivo, podemos extrair sua raiz quadrada. Assim:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \Rightarrow 2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Daí resulta a fórmula a seguir, conhecida no Brasil como **fórmula de Bhaskara**.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Na fórmula de Bhaskara, o número $b^2 - 4ac$ é muito importante e, por isso, tem o próprio nome: é chamado **discriminante** da equação e é simbolizado pela letra grega Δ (lê-se "delta").

$$b^2 - 4ac = \Delta$$

Portanto, a fórmula também pode ser escrita assim:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Resumindo:

- Quando $\Delta > 0$, a equação admite duas raízes reais distintas;
- Quando $\Delta = 0$, a equação admite uma raiz real;
- Quando $\Delta < 0$, a equação não admite raiz real.

Agora, vamos calcular a medida da largura da faixa.

Em $2x^2 + 23x - 39 = 0$, temos $a = 2$, $b = 23$ e $c = -39$. Então:

$$\Delta = b^2 - 4ac = 23^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-39) = 529 + 312 = 841$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-23 \pm \sqrt{841}}{2 \cdot 2} = \frac{-23 \pm 29}{4}$$

Orientações didáticas

A fórmula de Bhaskara

Sugerimos que a generalização da fórmula de Bhaskara, partindo da ideia de completar quadrados, seja feita na lousa. Explique cada etapa realizada na demonstração. Converse com os estudantes sobre a importância da Álgebra, propiciando a construção de uma expressão que permite calcular as raízes de uma equação polinomial do 2º grau, sejam elas completas ou incompletas.

Após a definição de discriminante, há um resumo sobre a quantidade de soluções reais que uma equação admite em função do valor do discriminante.

Por fim, o problema da abertura do capítulo é resolvido. É muito importante mostrar aos estudantes que, apesar da garantia algébrica de haver 2 soluções reais distintas, por se tratar de um problema prático, a solução negativa não pôde ser considerada.

Proposta para o professor

Sugerimos a leitura do seguinte artigo, em que são apresentados relatos bibliográficos e algumas obras de Al-Khwarizmi.

IQARAISLAM. Conheça a obra de Al-Khwarizmi, o Pai da Álgebra. Disponível em: https://iqaraislam.com/conheca-a-obra-de-al-khwarizmi-o-pai-da-algebra. Acesso em: 14 maio 2022.

Orientações didáticas

Atividades

As atividades **12** a **14** trabalham com a resolução de equações polinomiais do 2º grau completas. Em caso de dúvidas dos estudantes, detalhe a resolução dessas equações, retomando cada passo do método proposto.

Já as atividades **15** e **16** têm por objetivo consolidar e ampliar a resolução de problemas envolvendo equações polinomiais do 2º grau, em diferentes contextos. Abordam o conceito de média aritmética e conceitos geométricos atrelados à Álgebra, buscando o desenvolvimento de habilidades que permitem resolver problemas que possam ser representados por equações desse tipo.

Também há uma proposta de o próprio estudante elaborar um problema que necessite de uma equação do 2º grau para sua resolução. Isso favorece a autonomia e amplia a compreensão da conexão entre o conteúdo matemático e o cotidiano do estudante.

1ª raiz: $x_1 = \frac{-23 + 29}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

2ª raiz: $x_2 = \frac{-23 - 29}{4} = \frac{-52}{4} = -13$

A equação tem duas raízes, $\frac{3}{2}$ e -13. Como queremos a medida da largura da faixa (um valor positivo), então ela só pode ser a raiz positiva, $\frac{3}{2}$ (ou 1,5). Portanto, a largura da faixa mede 1,5 m.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

12. No caderno, aplique a fórmula de Bhaskara para resolver as equações a seguir.

a) $2x^2 + 7x + 3 = 0$ $-\frac{1}{2}$ ou -3.

b) $x^2 - 9x + 19 = 0$ $\frac{9 \pm \sqrt{5}}{2}$

13. Em cada item, no caderno, faça o que se pede.

a) O que ocorre com as 2 raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, caso se tenha $b^2 - 4ac = 0$? Tornam-se iguais (é a mesma raiz).

b) Resolva a equação $x^2 - 8x + 16 = 0$. 4

c) Resolva a equação $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

14. No caderno, responda: Quantas raízes reais tem a equação $x^2 + 2x + 4 = 0$? Nenhuma.

15. Maria Clara é a irmã mais velha de Maria Isabel. As idades de Maria Clara e Maria Isabel têm média aritmética 12,5 anos e média geométrica 12 anos.

No caderno, responda: Quantos anos Maria Clara tem a mais do que Maria Isabel? 7 anos.

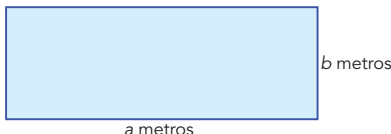
Prostock-Studio/Stockphoto/Getty Image

Maria Clara e a irmã Maria Isabel.

16. A figura retangular a seguir tem 0,8 m² de medida de área e 4,2 m de medida de perímetro.

Banco de imagens/Arquivo da editora

b metros

a metros

a) Quanto vale o produto $a \cdot b$? 0,8 m²

b) Quanto vale a soma $a + b$? 2,1 m

c) a e b são raízes de qual equação do 2º grau? $x^2 - 2{,}1x + 0{,}8 = 0$

d) Sendo $a > b$, é possível determinar os valores de a e b? Sim, $a = 1{,}6$ m e $b = 0{,}5$ m.

17. Escolha um contexto e, no caderno, elabore e resolva um problema em que, para solucioná-lo, seja necessário resolver uma equação do 2º grau. Exemplo de resposta: Tenho material suficiente para fazer 54 m de cerca. Preciso cercar um terreno retangular com 180 m² de medida de área. Quanto devem medir os lados do cercado? Resposta: 15 m e 12 m.

18. Determine dois números inteiros e consecutivos tais que a soma de seus quadrados seja 85. 6 e 7 ou −6 e −7.

Soma e produto das raízes

Em uma equação como $x^2 - 8x + 15 = 0$, já sabemos que a soma das raízes é 8 e que o produto delas é 15. Usamos esse dado para descobrir as raízes (5 e 3) sem precisar recorrer à fórmula de resolução.

Em uma equação como $5x^2 - 7x - 6 = 0$, será que podemos descobrir a soma e o produto das raízes antes de resolvê-la?

Proposta para o estudante

Proponha aos estudantes que assistam ao vídeo indicado na referência. Ele traz um panorama histórico em torno de equações quadráticas que passa por hindus, mesopotâmios, gregos, árabes e europeus, mostrando diferentes métodos de resolução até a famosa fórmula de Bhaskara. Para finalizar a atividade, proponha uma roda de conversa para que os estudantes compartilhem suas impressões sobre o vídeo.

ESSE tal de Bhaskara. Campinas, 2012. 1 vídeo (12 min). Publicado pelo canal M3 Matemática Multimídia. Disponível em: https://youtu.be/pozKHQxvFSo. Acesso em: 14 maio 2022.

A resposta é sim. Como na equação $x^2 - sx + p = 0$ o coeficiente a é 1, começamos dividindo a equação dada por 5 e obtemos outra equação, $x^2 - \frac{7}{5}x - \frac{6}{5} = 0$, que tem as mesmas raízes. Logo, a soma das raízes é $\frac{7}{5}$, e o produto é $-\frac{6}{5}$.

Dada uma equação do 2º grau, $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, dividindo-a por a obtemos: $x^2 + \underbrace{\frac{b}{a}}_{-s}x + \underbrace{\frac{c}{a}}_{p} = 0$.

Como essas equações têm as mesmas raízes, podemos concluir que:

> A **soma das raízes** é $-\frac{b}{a}$.
>
> O **produto das raízes** é $\frac{c}{a}$.

Vamos confirmar? Pela fórmula de Bhaskara, as raízes são:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Calculemos a soma:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \cancel{\sqrt{\Delta}} - b - \cancel{\sqrt{\Delta}}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Agora, calculemos o produto:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{\left(-b + \sqrt{\Delta}\right)}{2a} \cdot \frac{\left(-b - \sqrt{\Delta}\right)}{2a} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{\cancel{b^2} - \cancel{b^2} + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Em $5x^2 - 7x - 6 = 0$, temos $a = 5$, $b = -7$ e $c = -6$. Então:

soma $\rightarrow$ $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-7)}{5} = \frac{7}{5}$ produto $\rightarrow$ $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{(-6)}{5} = -\frac{6}{5}$

Mesmo conhecendo a soma e o produto das raízes, muitas vezes é difícil descobri-las, não é? Por isso, a fórmula de Bhaskara é imprescindível.

Agora, verifique esta equação: $x^2 - 4x + 6 = 0$.

soma das raízes $\rightarrow s = 4$ produto das raízes $\rightarrow p = 6$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 16 - 24 = -8$$

Como sabemos, quando $\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

19. No caderno, dê a soma e o produto das raízes de cada equação, sem resolvê-las.

a) $3x^2 + 5x + 2 = 0$ $s = -\frac{5}{3}$; $p = \frac{2}{3}$

b) $2x^2 + 11x - 1 = 0$ $s = -\frac{11}{2}$; $p = -\frac{1}{2}$

c) $9x^2 - 7x + 1 = 0$ $s = \frac{7}{9}$; $p = \frac{1}{9}$

d) $7x^2 - 5x - 3 = 0$ $s = \frac{5}{7}$; $p = -\frac{3}{7}$

20. Sendo p e q as raízes da equação $x^2 - x - 2 = 0$, no caderno, calcule o valor de $(p + q)^{5pq}$. $1^{-10} = 1$

21. Sendo x_1 e x_2 as raízes da equação $5x^2 - 2x - 3 = 0$, no caderno, calcule o valor de cada uma das expressões.

a) $x_1 + x_2$ $\frac{2}{5}$

b) $x_1 \cdot x_2$ $-\frac{3}{5}$

c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ $-\frac{2}{3}$

d) $(1 + x_1) \cdot (1 + x_2)$ $\frac{4}{5}$

Orientações didáticas

Soma e produto das raízes

Sugerimos que seja explorado o pensamento algébrico, usando a linguagem algébrica para desenvolver o processo de generalização da relação entre as raízes e os coeficientes de uma equação polinomial do 2º grau. Proponha um momento para que os estudantes possam manifestar suas conclusões ou dúvidas sobre o procedimento de demonstração algébrica, valorizando a argumentação matemática e, caso necessário, refaça a demonstração.

Explique que, muitas vezes, conhecer a soma e o produto das raízes não é suficiente para determiná-las, por isso recorremos à fórmula de Bhaskara. A dificuldade de se obter essas raízes ocorre quando elas não são números inteiros, e em situações mais complicadas, quando as raízes não são números racionais.

Atividades

Um destaque especial deve ser mencionado para a atividade **21**. Esse tipo de manipulação algébrica é de enorme utilidade na resolução de equações algébricas mais complexas a serem estudadas no final do Ensino Médio.

Orientações didáticas

Educação financeira

Na BNCC

Esta seção favorece o trabalho com o TCT *Educação Financeira*, ao abordar poupança e outros investimentos financeiros e ao propor a reflexão sobre as próprias ações, percebendo que cada uma delas, mesmo que simples, pode gerar consequências para si e para outro, bem como consequências imediatas ou que refletirão no futuro. A proposta da seção mobiliza a **CEMAT08**, ao propor a prática de pesquisa e a interação entre os estudantes na discussão das questões propostas.

O objetivo desta seção é apresentar o passo a passo de uma atividade de pesquisa bibliográfica, para que os estudantes compreendam conceitos relacionados a investimentos financeiros, ensinando-os a pesquisar e a produzir conhecimento.

A seção inicia com uma discussão sobre *fake news*. Nos anos anteriores, os estudantes realizaram pesquisas bibliográficas como a que aqui é proposta e foram alertados a buscar informações em fontes confiáveis (livros, artigos de revista e de jornal, disponibilizados por instituições de estudo reconhecidas, centros de pesquisa e universidades) para não serem vítimas de notícias falsas. Agora, é apresentado um exemplo desse tipo de notícia no mercado financeiro. Essa abordagem mobiliza a **CG07**, ao permitir que os estudantes interajam criticamente com as informações.

Questione os estudantes sobre os conhecimentos prévios referentes ao tema proposto e discuta sobre a frase “Para poupar, não tem idade!”. É importante que eles entendam que esse assunto não é apenas para os adultos.

A metodologia de pesquisa bibliográfica apresentada tem como estrutura: introdução, desenvolvimento, conclusão e referências bibliográficas. A definição do tema e do objetivo estão contemplados na introdução; a busca de informações, a leitura e o registro das informações fazem parte do desenvolvimento da pesquisa. Na conclusão, o pesquisador pode expressar o que aprendeu com a pesquisa. No texto final, devem ser incluídas as referências bibliográficas.

Oriente os estudantes a anotarem as referências utilizadas no trabalho de pesquisa. Explique o modo como as referências devem ser anotadas, segundo orientação de uma norma da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) e, por isso, devem seguir um padrão, como expresso no Livro do Estudante.

O tema de pesquisa desta atividade é “Modos de poupar?”. No entanto, como esse tema é amplo, propomos questões específicas que têm a função de auxiliar no entendimento dos conceitos e favorecer a construção do conhecimento.

A proposta é que os estudantes façam a pesquisa individualmente, seguindo as etapas da estrutura metodológica. Auxilie-os no entendimento e desenvolvimento dessas etapas.

Em um segundo momento, ao finalizarem a pesquisa bibliográfica, os estudantes devem reunir-se em pequenos grupos para debater as demais questões. A finalidade desse debate é compartilhar e consolidar conhecimentos obtidos com a pesquisa.

Educação financeira

Prática de pesquisa

Cuidado com dinheiro fácil

As *fake news* são notícias e informações falsas que são compartilhadas como se fossem reais e verdadeiras. As pessoas propagam informações falsas para aplicar golpes, muitas vezes com intuito de ganhar algum dinheiro. No mercado financeiro não é diferente, por isso desconfie de notícias apelativas, com senso de urgência ou bombásticas. Cuidado com promessas impossíveis, que garantem altos retornos com investimentos de baixos valores, em um curto tempo.

Não são raras propagandas que envolvem valores em dinheiro. Mas a promessa de grandes ganhos com pouco risco ou esforço pode ser, muitas vezes, *fake news*.

Poupar e investir são coisas parecidas, mas diferentes. Para auxiliar no entendimento do significado e das maneiras de poupar, precisamos pesquisar sobre esse tema. O tipo de pesquisa que faremos é a **pesquisa bibliográfica**, que é uma maneira de pesquisar na qual buscamos informações sobre o tema a ser investigado em textos, livros, artigos, *sites*, etc., que chamamos de **fontes de informação**. Essas devem ser confiáveis, ou seja, buscadas em instituições de estudo reconhecidas, como centros de pesquisa e universidades, podendo assim ser comparadas, observando a data de publicação, para se ter informações atuais sobre o assunto e não sermos enganados por *fake news*.

Para realizar a pesquisa bibliográfica, você deve seguir uma metodologia de pesquisa composta das etapas a seguir.

Introdução: texto curto com a definição do tema, a questão de pesquisa e o objetivo.

Desenvolvimento: busca das informações que se relacionam com o tema da pesquisa em fontes confiáveis (é importante anotar essas fontes consultadas), seguida da leitura e interpretação dos textos encontrados, destacando as ideias principais neles contidas e registrando, com as próprias palavras, as informações obtidas.

Conclusão: elaboração de uma conclusão argumentada e justificada e apresentação dos resultados da pesquisa por meio de texto, cartaz, infográfico, vídeo, história em quadrinhos, *podcast*, etc.

Referências bibliográficas: lista das fontes consultadas e utilizadas na pesquisa no seguinte padrão:

Para poupar, não tem idade! Algumas crianças ainda utilizam cofrinhos como meio de poupar mesada ou valores que ganham em alguma data especial.

Para livro: [SOBRENOME DO AUTOR], [Nome do autor]. [*Título do livro*]. [edição, se houver]. [Cidade]: [Editora], [ano da publicação]. ([Nome da coleção, se houver]).

Para artigo de revista: [SOBRENOME DO AUTOR], [nome do autor]. [Título do artigo]. [*Nome da revista*], [Cidade]: [Editora], [ano da publicação]. [volume], [número da publicação], [número da(s) página(s)].

Para artigo de jornal: [SOBRENOME DO AUTOR], [Nome do autor]. [Título do artigo]. [*Nome do jornal*], [número da(s) página(s)], [dia mês e ano da publicação].

Para texto da internet (em geral): [SOBRENOME DO AUTOR], [Nome do autor]. [Título do artigo]. [*Nome do* site], [dia, mês e ano da publicação, se houver]. Disponível em: [URL]. Acesso em: [dia, mês e ano].

As imagens não estão representadas em proporção.

Agora, inicie seu projeto de pesquisa bibliográfica.

Tema da pesquisa: Modos de poupar.

Como este tema é amplo, propomos que você busque informações sobre as seguintes **questões específicas** para orientar a construção de uma pesquisa completa. As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

I. O que é poupar e quais as vantagens de se fazer isso?

II. Como funciona a poupança? Qual é o rendimento e o risco desse tipo de investimento?

III. Quais são os principais títulos públicos oferecidos (conhecidos também como Tesouro Direto), quais suas rentabilidades e qual é o risco desse tipo de aplicação financeira?

IV. Como podemos investir em imóveis por meio de fundos de imobiliários? Qual é a rentabilidade e o risco desses fundos?

V. O que significa uma ação de uma empresa? Como investir em ações? Qual é a rentabilidade e o risco desse tipo de investimento?

Lembre-se de que realizar um trabalho de pesquisa bibliográfica não significa "copiar e colar" textos da internet. Você deve compreender as ideias principais, interpretar e reescrever o texto e/ou responder às questões, utilizando as próprias palavras, sem perder o sentido original do texto.

Apresentação dos resultados

Agora que você já conhece alguns modos de poupar, reúna-se com 3 colegas para fazer o que se pede nas seguintes questões:

1. Debatam as respostas obtidas no item **I**.
2. Façam um comparativo de todos os tipos de investimento que vocês pesquisaram, com especial atenção às rentabilidades.
3. Já estudamos que o aumento percentual é dado pela expressão:

$$\text{aumento percentual} = \left(\frac{(\text{valor novo}) - (\text{valor antigo})}{(\text{valor antigo})} \times 100\right)\%$$

Calculem o aumento percentual das duas frases que apareceram no início desta seção e comparem com as rentabilidades da resposta da questão anterior.

4. Agora, avaliando os retornos prometidos pelos anúncios do início da seção, como vocês argumentariam que eles podem ser enganosos a uma pessoa que tem intenção de fazer esses "investimentos"?

Agora que você realizou a pesquisa e discutiu alguns conceitos sobre o tema com os colegas, ainda em grupo, apresentem os resultados da pesquisa por meio de um *podcast*.

De maneira aprofundada, o *podcast* deverá conter a orientação sobre o que é e como poupar. Por isso, vocês devem utilizar todas as informações que obtiveram com as questões específicas e, também, com as questões que foram discutidas no grupo. Ao final do *podcast*, não deixem de citar as fontes de informação consultadas, que são as referências bibliográficas.

Acompanhe algumas dicas para criar o *podcast*.

- Defina os participantes que irão falar na gravação.
- Escreva um roteiro para o *podcast*.
- Faça ensaios.
- Faça a gravação em um ambiente sem ruídos.
- Edite o *podcast*. Depois da edição, ele estará pronto para ser publicado.
- Alguns *softwares* gratuitos permitem a gravação e edição de *podcasts* (Audacity e Spreaker, por exemplo).

Hub Design/Shutterstock

backUp/Shutterstock

Proposta para o professor

A publicação a seguir relata uma pesquisa desenvolvida com estudantes em que se objetivou apresentar possibilidades de fomentar a Educação Financeira para despertar a formação de habilidades e saberes teórico-práticos fundamentais para a compreensão dos aspectos relacionados ao controle financeiro.

MAGATÃO, J. A. S. *Poupar e investir*: a educação financeira e a qualidade de vida – 2016. Programa de Desenvolvimento Educacional, Secretaria de Educação do Estado do Paraná. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2016/2016_pdp_mat_utfpr_jaciraaparecidadasilvamagatao.pdf. Acesso em: 14 maio 2022.

Orientações didáticas

Educação financeira

A apresentação dos resultados da pesquisa deve ser feita por meio de instrumentos de aprendizagem que permitam que os estudantes demonstrem o que aprenderam, desenvolvendo habilidades de argumentação em apresentação oral e escrita e em debate. Essa produção final envolve a gravação de um *podcast* contemplando os resultados da pesquisa. A produção dessa mídia nesta seção visa a comunicação com diferentes públicos sobre o tema proposto, principalmente com adolescentes e adultos jovens, favorecendo as culturas juvenis.

Para auxiliar na elaboração de um *podcast*, sugerimos o Audacity, que é um *software* de código aberto para gravação, edição e tratamento de áudio. É intuitivo e de fácil utilização. Neste *link*, encontra-se um tutorial para utilização: https://www.techtudo.com.br/dicas-e-tutoriais/noticia/2012/02/como-usar-o-audacity.html (acesso em: 13 jun. 2022).

Reserve um momento da aula para que os estudantes possam ouvir os *podcasts* dos demais grupos e compartilhar experiências e informações.

Outras referências bibliográficas que podem ser utilizadas para o desenvolvimento da pesquisa estão relacionadas a seguir.

BAGNO, Marcos. *Pesquisa na escola*: o que é como se faz. São Paulo: Edições Loyola, 2007.

BRASIL. Banco Central do Brasil. *Caderno de Educação Financeira – Gestão de Finanças Pessoais*. Brasília: BCB, 2013. 72 p. Disponível em: https://www.bcb.gov.br/content/cidadaniafinanceira/documentos_cidadania/Cuidando_do_seu_dinheiro_Gestao_de_Financas_Pessoais/caderno_cidadania_financeira.pdf. Acesso em: 28 abr. 2022.

BRASIL. Poupança: Guardar dinheiro permite a realização de muitos sonhos. Aprenda a construir seu pé de meia. *Estratégia Nacional de Educação Financeira*. Disponível em: https://www.vidaedinheiro.gov.br/en/portfolio/poupanca/?doing_wp_cron=1656856485.7322070598602294921875. Acesso em: 28 abr. 2022.

JOYCE, Carla. Conta Poupança: O que é e como funciona. *Serasa Ensina*. Disponível em: https://www.serasa.com.br/ensina/suas-economias/conta-poupanca-o-que-e/. Acesso em: 26 abr. 2022.

UNIFOR. *Educação financeira*: saiba como poupar desde cedo pode ajudar no futuro. 4 out. 2021. Disponível em: https://unifor.br/web/empreender/educacao-financeira-saiba-como-poupar-desde-cedo-pode-ajudar-no-futuro. Acesso em: 28 abr. 2022.

Orientações didáticas

Na mídia

Esta seção apresenta informações sobre a quantidade de alimentos que são desperdiçados todos os dias, segundo dados de uma pesquisa feita pela Organização das Nações Unidas (ONU).

Sugerimos que, em duplas, os estudantes façam uma leitura atenciosa do texto. Depois, converse com eles sobre a relação entre a quantidade de alimentos desperdiçados e a quantidade de refeições que poderiam ser oferecidas para as milhões de pessoas do planeta. Proponha uma discussão em classe para identificar mudanças em hábitos de consumo dos estudantes que ajudariam na redução desse desperdício.

Desperdício de alimentos e impacto ambiental

O planeta desperdiça ▨ mil caminhões com 40 toneladas de alimentos todos os dias, indicou uma recente pesquisa da Organização das Nações Unidas (ONU). O relatório que engloba 54 países mostrou que, em 2019, foram para o lixo 931 milhões de toneladas de alimentos nas residências, no varejo, nos restaurantes e em outros serviços de alimentação. Os dados não levaram em conta etapas como produção no campo, armazenagem e distribuição.

"Essa quantidade seria suficiente para oferecer três refeições por dia para as 690 milhões de pessoas em insegurança alimentar do planeta. Nós temos alimentos suficientes, esse não é o problema", afirmou Daniel Balaban, representante do Brasil do Programa Mundial de Alimentos (*World Food Programme*, na sigla em inglês), a maior organização humanitária do mundo.

O Índice de Desperdício de Alimentos 2021, produzido pelo Programa das Nações Unidas para o Meio Ambiente (PNUMA) e pela ONG britânica WRAP, integra os esforços das agências da ONU para reduzir pela metade o desperdício de alimentos até 2030.

A pesquisa mostrou que, em nível global, 121 quilos de alimentos *per capita*, em média, são desperdiçados por consumidores por ano nas etapas de varejo e consumo de alimentos, sendo 74 quilos em casa. [...]

[...]

Conscientização é chave, diz oficial da ONU Meio Ambiente

Clementine O'Connor, oficial de programas de Sistemas Alimentares Sustentáveis do PNUMA, diz que governos investiram em campanhas de conscientização e mudança de comportamento – ajudando os consumidores a reforçar hábitos de gestão de alimentos eficientes, como aproveitar melhor sobras alimentos, medir o tamanho das porções de arroz e massas, usar produtos mais velhos primeiro e congelar os excedentes.

O'Connor afirmou que essas medidas fizeram países como Reino Unido e Holanda reduzirem o desperdício total de alimentos nas famílias em 24% em uma década. [...]

Ben Nelms/Reuters/Fotoarena

Quantidade de alimento desperdiçado

BERALDO, Paulo. Mundo desperdiça 63 mil caminhões de alimentos a cada 24 horas. *Estadão*, São Paulo, 18 mar. 2021. Disponível em: https://internacional.estadao.com.br/noticias/geral,mundo-desperdica-63-mil-caminhoes-de-alimentos-a-cada-24-horas,70003651079. Acesso em: 12 abr. 2022.

1. Em 2019, foram para o lixo 931 milhões de toneladas de alimentos. Calcule quantos caminhões com 40 t de alimentos são desperdiçados por dia nos países pesquisados e descubra o número inteiro que deve substituir ▨. 64
2. Considerando a quantidade de alimentos *per capita* desperdiçada, de acordo com o texto, e levando em conta que a população mundial em 2019 era de 7,75 bilhões de pessoas, quantos milhões de toneladas de alimento foram desperdiçadas em casa em 2019? Quantos por cento do total do desperdício? 573,5 milhões; 61,16%.
3. Cite alguns hábitos que podem contribuir para diminuir a quantidade de alimentos desperdiçados em casa. Resposta pessoal.

Proposta para o estudante

Nesta notícia são apresentados dados relacionados ao desperdício de alimentos no mundo, em etapas de produção de alimentos, além de sugerir ações que podem minimizar a ocorrência de desperdício.

CROPLIFE Brasil. *Desperdício de alimentos no mundo*: o problema também é nosso. Disponível em: https://croplifebrasil.org/noticias/desperdicio-de-alimentos-no-mundo-o-problema-tambem-e-nosso/. Acesso em: 14 maio 2022.

Na Unidade

Faça as atividades no caderno.

1. **(Vunesp)** A figura representa um canteiro retangular, cujas medidas de comprimento e de largura, em metros, são, respectivamente, $x + \sqrt{16}$ e $x - \sqrt{16}$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Para que esse canteiro tenha área de 48 m^2, o valor de x deverá ser igual a: Alternativa **b**.

a) 10 **c)** 7
b) 8 **d)** 6

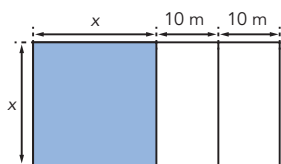
2. Uma escrivaninha é coberta por um vidro retangular de medida de área 1,28 m^2. Se a medida do comprimento do vidro é o dobro da medida da largura, então a medida de perímetro, em metros, é igual a: Alternativa **d**.

a) 2,40. **c)** 3,60.
b) 3,20. **d)** 4,80.

3. **(Saresp)** A equação $(x - 3) \cdot (x - 2) = 0$ é a forma fatorada de: Alternativa **b**.

a) $x^2 - 6 = 0$. **c)** $x^2 + 5x + 6 = 0$.
b) $x^2 - 5x + 6 = 0$. **d)** $2x - 5 = 0$.

4. **(Embraer-SP)** A um terreno quadrado, de lado x, foram anexadas duas regiões retangulares congruentes, conforme mostra a figura, formando um terreno retangular de área igual a 800 m^2.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Nessas condições, é correto afirmar que a medida do lado do terreno quadrado original, indicada por x na figura, é, em metros, igual a: Alternativa **c**.

a) 36. **c)** 20.
b) 30. **d)** 18.

5. A equação $(x + 5) \cdot (x + 9) = 2x + 5$ admite:

a) duas raízes reais positivas. Alternativa **d**.
b) duas raízes reais negativas.
c) apenas uma raiz real.
d) nenhuma raiz real.

6. Sabendo que a equação $x^2 + bx + 3 = 0$ admite raízes reais e que b é um inteiro de 1 a 10, quantas são as possibilidades para b? Alternativa **d**.

a) Duas. **c)** Cinco.
b) Três. **d)** Sete.

7. Respectivamente, a soma e o produto das raízes da equação $(x + 1) \cdot (x + 2) = 8x + 16$ são:

a) -3 e 2. **c)** 5 e -14. Alternativa **c**.
b) -5 e 14. **d)** -5 e -14.

8. A média aritmética e a média geométrica das raízes da equação $x^2 - 10x + 16 = 0$ são raízes de qual equação? Alternativa **c**.

a) $x^2 - 5x + 4 = 0$
b) $x^2 + 5x + 4 = 0$
c) $x^2 - 9x + 20 = 0$
d) $x^2 + 9x + 20 = 0$

9. **(Fuvest-SP)** A equação $x^2 - x + c = 0$, para um conveniente valor de c, admite raízes iguais a: Alternativa **d**.

a) -1 e 1. **c)** 1 e -3.
b) 0 e 2. **d)** -1 e 2.

10. **(Unesp-SP)** Um grupo de x professores se reuniu em um restaurante para comemorar o final do ano letivo. A conta, no valor de R$ 720,00, seria inicialmente dividida entre todos, e cada um pagaria y reais. Depois, decidiu-se que três professores, que aniversariavam naquela semana, não deveriam pagar.

Assim, cada um dos demais contribuiu com mais R$ 40,00 e a conta foi paga. A equação que permite calcular corretamente o número de professores desse grupo é: Alternativa **c**.

a) $x^2 + 4x - 54 = 0$.
b) $x^2 - 4x + 68 = 0$.
c) $x^2 - 3x - 54 = 0$.
d) $x^2 + 3x + 54 = 0$.

Orientações didáticas

Na Unidade

Na BNCC

Esta seção favorece o desenvolvimento das habilidades exploradas ao longo de toda a Unidade e mobiliza com maior ênfase a **CEMAT02**, a **CEMAT06** e a **CG02** ao propor a resolução de atividades diversas por meio de diferentes contextos e estratégias de resolução.

Esta seção traz atividades dos principais conteúdos abordados na Unidade que podem ser utilizadas como ferramentas de avaliação. Proponha a resolução das atividades individualmente. Acompanhe os estudantes durante a realização delas e registre avanços e dificuldades para, ao final, propor novas atividades para remediação coletiva ou individual de defasagens, conforme cada caso.

A seguir, listamos algumas sugestões e estratégias para remediação.

Para verificar se os estudantes conseguem resolver equações polinomiais do 2º grau em um contexto estritamente matemático, indicamos as atividades **3** e **5** a **9**.

As atividades **1**, **2** e **4** são problemas que devem ser modelados e resolvidos por equações polinomiais do 2º grau articulando os campos da Matemática: Álgebra, Geometria e Grandezas e medidas. Na atividade **1**, os estudantes devem perceber que a raiz negativa encontrada não serve como solução por se tratar de medida de comprimento.

A atividade **10** está relacionada à divisão de despesas de uma conta de restaurante entre um grupo de professores, com condicionantes específicos. O problema de encontrarmos o número de professores no evento é corretamente descrito por uma equação do 2º grau.

Erros nessas atividades indicam que os estudantes não compreenderam a tradução de um problema em linguagem matemática por meio da montagem de uma equação. Ou não compreenderam os métodos de resolução de equações polinomiais do 2º grau. Essas dificuldades demandam retomadas dos conteúdos resolvendo exemplos.

Outras dificuldades diferentes das listadas podem surgir; por isso, é importante o monitoramento individual e contínuo dos estudantes.

Orientações didáticas

Abertura

Na BNCC

A abertura da Unidade desenvolve com maior ênfase a **CG07**, por permitir argumentar e analisar informações promovendo a consciência socioambiental e o consumo responsável em diversas esferas da vida em sociedade. Mobiliza o TCT *Educação Ambiental*, ao propor uma discussão envolvendo o uso de combustíveis fósseis e o impacto ambiental causado.

Promova uma leitura inferencial do texto em conjunto com os estudantes, e busque fazer pausas para explorar os conteúdos do texto.

No primeiro e no segundo parágrafos, o texto trata de identificar o que são combustíveis fósseis, apresentar exemplos de situações em que eles são utilizados. Muitos dos combustíveis mencionados não são necessariamente de uso comum em diversas partes do Brasil, por exemplo, o querosene. Pergunte aos estudantes: "Quais desses combustíveis listados vocês identificam como sendo utilizados em nosso dia a dia?"; "E quantos litros, de cada combustível, vocês estimam que sejam utilizados em um dia?". Lembre-se que o Gás Liquefeito de Petróleo (GLP), gás armazenado em botijões, é um subproduto do petróleo, enquanto o gás encanado normalmente é o gás natural. Busque estimar com os estudantes quanto cada família utiliza de gás, seja GLP ou gás natural, mensalmente, e quais os preços associados. Levante eventuais vantagens do uso de cada tipo de gás.

Proporcionalidade e Matemática financeira

NESTA UNIDADE VOCÊ VAI:

- resolver e elaborar problemas que envolvem a razão de grandezas de mesma espécie e de grandezas de espécies diferentes;
- identificar grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais;
- resolver e elaborar problemas que envolvem proporção e regra de três composta;
- compreender e realizar cálculos de juros simples e sua relação com a economia (compras, gastos, vendas a prazo, entre outros);
- resolver e elaborar problemas que envolvem porcentagens sucessivas aplicadas na economia.

CAPÍTULOS

Poluição vista no céu do município de São Paulo. Foto de 2021.

Combustíveis fósseis ficam no passado

Combustíveis fósseis são substâncias produzidas a partir de um processo de decomposição de seres vivos, que ocorre em camadas subterrâneas da terra durante milhões de anos. Essas substâncias são chamadas de combustíveis por serem utilizadas como fonte de energia por meio da combustão.

Os combustíveis fósseis mais utilizados no planeta são o petróleo, o gás natural e o carvão mineral. O petróleo é encontrado abaixo de regiões que são ou que já foram cobertas por mares, e seus usos são diversos, como na produção de gasolina, parafina, querosene e óleo diesel. O gás natural é encontrado em formações rochosas subterrâneas e é utilizado como combustível em indústrias e automóveis. O carvão mineral é encontrado em regiões de baixa temperatura ou clima temperado e é utilizado em siderúrgicas e usinas termoelétricas para produção de energia.

Em contrapartida a todas essas vantagens dos combustíveis fósseis, é preciso mencionar que a sua ampla utilização no mundo tem sido algo prejudicial para o meio ambiente. A sua queima para a produção de energia emite grande quantidade de dióxido de carbono (CO_2), um dos gases responsáveis pela poluição e pelo aquecimento global. O problema é que a indústria, principalmente a automobilística, é baseada e dependente dessa fonte de energia, representando cerca de 75% da demanda mundial de energia.

Líderes do mundo todo, como Ursula von Leyne, eleita presidente da Comissão Europeia em 2019, e António Gueterres, que em 2017 se tornou secretário geral da ONU, propuseram o fim dos combustíveis fósseis com ações como a utilização de veículos elétricos e o desenvolvimento de biocombustíveis sustentáveis.

Aliado ao crescente aumento do preço da gasolina atrelado ao aumento do dólar ocasionado por fatores econômicos decorrentes da pandemia de covid-19, se faz cada vez mais necessário e prudente o uso de transportes alternativos, como bicicletas, caminhadas e transportes públicos para a preservação do meio ambiente.

Fontes dos dados: VICENZO, Giacomo. O que são combustíveis fósseis e como viveremos sem eles no futuro próximo? *Ecoa UOL*, [*s. l.*], 28 set. 2021. Disponível em: https://www.uol.com.br/ecoa/ultimas-noticias/2021/09/28/o-que-sao-combustiveis-fosseis-e-como-viveremos-sem-eles-no-futuro-proximo.htm.

GASOLINA nas alturas: até quando o preço do combustível vai subir? *G1*, [*s. l.*], 25 out. 2021. Disponível em: https://g1.globo.com/economia/noticia/2021/10/25/gasolina-nas-alturas.ghtml. Acesso em: 9 jan. 2022.

Quais outras vantagens o uso de transportes alternativos pode trazer além da preservação do meio ambiente citada no texto? Analise os deslocamentos feitos por você e sua família e proponha ações de substituição por transportes menos poluentes. Compartilhe com os colegas. Resposta pessoal. Exemplo de resposta: O uso de transportes alternativos pode contribuir para a qualidade de vida da família, tanto financeira, por representar uma economia mensal, quanto relacionada à saúde e ao bem-estar, por provocar o aumento dos exercícios físicos.

Orientações didáticas

Abertura

No terceiro parágrafo são comentadas algumas desvantagens do uso de combustíveis fósseis, e sua principal desvantagem é a emissão de dióxido de carbono (CO_2). Questione os estudantes se, no trajeto diário até a escola, eles utilizam combustíveis fósseis de maneira direta ou indireta e se eles entendem que seria possível reduzir ou excluir esse uso sem prejuízos pessoais. Esses questionamentos remetem à pergunta ao final do texto sobre o uso de transportes alternativos. As respostas são pessoais, mas há a possibilidade de estimar, por exemplo, quanto tempo de economia de passagem ou combustível compensariam, por exemplo, a compra de uma bicicleta. Busque pensar nas vantagens indiretas também, como a possibilidade de realizar atividades físicas ao fazer substituições nas matrizes de transporte.

É possível explorar o TCT *Educação Ambiental* e propor um trabalho interdisciplinar com os componentes curriculares **Ciências** e **Geografia**. Uma sugestão é propor ações para a resolução de um problema de natureza social e ambiental. Além de desenvolver a argumentação fundamentada em dados científicos, estimula a autonomia e contribui para o desenvolvimento da cidadania.

Pode-se propor pesquisas sobre a matriz energética brasileira e sobre matrizes alternativas e renováveis que sejam compartilhadas em aula, valorizando temas de sustentabilidade associados aos TCTs *Saúde* e *Educação Ambiental*. A **CG08** e a **CG10** são mobilizadas ao se trabalhar o autocuidado, a responsabilidade e a tomada de decisões embasadas em sustentabilidade.

Proposta para o professor

Caso você queira ampliar as discussões sobre o transporte público, indicamos a referência a seguir, em que é proposto o investimento em maneiras alternativas de transporte coletivo, que não utilizem combustíveis fósseis. Pode-se questionar se, no município onde fica a escola, é discutida a redução na emissão de gases que causam o efeito estufa.

ONU. COP26: transporte livre de combustíveis fósseis e propostas para texto final. *ONU News*. 2021. Disponível em: https://news.un.org/pt/story/2021/11/1770042. Acesso em: 27 maio 2022

Orientações didáticas

Razão e proporção

Na BNCC

Este capítulo favorece o desenvolvimento das habilidades: **EF09MA07**, ao propor a resolução de problemas envolvendo razão entre 2 grandezas de espécies diferentes, como velocidade e densidade demográfica; **EF09MA08**, ao propor a resolução e elaboração de problemas envolvendo 2 ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas.

Coleções de todo tipo fazem parte da cultura juvenil. Embora antigamente fosse um hábito mais masculino, hoje em dia o interesse por futebol é bem mais generalizado, principalmente em momentos de Copa do Mundo de Futebol. Busque reconhecer os interesses dos estudantes, seja pelo futebol em si, seja pelo hábito de fazer coleções.

A situação proposta neste tópico traz uma reflexão sobre a relação da quantidade de figurinhas já coladas diante do total de figurinhas contidas no álbum e a relação entre a quantidade de figurinhas que faltam para completar o álbum diante de sua quantidade total. Essas perguntas ocorrem antes da conceituação e da revisão teórica sobre o tema, porém isso é justamente a oportunidade de fazer uma avaliação diagnóstica sobre como os estudantes são capazes de embasar suas respostas. É esperado que alguns consigam expor o pensamento de maneira mais formalizada do que outros, mas que, em geral, haja algumas abordagens menos diretas. Dê tempo para que respondam às perguntas e, então, anote as respostas na lousa se atentando não apenas para o número final, mas também para o raciocínio utilizado.

Razão entre grandezas de mesma espécie

Estruture o conceito de razão como indicado no livro, e estabeleça que, no caso de grandezas de mesma espécie, não é esperado um resultado com unidade de medida. Peça para que os estudantes anotem termos desconhecidos citados ao longo da explicação. Aqui é possível supor que uma parte dos estudantes não se lembre exatamente do significado dos termos “razão” e “quociente”. Anote ou diga

CAPÍTULO 7

Relações entre grandezas

EF09MA07
EF09MA08

Razão e proporção

O álbum de figurinhas

O ano de 2018 foi marcado por ter sido ano de Copa do Mundo de Futebol masculino, na qual a seleção da França sagrou-se campeã. Popularmente, em anos de Copa do Mundo, uma das febres que atingem jovens e adultos é colecionar figurinhas dos jogadores.

Aldo é um desses colecionadores e, por ocasião da Copa citada, queria completar seu álbum, com um total de 682 figurinhas. Algumas semanas antes de começar a Copa, ele tinha 244 figurinhas coladas. Em relação ao total, qual é a fração de figurinhas coladas no álbum? Qual é a fração de figurinhas faltantes em relação ao total?

kojala/Shutterstock

Capa do álbum da Copa do Mundo de Futebol 2018.

Razão entre grandezas de mesma espécie

Como já estudamos, grandeza é tudo aquilo que pode ser medido, utilizando números e unidades de medida, e a razão entre 2 números positivos a e b é o quociente da divisão do primeiro pelo segundo, indicado pela fração $\frac{a}{b}$.

A razão entre grandezas de mesma espécie é o mesmo que a razão entre os números que expressam suas medidas em uma mesma unidade de medida.

- Voltando ao problema de Aldo, a fração representada pelo número de figurinhas coladas em relação ao total de figurinhas é $\frac{244}{682}$. Em outras palavras, a razão entre o número de figurinhas coladas e o número total de figurinhas é $\frac{244}{682}$.
- Como $682 - 244 = 438$, faltam 438 figurinhas para que Aldo possa completar seu álbum. A razão entre o número de figurinhas que faltam e o total é dada pela fração $\frac{438}{682}$.

A razão entre grandezas de mesma espécie é um número sem unidade de medida.

Razão entre grandezas de espécies diferentes

O censo demográfico de Piracicaba

Verifique a estimativa, em 2021, da população e a medida de área total da cidade de Piracicaba, localizada no interior do estado de São Paulo, de acordo com o IBGE.

Área e população de Piracicaba

Medida de área territorial*	População estimada
1 378 km²	410 275 habitantes

*Dados aproximados.

Fonte dos dados: IBGE. *Cidades e Estados* – Piracicaba. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/cidades-e-estados/sp/piracicaba.html. Acesso em: 18 abr. 2022.

seus significados e incentive o uso dos termos formais adequados ao contexto.

Razão entre grandezas de espécies diferentes

Este tópico apresenta o conceito de densidade demográfica, abrindo assim a oportunidade de trabalhar a habilidade **EF09MA07**. Nela se estabelece o uso da razão no trato de grandezas de espécies diferentes, originando assim uma unidade de medida composta. No caso de uma razão, a medida que será originada irá auxiliar na compreensão qualitativa do conceito. No caso da densidade demográfica, a unidade é o número de habitantes por área, o que indica que o seu objetivo é estabelecer a distribuição populacional em determinada região. Questione com os estudantes o que significa também o fato de o resultado ser expresso como um valor decimal, já que não existe 0,73 pessoa. Pergunte: “O que isso significa nesse contexto específico?”. Levante as respostas e forme um consenso baseado nos argumentos dos estudantes. Essa abordagem favorece a argumentação matemática fundamentada em dados científicos e estimula o raciocínio lógico.

Com esses dados, um estudante do 9º ano pretende determinar a densidade demográfica dessa cidade. A densidade demográfica é uma medida que expressa a razão entre a população e a medida de área do território.

Sendo DD: densidade demográfica, P: população total (em número de habitantes) e A: medida de área da região (em km²), a densidade demográfica é dada por: $DD = \frac{P}{A}$.

Para a cidade de Piracicaba, temos:

$$P = 410\,275 \text{ habitantes}$$

$$A = 1\,378 \text{ km}^2$$

$$DD = \frac{410\,275 \text{ habitantes}}{1\,378 \text{ km}^2} \simeq 297{,}73 \text{ hab./km}^2$$

Como interpretar esse valor? Ele nos indica que para cada km² de medida de área há cerca de 298 habitantes.

A razão entre grandezas de espécies diferentes é a razão entre os números que expressam suas medidas acompanhados das respectivas unidades.

Proporção

Note que as razões $\frac{5}{2}$ e $\frac{25}{10}$ são ambas iguais a 2,5 e, portanto, são iguais entre si.

Recordemos que 2 razões iguais formam uma proporção.

Por ser verdadeira a igualdade $\frac{5}{2} = \frac{25}{10}$, também dizemos que os números 5 e 25 são diretamente proporcionais aos números 2 e 10, nessa ordem.

Em $\frac{5}{2} = \frac{25}{10}$ o fator de proporcionalidade é 2,5.

Recorde também que há outra maneira de comprovar a igualdade $\frac{5}{2} = \frac{25}{10}$: fazendo as multiplicações cruzadas: $5 \cdot 10 = 50$ e $2 \cdot 25 = 50$.

A proporção $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$, com a' e b' não nulos, é verdadeira quando $a \cdot b' = a' \cdot b$.
Esta é chamada de **propriedade fundamental da proporção**.

a' lê-se: "a linha";
b' lê-se: "b linha".

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. Verifique os dados a seguir, fornecidos pelo IBGE, relativos a 2021:

Área e população de algumas cidades brasileiras

Cidade	Medida de área territorial*	População estimada
Carneirinho - MG	2 063 km²	10 103 pessoas
Ribeirão Preto - SP	651 km²	720 116 pessoas
Curitiba - PR	435 km²	1 963 726 pessoas
Manaus - AM	11 401 km²	2 255 903 pessoas

*Dados aproximados.

Fonte dos dados: IBGE. *Cidades e Estados*. Disponível em: https://www.ibge.gov.br/cidades-e-estados/. Acesso em: 18 abr. 2022.

a) Determine a densidade demográfica em Carneirinho (MG). 4,9 hab./km²

b) Determine a densidade demográfica em Ribeirão Preto (SP). 1 106,2 hab./km²

c) Determine a densidade demográfica em Curitiba (PR). 4 514,3 hab./km²

d) Determine a densidade demográfica em Manaus (AM). 197,9 hab./km²

e) Em qual cidade a quantidade de habitantes por km² é maior? Justifique.
Curitiba, pois a densidade demográfica dessa cidade é maior do que a das outras.

Orientações didáticas

Proporção

Destaque a diferença conceitual entre razão e proporção. Duas razões, se iguais, estabelecem uma proporção. Questione os estudantes sobre os motivos para que na formalização do conceito tanto de razão quanto de proporção, os denominadores devem ser não nulos. O desejado com essa pergunta é avaliar conhecimentos prévios gerais da matemática básica que podem ter eventualmente ficado confusos entre os estudantes. Isso estabelece uma cultura matemática de pensar de modo ativo nos conceitos que vêm sendo apresentados, mesmo que não sejam o foco da Unidade.

Ao longo da Unidade, lembre-se de utilizar a expressão "propriedade fundamental da proporção", pois isso organiza os conceitos e permite que os estudantes façam consultas sobre o tema em seus cadernos ou na internet.

Atividades

A atividade **1** está voltada para a aplicação do conceito de razão, em que, a partir da leitura da tabela construída com informações do IBGE, é possível estabelecer a **densidade demográfica** de cada um dos locais indicados. Aproveite esse momento para verificar competências de matemática básica e observe eventuais dificuldades envolvendo divisão com números racionais.

Aproveite o item **e** para discutir sobre a diversidade demográfica do Brasil.

Orientações didáticas

Atividades

Na atividade **2** é apresentado o conceito de **velocidade média** como sendo a taxa de variação do espaço percorrido (deslocamento) em relação ao tempo utilizado para isso. Apesar de a atividade não deixar explícito, espera-se a resposta na unidade de medida km/h, que deve fazer parte da resposta correta.

Aproveite para apoiar o desenvolvimento do conteúdo na linguagem materna, estabelecendo que a ordem com que as grandezas aparecem no texto está associada à ordem com que aparecem na razão. A primeira grandeza mencionada é aquela que aparece no numerador, e a segunda, a que aparece no denominador de determinada razão. A mesma ideia vale para a unidade de medida, em que, por exemplo, km/h indica que a razão foi necessariamente do espaço em relação ao tempo.

Na atividade **3** é preciso analisar se foi mantida a proporção entre café e leite, necessariamente nessa ordem. Sendo a primeira razão de 10 litros de café por 7,5 litros de leite, teremos a razão de $\frac{10}{7,5} = \frac{4 \cdot 2,5}{3 \cdot 2,5} = \frac{4}{3}$. Na segunda etapa da resolução, teremos $\frac{4}{3,5}$, que claramente não resulta em uma fração irredutível igual a $\frac{4}{3}$. Repare aqui que a abordagem utilizada consiste em simplificar os termos, não necessitando assim alcançar o valor da divisão, que por sinal é uma dízima periódica, cujo formato é inadequado para lidar com quantidades realísticas e finitas e ainda mais para realizar comparações.

Proponha a mesma abordagem para as atividades **4** e **5**.

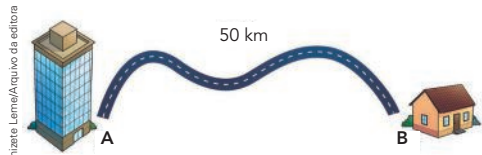
As atividades **6** e **7** privilegiam a interdisciplinaridade com o componente curricular **Geografia**, bem como leva para os estudantes oportunidades para que conheçam as opiniões e os saberes de seus colegas.

Na atividade **6**, faça com a turma a leitura e interpretação das informações identificando as cidades no mapa, medindo as distâncias etc.

Na atividade **7**, valorize a prática de pesquisa proposta no item **b**, mostrando a importância das matrizes africanas e seu legado na culinária e nas danças baianas bem como as matrizes europeias e seu legado na culinária e nas danças gaúchas.

As imagens não estão representadas em proporção.

2. Em Física, define-se velocidade média como a razão entre 2 grandezas: deslocamento e tempo. Note a figura a seguir.

Tiago Donizete Leme/Arquivo da editora

Sabendo que uma família leva cerca de 30 minutos (ou 0,5 hora) para fazer um deslocamento completo do prédio **A** até a casa **B**, determine a medida de velocidade média nesse percurso. 100 km/h

3. Em uma cafeteria, para preparar um *cappuccino*, são necessários 10 litros de uma mistura de cafés para cada 7,5 litros de leite. Sabendo que, em certo dia, um funcionário preparou os *cappuccinos* do dia utilizando 4 litros da mistura de cafés para 3,5 litros de leite, pode-se afirmar que a proporção entre os ingredientes foi mantida? Justifique sua resposta. Não; o exemplo de justificativa de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

4. Em um supermercado de atacado, um consumidor pode comprar arroz em 3 diferentes embalagens.

Preço do arroz

Embalagem	Medida de massa	Preço
1	1 kg	R$ 3,50
2	3 kg	R$ 9,90
3	10 kg	R$ 31,50

Dados elaborados para fins didáticos.

Se o cliente deseja pagar o valor mais barato do arroz a cada quilograma, qual embalagem é a mais econômica? Embalagem 3.

5. O quilate do ouro de uma peça é a razão entre a medida de massa de ouro presente e a medida de massa total da peça multiplicada por 24. Responda:

a) Uma peça feita da mistura de 6 gramas de ouro e 2 gramas de outro metal é uma peça de ouro de quantos quilates? 18 quilates.

b) Em um anel de ouro de 18 quilates, qual é a razão entre as medidas de massa de ouro e de massa total do anel? $\frac{3}{4}$

c) Quantos por cento de ouro há em um anel de ouro de 18 quilates? 75%

d) Um anel de ouro puro é um anel de quantos quilates? 24 quilates.

6. A escala de um mapa é a razão entre as medidas de distância no mapa e as medidas de distância reais correspondentes dos referenciais considerados. No mapa dado, um segmento de reta medindo 2 cm representa uma distância real que mede 1 250 km.

Determine a escala desse mapa.

A escala é 1 : 62 500 000.

Brasil: político

Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte: IBGE. *Atlas geográfico escolar*. 8. ed. Rio de Janeiro: IBGE, 2018. p. 90.

7. Sobre o mapa da atividade anterior, faça o que se pede:

a) Se a medida da distância entre Porto Alegre (RS) e Salvador (BA) é 2 300 km, quanto Porto Alegre dista de Salvador em centímetros no mapa? 3,68 cm

b) Você conhece uma dança ou comida típica dos municípios citados? Pesquise e compartilhe oralmente com os colegas. Resposta pessoal.

Prática de pesquisa

Divisão proporcional

Um problema prático frequente é dividir um todo em partes proporcionais a números conhecidos. Comecemos recordando que:

Os números da sucessão *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, ... são **diretamente proporcionais** aos números da sucessão *a'*, *b'*, *c'*, *d'*, *e'*, ..., todos não nulos, quando:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} = \frac{e}{e'} = \ldots$$

O valor desses quocientes é chamado de **fator de proporcionalidade**.

Exemplo

Érika compartilha seu *tablet* com os filhos Nuno e Nicole. Todos os dias, Nuno e Nicole podem usar o aparelho para jogar *games* durante 2 horas, medida de tempo que é dividida entre eles em partes diretamente proporcionais à idade deles. Nuno tem 11 anos e Nicole, 13. Quantos minutos por dia Nuno pode ficar com o *tablet*? E Nicole?

Para responder, precisamos dividir a medida de tempo 2 h, portanto 120 min, em 2 partes de medidas *a* e *b*, proporcionais a 11 e 13. Desse modo:

$$\begin{cases} a + b = 120 \\ \dfrac{a}{11} = \dfrac{b}{13} \end{cases}$$

Sendo *k* o fator de proporcionalidade, de $\frac{a}{11} = \frac{b}{13} = k$ decorre $a = 11k$ e $b = 13k$. Então:

$$a + b = 120 \Rightarrow 11k + 13k = 120 \Rightarrow 24k = 120 \Rightarrow k = \frac{120}{24} \Rightarrow k = 5$$

Logo: $\begin{cases} a = 11 \cdot 5 = 55 \\ b = 13 \cdot 5 = 65 \end{cases}$

Nuno pode ficar 55 minutos com o *tablet* e Nicole, 65 minutos.

Lembre-se de que os números *a* e *b* são inversamente proporcionais aos números *p* e *q*, nessa ordem, se o produto $a \cdot p$ for igual ao produto $b \cdot q$.

10. Exemplo de resposta: Ari, Bernardo e Carla trabalham na secretaria de uma escola e seus salários somam R$ 6.460,00. Ari trabalha 5 horas por dia, Bernardo, 6 e Carla, 8. Determine quanto ganha cada um sabendo que os salários são proporcionais ao número de horas de trabalho. Resposta: Ari ganha R$ 1.700,00; Bernardo, R$ 2.040,00 e Carla, R$ 2.720,00.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

8. Pedro e Paulo compraram um terreno de 720 m^2 de medida de área e pretendem dividi-lo em 2 lotes, um para cada um deles, de medidas de área proporcionais ao que cada um contribuiu para o pagamento. Se Pedro contribuiu com R$ 5.000,00 e Paulo com R$ 3.000,00, qual deve ser a medida de área de cada lote? Pedro 450 m^2; Paulo 270 m^2.

9. Mônica, Renato e Roberto montaram uma empresa de assistência técnica de eletrônicos, investindo cada um R$ 2.000,00, R$ 3.000,00 e R$ 4.000,00, respectivamente. Após um ano de trabalho, a empresa apresentou um lucro de R$ 37.800,00 a ser dividido entre os 3 em partes proporcionais ao investimento de cada um deles. Qual é o valor que cada um vai receber? Mônica R$ 8.400,00; Renato R$ 12.600,00; Roberto R$ 16.800,00.

10. Elabore um problema que possa ser resolvido pelo sistema a seguir e que envolva divisão proporcional. Depois, troque-o com um colega para que ele resolva o problema que você elaborou enquanto você resolve o problema elaborado por ele.

$$\begin{cases} a + b + c = 6\,460 \\ \dfrac{a}{5} = \dfrac{b}{6} = \dfrac{c}{8} \end{cases}$$

11. Lara e Marco montaram um quebra-cabeça de 400 peças. O número de peças que cada um colocou é inversamente proporcional aos números 11 e 9, respectivamente. Quantas peças cada um deles colocou? Lara 180 peças; Marco 220 peças.

Proposta para o professor

Para mais informações sobre cuidados com a saúde de crianças e adolescentes em relação ao excesso de telas, segue a publicação:

VARELLA, M. Crianças, Adolescentes e o excesso de telas. *DRAUZIO*. 2021. Disponível em: https://drauziovarella.uol.com.br/coluna-2/criancas-adolescentes-e-o-excesso-de-telas-coluna/. Acesso em: 30 maio 2022.

Orientações didáticas

Divisão proporcional

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA08**, ao propor a resolução e elaboração de problemas envolvendo a divisão de um todo em partes proporcionais.

É comum relacionar grandezas com um fator de proporcionalidade, tanto para escrever as razões em sucessão quanto para futuramente estabelecer ideias como a de coeficiente angular de uma reta, ou em Física e Química com grandezas naturais. É comum o uso da letra *k* para representar esse fator de proporcionalidade, que deve ser uma constante, porém, não é obrigatório seu uso.

O texto inicialmente aborda uma problemática cotidiana sobre o uso saudável de um aparelho eletrônico. É possível alinhar esse contexto com os TCTs *Saúde* e *Educação para o Consumo*, pois, durante o uso de um *tablet* ou celular, a pessoa está sendo constantemente abordada sobre a compra ou o consumo de diversos tipos de produtos e serviços. Aproveite este momento para conhecer os hábitos de seus estudantes em relação a aparelhos eletrônicos. Isso mobiliza a **CG08**, ao exercer o cuidado com a saúde física. Reflita com estudantes se o tempo que Nuno e Nicole ficam com os aparelhos é plausível para jogar *videogames*, estimulando assim o exercício da argumentação ao se posicionar em relação a um tema.

Atividades

Na atividade **8**, deve-se tomar a soma das medidas de área como sendo 720 m², e sua distribuição proporcional a R$ 5.000,00 e R$ 3.000,00 para obter o fator de proporcionalidade. Nesse caso e em muitos outros, o uso do valor representado como uma fração é uma maneira que pode auxiliar os estudantes na resolução de problemas, bem como é o que possibilita o letramento matemático, por utilizar um número representado na forma fracionária e seu significado como uma razão entre 2 grandezas.

A mesma abordagem pode ser utilizada nas atividades **9** e **10**. Elaborar e resolver um problema como na atividade **10** contribui para o desenvolvimento do pensamento computacional.

Na atividade **11** é preciso apenas tomar o cuidado de lembrar que, no caso de grandezas inversamente proporcionais, o fator de proporcionalidade se dá por meio da multiplicação entre as grandezas, porém, a maneira de resolver é análoga.

Orientações didáticas

Grandezas diretamente proporcionais

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA08**, ao propor a resolução e elaboração de problemas envolvendo 2 grandezas diretamente proporcionais, em contextos diversos.

Uma cozinha pode ser laboratório para a aplicação dos conteúdos envolvendo proporcionalidade. Permite inclusive uma abordagem transdisciplinar, e a possibilidade de adentrar ao TCT *Trabalho*, caso algum dos estudantes ou seus familiares tenham ocupações relacionadas à cozinha, atividade que se tornou extremamente comum como alternativa informal no período de isolamento social. É possível também, de acordo com a receptividade dos estudantes e as situações apresentadas por eles, falar sobre o papel da mulher na sociedade, já que a personagem do texto é justamente uma mulher confeiteira, e, dessa maneira, levantar *insights* sobre a composição da nossa sociedade com relação ao assunto, afinal há uma sobressalência de homens como *chefs* famosos, apesar de a cozinha ser considerada historicamente um local feminino.

O gráfico da quantidade de ovos em relação à quantidade de fatias de bolo é o início do estudo de reta e coeficiente angular, porém nesse momento essa ideia não deve ser ainda formalizada, apenas induzida e adaptada ao contexto. Ele pode ajudar a esclarecer e retomar a diferença entre incógnita e variável, pois aqui é possível observar que, caso se esteja livre para variar a quantidade de ovos, pode-se variar a quantidade de fatias de bolo produzidas.

Grandezas diretamente proporcionais

Receita de bolo

Uma confeitaria é especializada em bolos de aniversário e de casamento. Luana, a confeiteira-chefe, desenvolveu uma receita para a massa e a compartilhou com os demais funcionários. Com essa receita, para um bolo de 20 fatias são necessários 4 ovos além dos outros ingredientes.

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Para atender a uma encomenda de bolo de 250 fatias, quantos ovos serão necessários?

No problema dado temos 2 situações:

1ª) para um bolo de 20 fatias, gastam-se 4 ovos;

2ª) para um bolo de 250 fatias, x ovos.

Queremos determinar o valor de x.

Dobrando-se o número de fatias de bolo, vai dobrar o número de ovos necessários. Triplicando-se o número de fatias, vai triplicar o número de ovos. Então, conforme estudamos em anos anteriores, o número de ovos é uma grandeza diretamente proporcional ao número de fatias de bolo. Assim, a razão $\frac{\text{número de ovos}}{\text{número de fatias}}$ é constante.

$$\frac{x}{250} = \frac{4}{20} \Rightarrow 20 \cdot x = 250 \cdot 4 \Rightarrow x = \frac{250 \cdot 4}{20} \Rightarrow x = 50$$

Serão necessários 50 ovos.

Duas grandezas variáveis são chamadas de **grandezas diretamente proporcionais** quando a razão entre os valores da primeira grandeza e os valores correspondentes da segunda é sempre a mesma.

Quando 2 grandezas são diretamente proporcionais, se para um valor positivo x de uma delas corresponde o valor positivo y na outra, a razão $\frac{y}{x}$ é sempre a mesma para todo valor de x. A razão $\frac{y}{x}$ é uma constante k. De $\frac{y}{x} = k$ decorre a relação algébrica:

$$y = k \cdot x$$

que é a relação característica entre os valores de 2 grandezas diretamente proporcionais.

No problema dado, sendo x o número de fatias e y o de ovos, temos:

$$\frac{y}{x} = \frac{4}{20}, \text{ logo } y = \frac{1}{5} \cdot x.$$

A tabela a seguir apresenta os valores correspondentes das 2 grandezas.

Ovos e fatias de um bolo

Número de fatias (x)	Número de ovos (y)
0	0
20	4
40	8
60	12
80	16
100	20

Dados elaborados para fins didáticos.

Proposta para o estudante

Sugira aos estudantes que assistam ao episódio do Programa Matemática em Toda Parte e peça para que destaquem em quais momentos apareceram os conceitos de razão e proporção.

LOPES, Antônio José. *Matemática na Cozinha* [Matemática em toda parte]. TV Escola. 2009. 1 vídeo (24 min). Publicado pelo canal Matemática do Cotidiano. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=gbb1hS4rQLE. Acesso em: 30 maio 2022.

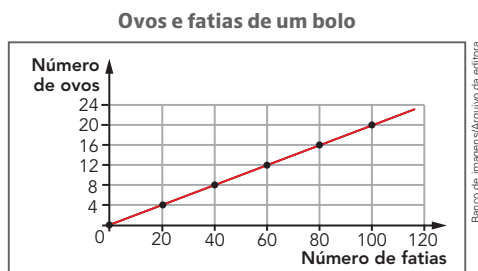
Proposta para o professor

O Guia Michelin apresenta os melhores restaurantes do mundo, e no Brasil apenas uma mulher foi contemplada nele. Segue a notícia:

BANDEIRANTES. O que é estrela Michelin, selo de um dos restaurantes da Helena Rizzo? *Masterchef*. 2022. Disponível em: https://www.band.uol.com.br/entretenimento/masterchef/noticias/o-que-e-estrela-michelin-selo-de-um-dos-restaurantes-da-helena-rizzo-16509537. Acesso em: 17 maio 2022.

Representação gráfica

Podemos representar os dados da tabela em um gráfico do número de ovos pelo número de fatias do bolo. Atenção! A linha que une os pontos do gráfico é apenas ilustrativa, pois, neste caso, trabalhamos com números inteiros de fatias de bolo e de ovos, considerando bolo de, no mínimo, 20 fatias.

A representação gráfica apresenta pontos alinhados começando pela origem (0, 0).

Ovos e fatias de um bolo

Dados elaborados para fins didáticos.

Grandezas inversamente proporcionais

Claudete tem 8 gatos e a ração que tem é suficiente para apenas 15 dias. Ela adotou mais 2 gatos. Supondo que todos os gatos comem a mesma quantidade de ração, para quantos dias Claudete vai ter ração suficiente para alimentar os 10 gatos?

Nesse problema temos as seguintes situações:

1ª) para 8 gatos, a ração *é suficiente* para 15 dias;

2ª) para 10 gatos, y dias.

Queremos determinar o valor de y.

Aumentando o número de gatos, a ração vai dar para menos dias. Se dobrasse o número de gatos, a ração daria para a metade do número de dias. Triplicando o número de gatos, a ração vai dar para um terço dos dias. Então, o número de dias é uma grandeza inversamente proporcional ao número de gatos. Assim, o produto (número de gatos) · (número de dias) é constante.

$$10 \cdot y = 8 \cdot 15 \Rightarrow y = \frac{120}{10} \Rightarrow y = 12$$

A ração será suficiente para 12 dias.

Duas grandezas variáveis são chamadas de **grandezas inversamente proporcionais** quando o produto de cada valor da primeira grandeza pelo valor correspondente da segunda é sempre o mesmo.

Quando 2 grandezas são inversamente proporcionais, se para um valor positivo x de uma delas corresponde o valor positivo y na outra, o produto xy é sempre o mesmo para todo valor de x. O produto xy é uma constante k. De $x \cdot y = k$ decorre a relação algébrica:

$$y = \frac{k}{x}$$

que é a relação característica entre as medidas de 2 grandezas inversamente proporcionais.

Note que essa relação pode ser escrita como $y = k \cdot \frac{1}{x}$, ou seja, y é diretamente proporcional ao inverso de x.

Quando 2 grandezas são inversamente proporcionais, uma delas é diretamente proporcional ao inverso da outra.

No problema dos gatos de Claudete, sendo x o número de gatos e y o número de dias, temos:

$$x \cdot y = 8 \cdot 15, \text{ logo } y = \frac{120}{x}.$$

Orientações didáticas

Grandezas inversamente proporcionais

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA08**, ao propor a resolução e elaboração de problemas envolvendo 2 grandezas inversamente proporcionais, em contextos diversos.

É importante esclarecer com os estudantes, assim como no tópico anterior, a diferença entre incógnita e variável. Também é importante estabelecer o uso das letras x e y como variáveis.

O gráfico apresentado, indicando a quantidade de dias em relação à quantidade de gatos, reforça a ideia dessas grandezas como variáveis.

Proposta para o professor

Pergunte aos estudantes se o formato do gráfico em cada caso (grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais) lhes parece fazer sentido e representa bem cada situação. Colha as respostas e observações para fazer inferências e reflexões sobre o estado de letramento matemático dos estudantes e as habilidades deles envolvendo leitura de gráficos.

Orientações didáticas

Grandezas não proporcionais

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA08**, ao propor a resolução e elaboração de problemas envolvendo 2 grandezas não proporcionais, em contextos diversos.

Algumas grandezas eventualmente não são nem diretamente proporcionais nem inversamente proporcionais, e esses casos serão tratados neste tópico. É importante salientar que não se trata de eventos aleatórios e sem relação entre eles, mas sim de situações em que há uma relação de outro tipo, podendo ser quadrática, exponencial, ou outra possibilidade que não seja claramente identificável. No caso apresentado aqui, a relação entre as 2 grandezas é linear com uma constante adicionada, gerando assim uma equação de reta e, portanto, o gráfico de uma reta, porém distinta de uma relação diretamente proporcional.

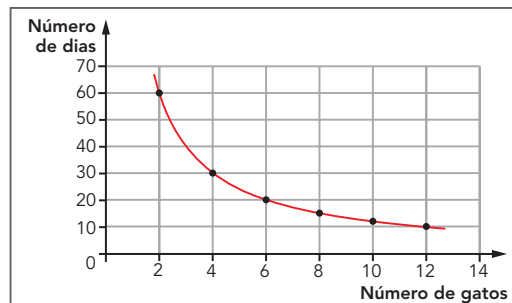
A tabela a seguir apresenta valores correspondentes das 2 grandezas.

A representação gráfica apresenta pontos de uma curva denominada **hipérbole**. É importante perceber que, nesse caso, a curva é utilizada apenas para ilustrar o comportamento dessa relação, pois, de fato, o número de gatos e o de dias devem ser valores inteiros.

Quantidade da ração para gatos

Número de gatos (x)	Número de dias (y)
2	60
4	30
6	20
8	15
10	12
12	10

Dados elaborados para fins didáticos.

Quantidade da ração para gatos

Dados elaborados para fins didáticos.

Grandezas não proporcionais

Na tabela a seguir registramos a idade, em anos, de Juninho e da mãe, Maria, nas ocasiões em que ocorreram fatos importantes na vida deles.

Idades em ocasiões especiais

Ocorrências: quando Juninho...	Idade de Juninho	Idade de Maria
... ingressou no Ensino Fundamental Anos Iniciais	6	34
... ingressou no Ensino Fundamental Anos Finais	11	39
... ingressou no Ensino Médio	15	43
... ingressou na faculdade	18	46
... formou-se em Direito	22	50
... casou-se com Gabriela	30	58

Dados elaborados para fins didáticos.

É claro que, se a idade de Juninho vai aumentando, a de Maria também vai aumentando. A idade de Maria é proporcional à de Juninho?

Quando Juninho tinha 11 anos, Maria tinha 39. Quando Juninho tinha 22 anos, Maria tinha 50. Note que a idade de Juninho dobrou de 11 para 22, mas a de Maria não dobrou, passou de 39 para 50. Quando a idade de Juninho triplicou de 6 para 18 anos, a de Maria não triplicou, ela foi de 34 para 46. Dessa maneira, **a idade de Maria não é proporcional à idade de Juninho**.

Essa conclusão também pode ser justificada por meio das razões: $\frac{34}{6} \neq \frac{39}{11}$.

Então, qual deve ser a relação algébrica entre a idade, y, de Maria e a idade, x, de Juninho?

A cada ano que passa, adicionamos 1 a ambas as idades. Desse modo, a diferença entre a idade de Maria e a idade de Juninho é sempre a mesma.

$34 - 6 = 28$ $\quad$ $39 - 11 = 28$ $\quad$ $43 - 15 = 28$

E assim por diante. Então, a relação algébrica entre as idades y e x é:

$$y - x = 28$$
$$y = x + 28$$

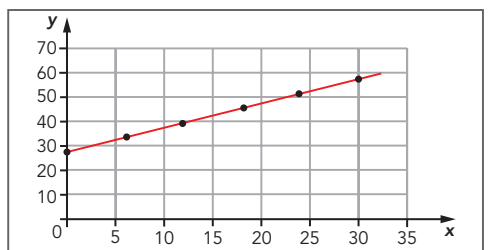
A idade de Maria é igual à idade do Juninho adicionada a 28.

Essa relação algébrica não é a forma característica de uma relação entre grandezas proporcionais $(y = k \cdot x)$ nem inversamente proporcionais $\left(y = k \cdot \frac{1}{x}\right)$. A representação gráfica são pontos de uma reta que não passa na origem $(0, 0)$. Nesse caso, novamente, a reta do gráfico é utilizada para ilustrar o comportamento da idade de Maria e de Juninho, pois estes são valores inteiros.

Idades de Maria e Juninho

x	y
0	28
6	34
12	40
18	46
24	52
30	58

Dados elaborados para fins didáticos.

Idades de Maria e Juninho

Dados elaborados para fins didáticos.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

12. Um arquiteto está planejando a construção de uma casa. A escala escolhida por ele para a representação da planta baixa é 1 : 300. A que grandezas se refere essa escala? São grandezas diretamente proporcionais? Explique.
As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

13. Uma empresa fixou o preço de uma excursão para estudantes do 9º ano contando com a participação de 60 a 75 estudantes. Se 60 deles participarem da excursão, o custo para cada um será de R$ 80,00. Quanto gastará cada um deles se forem 75 estudantes? R$ 64,00

14. Em um galão cabem 3,6 litros de tinta. Um pintor de paredes gasta 3,6 litros de tinta para pintar 20 m^2 com 2 demãos. Copie e complete a tabela, no caderno, com a medida de área pintada e o número de galões utilizados na pintura. Explicite a relação algébrica entre a medida de área pintada *y* e o número *x* de galões utilizados e explique se as grandezas envolvidas são proporcionais. Depois, represente essa relação em um gráfico.
As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Quantidade de tinta para pintar uma parede

Número de galões de tinta	0	1	2	3	4	5
Medida de área pintada (em m^2)	▨	▨	▨	▨	▨	▨

0; 20; 40; 60; 80; 100.

Dados elaborados para fins didáticos.

15. Deolinda tem uma confeitaria famosa na cidade em que mora. O bolo de limão é o mais procurado. De acordo com a receita, para cada bolo de limão usam-se 250 mL de suco da fruta.

a) Qual é a quantidade, em mL, de suco de limão necessária para fazer 6 bolos? 1 500 mL

b) Sendo *y* o número de bolo e *x* a quantidade de suco de limão em mililitros, escreva no caderno a relação algébrica entre *y* e *x*. $y = \frac{1}{250} \cdot x$

16. Rosana trabalha no setor de televendas de uma empresa. Na tabela a seguir estão os valores do salário que ela recebe conforme suas vendas mensais.

Tabela de salários

Vendas (em R$)	Salário (em R$)
10 000	1 600
20 000	2 000
30 000	2 400
40 000	2 800
50 000	3 200
60 000	3 600

Dados elaborados para fins didáticos.

a) Os salários são proporcionais aos valores das vendas? Explique. Não, pois a razão entre salário e vendas não é constante.

b) Represente os dados em um gráfico.
A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

c) Qual é o salário de Rosana em um mês em que suas vendas somam R$ 45.000,00? R$ 3.000,00

Orientações didáticas

Atividades

Nas atividades **12** a **18** é colocado em prática aquilo que foi estabelecido de modo teórico anteriormente. Enfatize a necessidade de formalizar o pensamento, pois, ainda que uma abordagem por tentativa e erro gere alguns frutos, ela não é a recomendada. Então, estabeleça a abordagem e a qualidade da resolução, bem como a clareza do pensamento, como fatores importantes para considerar a resolução como estando correta. Busque compreender quais processos mentais os estudantes estão usando para distinguir as situações de grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais, e não proporcionais. Use isso para reflexão de seu fazer docente.

Ao final de cada resolução e correção, busque incentivar que os estudantes validem a resposta que encontraram, se faz sentido ou não. Por exemplo, na atividade **18**, pergunte: "Faz sentido obter um tempo, em dias, menor nas respostas? Se sim, por quê? Se não, por quê?" e a partir daí debata a validade das respostas com a turma.

Orientações didáticas

Comparando mais de 2 grandezas

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento das habilidades: **EF09MA07**, ao propor a resolução de problemas envolvendo razão entre 2 grandezas de espécies diferentes, como velocidade; **EF09MA08**, ao propor a resolução e elaboração de problemas envolvendo 2 ou mais grandezas, em contextos variados.

Aproveite os conteúdos trabalhados anteriormente e ao longo deste capítulo para formar, em conjunto com os estudantes, as regras para o entendimento de situações-problema em que mais de 2 grandezas estão sendo comparadas. A possibilidade de analisar de par em par é uma abordagem interessante e que deve ser enfatizada. Assim, este tópico se torna uma consequência de todo estudo estabelecido até este momento. Faça a leitura do primeiro exemplo contido no Livro do Estudante, resolvendo-o passo a passo para detectar eventuais fragilidades nas concepções adquiridas.

17. Elabore no caderno um problema que possa ser resolvido com as seguintes operações:

$$\frac{x}{20} = \frac{30}{6} \Rightarrow x = \frac{20 \cdot 30}{6} \Rightarrow x = 100$$

Resposta: 100

Exemplo de resposta: Em um mês em que um ateliê fez 6 vestidos de noiva, utilizou 30 metros de tecido. Quantos metros são necessários para confeccionar 20 vestidos iguais a esses? Resposta: 100 metros.

18. Em uma construção, 6 operários, trabalhando 8 horas por dia, completaram uma obra em 30 dias.

a) Se os 6 operários tivessem trabalhado 10 horas por dia, em quantos dias completariam a obra? 24 dias.

b) Se fossem 9 operários trabalhando 8 horas por dia, em quantos dias completariam a obra? 20 dias.

c) Se fossem 9 operários trabalhando 10 horas por dia, em quantos dias completariam a obra? 16 dias.

Comparando mais de 2 grandezas

Acompanhe as situações apresentadas a seguir.

A velocidade do ônibus

Situação I: Um ônibus em uma estrada, com medida de velocidade constante de 80 km/h, percorre 12 km em 9 min.

Situação II: Qual medida de distância esse ônibus percorreria com a medida de velocidade constante de 100 km/h durante 9 min, na mesma estrada?

Como a medida de tempo do percurso (9 minutos) foi mantida, a grandeza distância percorrida é diretamente proporcional à velocidade do ônibus. Para responder à pergunta, vamos recordar a regra de três simples:

	Medida de velocidade (em km/h)	Medida de distância (em km)
Situação I	80	12
Situação II	100	x

Como as grandezas são diretamente proporcionais nessa situação, temos:

$$\frac{80}{12} = \frac{100}{x} \Rightarrow 80 \cdot x = 12 \cdot 100 \Rightarrow x = \frac{12 \cdot 100}{80} = 15$$

Logo, com medida de velocidade constante de 100 km/h, o ônibus percorreria 15 km em 9 min.

Situação III: E qual medida de distância esse ônibus percorreria com medida de velocidade constante de 100 km/h durante 21 min?

Como a medida de velocidade (100 km/h) é a mesma da situação anterior, a grandeza distância percorrida é diretamente proporcional ao tempo do percurso.

Andrey Armyagov/Shutterstock

Ônibus percorrendo uma estrada.

	Medida de tempo (em min)	Medida de distância (em km)
Situação II	9	15
Situação III	21	y

Como as grandezas são diretamente proporcionais nessa situação, temos:

$$\frac{9}{15} = \frac{21}{y} \Rightarrow 9 \cdot y = 15 \cdot 21 \Rightarrow y = \frac{15 \cdot 21}{9} = 35$$

Logo, com medida de velocidade constante de 100 km/h, em 21 min, o ônibus percorreria 35 km.

Agora, vamos comparar as 3 grandezas – velocidade, tempo de percurso e distância percorrida – nas situações **I** e **III**:

	Medida de velocidade (em km/h)	Medida de tempo (em min)	Medida de distância (em km)
Situação I	80	9	12
Situação III	100	21	35

- A distância percorrida é diretamente proporcional à velocidade? Precisamos verificar se a igualdade a seguir é verdadeira:

$$\frac{12}{80} = \frac{35}{100}$$

Como $12 \cdot 100 \neq 80 \cdot 35$, temos $\frac{12}{80} \neq \frac{35}{100}$.

Então, a distância percorrida não é diretamente proporcional à velocidade.

- A distância percorrida é diretamente proporcional ao tempo de percurso?

Devemos verificar se a igualdade $\frac{12}{9} = \frac{35}{21}$ é verdadeira.

Como $12 \cdot 21 \neq 9 \cdot 35$, temos $\frac{12}{9} \neq \frac{35}{21}$.

Então, a distância percorrida não é diretamente proporcional ao tempo de percurso.

- A distância percorrida é diretamente proporcional ao produto da velocidade pelo tempo de percurso?

Vamos verificar se as razões $\frac{12}{80 \cdot 9}$ e $\frac{35}{100 \cdot 21}$ são iguais.

Como $\frac{12}{80 \cdot 9} = \frac{1}{60}$ e $\frac{35}{100 \cdot 21} = \frac{1}{60}$, temos $\frac{12}{80 \cdot 9} = \frac{35}{100 \cdot 21}$.

Então, a distância percorrida é diretamente proporcional ao produto da velocidade pelo tempo de percurso.

Agora, acompanhe com atenção as situações apresentadas a seguir.

Para revestir a parede

Situação I: Para revestir uma parede com 4 m de medida do comprimento por 2,5 m de medida da altura são necessários 300 azulejos.

Situação II: Para revestir uma parede com 5 m de medida do comprimento por 2,5 m de medida da altura, quantos desses azulejos são necessários?

Como a medida da altura (2,5 m) foi mantida, o número de azulejos é diretamente proporcional ao comprimento da parede.

Novamente vamos aplicar a regra de três simples:

	Medida do comprimento da parede (em m)	Número de azulejos
Situação I	4	300
Situação II	5	x

Sendo grandezas diretamente proporcionais nessa situação, temos: $\frac{4}{300} = \frac{5}{x}$, então: $x = \frac{5 \cdot 300}{4} = 375$.

Logo, são necessários 375 azulejos.

Orientações didáticas

Comparando mais de 2 grandezas

Após a resolução do segundo exemplo passo a passo, formalize a relação entre as grandezas: $a = k \cdot b \cdot c$, sendo k uma constante.

É recomendado que se confiram mentalmente os valores obtidos para, assim, enfatizar a necessidade de o resultado ser averiguado sempre que possível.

Orientações didáticas

Regra de três compostas

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento das habilidades: **EF09MA07**, ao propor a resolução de problemas envolvendo razão entre 2 grandezas de espécies diferentes, como velocidade; **EF09MA08**, ao propor a resolução e elaboração de problemas envolvendo 2 ou mais grandezas, em contextos variados.

Uma grande fragilidade nas concepções gerais envolvendo grandezas é a ideia de que tudo se resolve com regra de três. É importante, portanto, objetivar seu uso e demonstrar que há grandezas com outros tipos de relação entre si e que isso é o primeiro passo a se analisar antes de desenhar uma solução para determinado problema. Por isso, as competências adquiridas até este momento devem ser estruturadas e compreendidas como pré-requisito para o entendimento desse conteúdo. Faça uma avaliação processual, pois este momento é compreendido como uma oportunidade para avaliar o processo de aprendizado dos estudantes e a dinâmica da turma e, também, os resultados. É uma abordagem interessante nesta etapa por ser o conteúdo articulado a diversos outros.

Primeiro, estabeleça as relações entre as grandezas estudadas, inclusive fazendo uso de recursos imaginativos para tal. Sugira algo como: “Se a quantidade de fios dobrar, o comprimento do tecido vai diminuir?”. Pode-se iniciar com exemplos mais simples do que o apresentado no livro, como: “Se eu for realizar a pintura da sala de aula e vocês forem me auxiliar, quanto mais estudantes ajudando menor será o tempo necessário? Se sim, essas grandezas, número de estudantes e tempo para cumprir a tarefa, têm qual relação entre si? E se aumentar o número de salas, o que ocorre e qual a relação entre as grandezas?”. Posteriormente, monte as relações a partir de razões, ou esquematicamente, tal como no livro para o exemplo da confecção de tecidos.

Situação III: E para revestir uma parede com 5 m de medida do comprimento por 3 m de medida da altura, quantos desses azulejos são necessários?

Como a medida do comprimento (5 m) foi mantida, o número de azulejos é diretamente proporcional à altura da parede.

	Medida da altura da parede (em m)	Número de azulejos
Situação II	2,5	375
Situação III	3	y

Sendo grandezas diretamente proporcionais: $\frac{2,5}{375} = \frac{3}{y}$, então: $y = \frac{375 \cdot 3}{2,5} = 450$.

Agora, vamos comparar as 3 grandezas – comprimento, altura e número de azulejos – nas situações **I** e **III**:

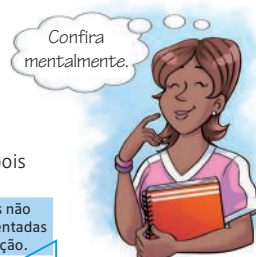
	Medida do comprimento da parede (em m)	Medida da altura da parede (em m)	Número de azulejos
Situação I	4	2,5	300
Situação III	5	3	450

O número de azulejos:

- não é proporcional ao comprimento, pois $\frac{300}{4} \neq \frac{450}{5}$;
- não é proporcional à altura, pois $\frac{300}{2,5} \neq \frac{450}{3}$;
- é diretamente proporcional ao produto do comprimento pela altura, pois

$\frac{300}{4 \cdot 2,5} = 30$ e $\frac{450}{5 \cdot 3} = 30$; logo, $\frac{300}{4 \cdot 2,5} = \frac{450}{5 \cdot 3}$.

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

As imagens não estão representadas em proporção.

Se uma grandeza A depende de 2 outras grandezas B e C, e se, fixando C, A é diretamente proporcional a B, e se, fixando B, A é diretamente proporcional a C, então A é diretamente proporcional ao produto $B \cdot C$.

Representando por a, b e c os valores correspondentes das grandezas A, B e C, respectivamente, temos nesse caso:

$a = k \cdot b \cdot c$ (sendo k uma constante).

Regra de três composta

No dia a dia, inúmeras vezes nos deparamos com situações que envolvem mais de 2 grandezas proporcionais, como vimos nos exemplos anteriores. Um dos métodos para resolver situações como essas é chamado **regra de três composta**. Vamos analisar alguns exemplos.

A confecção de tecidos

Para confeccionar 1 600 metros de tecido com medida da largura 1,80 m, uma tecelagem consome 320 kg de fios. Qual é a quantidade de fios necessária para produzir 2 100 metros do mesmo tecido com medida da largura 1,50 m?

Esse problema envolve 3 grandezas: quantidade de fios, comprimento do tecido e largura do tecido. Nesse caso, essa “quantidade de fios” é medida em quilogramas.

FUN FUN PHOTO/Shutterstock

Interior de uma fábrica de tecidos.

Vamos utilizar a regra de três composta para resolver a situação.

Sendo x a quantidade de quilogramas de fios a calcular, temos a seguinte correspondência:

A Quantidade de fios (em kg)		*B* Medida do comprimento do tecido (em m)		*C* Medida da largura do tecido (em m)
320	—	1 600	—	1,80
x	—	2 100	—	1,50

Precisamos calcular o valor da grandeza *A* (quantidade de fios), que depende dos valores das grandezas *B* (comprimento do tecido) e *C* (largura do tecido).

Fixando *C*: para uma mesma medida da largura, aumentando a medida do comprimento, aumenta proporcionalmente a quantidade de fios. Então, *A* é diretamente proporcional a *B*.

Fixando *B*: para uma mesma medida do comprimento, aumentando a medida da largura, aumenta proporcionalmente a quantidade de fios. Então, *A* é diretamente proporcional a *C*.

Logo, a grandeza *A* é diretamente proporcional ao produto das grandezas *B* e *C*.

$$\begin{matrix} a \rightarrow \\ b \cdot c \rightarrow \end{matrix} \frac{320}{1600 \cdot 1{,}80} = \frac{x}{2\,100 \cdot 1{,}50}$$

$$\frac{320}{2\,880} = \frac{x}{3\,150}$$

$$x = \frac{3\,150 \cdot 320}{2\,880} = 350$$

> a: valores da grandeza *A*;
> b: valores da grandeza *B*;
> c: valores da grandeza *C*.

Resposta: São necessários 350 kg de fios.

Acompanhe outra resolução desse problema.

Depois de concluir que a grandeza *A* é diretamente proporcional ao produto $B \cdot C$, escrevemos:

$$a = k \cdot b \cdot c$$

Para $a = 320$, temos $b = 1\,600$ e $c = 1{,}80$. Então:

$$320 = k \cdot 1\,600 \cdot 1{,}80$$

$$k = \frac{320}{1600 \cdot 1{,}80} = \frac{1}{9}$$

Para $a = x$, temos $b = 2\,100$ e $c = 1{,}50$. Então:

$$x = \frac{1}{9} \cdot 2\,100 \cdot 1{,}50 = 350$$

Resposta: São necessários 350 kg de fios.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

19. Um ônibus, com medida de velocidade constante de 80 km/h, percorre 1 km de estrada em 45 s. Qual é a medida de distância que o ônibus percorrerá em 72 s com medida de velocidade constante de 100 km/h? 2 km

20. Para revestir uma parede de 3 m de medida do comprimento por 2,25 m de medida da altura são necessários 300 azulejos. Quantos azulejos seriam necessários se as dimensões da parede medissem 4,5 m por 2 m? 400 azulejos.

21. Para produzir 1 000 livros de 240 páginas, uma gráfica consome 360 kg de papel. Quantos livros de 320 páginas é possível imprimir com 720 kg de papel? 1 500 livros.

Orientações didáticas

Atividades

Enfatize a possibilidade de usar a estrutura textual para traçar o caminho lógico de resolução das atividades. Tal abordagem, além de útil, incentiva a autonomia e trabalha a **CEMAT04** e a **CEMAT06**, ao lançar mão de vários registros de linguagem e relacioná-los, além de tornar o estudante capaz de modelar problemas reais e cotidianos de maneira organizada. Enfatize também a importância de um bom registro do raciocínio, tanto para a correta avaliação das necessidades e boas práticas dos estudantes, quanto para estudos futuros baseados em seus próprios registros no caderno.

Nas atividades **19** a **21** são apresentadas situações-problema de modelagem mais simples. Incentive os estudantes a estruturar as ideias da seguinte maneira, como na atividade **19**: "A velocidade é constante, o ônibus percorre a distância de 1 km em 45 s. Se a velocidade na segunda situação aumentou e o tempo decorrido também aumentou, espera-se que o deslocamento também aumentará." Identifique também que, para facilitar as contas, os valores de tempo apresentados são múltiplos de 9 e, portanto, é possível fazer simplificações.

Na atividade **20**, alguns valores são múltiplos de 3, enquanto na atividade **21** todos os valores são múltiplos de 40. Incentive esse tipo de elaboração mental antes do início da escrita da resolução, como uma etapa de planejamento.

Orientações didáticas

Atividades

As atividades **22** a **27** têm textos menos diretos, o que pode dificultar a compreensão inicial. Além disso, é compreensível e esperado que relações inversamente proporcionais sejam mais complicadas de serem assimiladas em um primeiro momento, mas que isso é normal. Enfatize essas dificuldades como uma barreira transponível, e que pode ser superada com a estruturação do pensamento. Novamente, se apoie na linguagem falada para auxiliar na modelagem do problema, buscando estabelecer conexões entre as variáveis, e fixando seus valores para compreender as relações entre elas. Incentive a análise do resultado final e se o valor é próximo do esperado de acordo com a lógica da situação. Essa abordagem capacita o estudante a produzir análises críticas com relação à sua própria produção intelectual, mas também a de terceiros, incentivando assim sua criticidade.

Vamos, agora, analisar mais alguns exemplos de regra de três composta.

Os operários e o muro

Dmitry Kalinovsky/Shutterstock

Operário construindo um muro.

Se 4 operários, trabalhando 8 horas por dia, levantam um muro de 30 metros de medida do comprimento em 10 dias, em quantos dias 6 operários, trabalhando 9 horas por dia, erguerão um muro de mesmo padrão, cujo comprimento mede 81 metros?

Sendo x o número de dias, temos a correspondência:

	A Número de dias	*B* Número de operários	*C* Número de horas por dia	*D* Medida do comprimento do muro (em m)
Situação I	10	4	8	30
Situação II	x	6	9	81

Vamos calcular o valor da grandeza A, que depende das grandezas B, C e D.

Fixando C e D, A é inversamente proporcional a B.

Fixando B e D, A é inversamente proporcional a C.

Fixando B e C, A é diretamente proporcional a D.

Então, os valores a são proporcionais ao produto $\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c} \cdot d$.

Temos: $a = k \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c} \cdot d$

> a: valores da grandeza A;
> b: valores da grandeza B;
> c: valores da grandeza C;
> d: valores da grandeza D.

Na situação **I**, temos: $10 = k \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} \cdot 30$, ou seja: $k = \frac{4 \cdot 8 \cdot 10}{30} = \frac{32}{3}$

Na situação **II**, temos: $x = \frac{32}{3} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{9} \cdot 81 = 16$

Resposta: Portanto, o muro ficará pronto em 16 dias.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

22. Para abrir uma valeta de 50 m de medida do comprimento e 2 m de medida da profundidade, 10 operários levam 6 dias. Quantos dias serão necessários para abrir uma valeta cujo comprimento mede 80 m e a profundidade, 3 m, dispondo de 16 operários? 9 dias.

23. Rodrigo herdou as terras dos pais. Nesse terreno, 5 pessoas podem arar um campo com 10 hectares de medida de área em 9 dias, trabalhando 8 horas por dia. Quantas pessoas serão necessárias para arar uma área que mede 20 hectares em 10 dias trabalhando 9 horas por dia? 8 pessoas.

24. Em uma obra, 12 operários, trabalhando 10 horas diárias, levantaram um muro de 20 metros de medida do comprimento em 6 dias. Em outra obra, com 3 operários a mais, trabalhando 8 horas por dia, em 9 dias levantaram um muro com as mesmas medidas da altura e da largura do anterior. Quantos metros tinha o comprimento do muro da segunda obra? 30 metros.

25. Elabore um problema que envolva uma grandeza proporcional a outras 2 grandezas. Depois, troque com um colega para que ele resolva o problema que você elaborou enquanto você resolve o problema elaborado por ele.

26. Elabore um problema que possa ter a seguinte resolução:

$y = k \cdot x \cdot \frac{1}{n}$

Situação I: $6 = k \cdot 600 \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow k = \frac{1}{25}$

Situação II: $y = \frac{1}{25} \cdot 1000 \cdot \frac{1}{8} = 5$

Resposta: 5

Depois, troque com um colega para que ele resolva o problema que você elaborou enquanto você resolve o problema elaborado por ele.

26. Exemplo de resposta: Para construir um muro ao redor de um campo de futebol cujo perímetro mede 600 metros, 4 pedreiros levaram 6 dias trabalhando. Se a medida de perímetro do campo fosse 1 000 metros, com 8 pedreiros trabalhando, quantos dias levariam? Resposta: 5 dias.

27. Na abertura desta Unidade, vimos que o preço da gasolina está em alta. Suponha que Márcia queira visitar a família, que mora a 117 km da casa dela, e que a gasolina esteja R$ 6,70 o litro. Sabendo que, no último mês, Márcia percorreu 405 km com 45 L de gasolina, quanto ela gastará de combustível para visitar a família dela supondo que mantenha o mesmo consumo? R$ 87,10

25. Exemplo de resposta: Viajando a 80 km/h, um ônibus leva 2 h 30 min para percorrer 200 km. Se viajasse a 100 km/h, em quanto tempo percorreria 250 km? Resposta: 2 h 30 min.

Porcentuais sucessivos

Taxa de juro e montante

Quando tomamos emprestada uma quantia, comumente nos é cobrada uma parte adicional do valor emprestado.

Juro é a remuneração recebida por quem dispõe de um capital (dinheiro) e o empresta durante certo tempo a alguém.

Quando o dono de um capital empresta dinheiro a quem solicita, deve-se combinar como será calculado o valor do aluguel do dinheiro. Geralmente, esse valor é calculado previamente fixando-se uma porcentagem chamada **taxa de juro**, que depende do período de empréstimo do dinheiro.

Neste capítulo, vamos estudar o **juro simples**: quando um capital c é emprestado durante certa medida de tempo t; sendo que, no fim desse período, o capital é devolvido em uma parcela, acrescido de juro j.

Cálculo do juro

Vamos calcular o juro j, gerado por um capital c, durante a medida de tempo t (em anos), à taxa (anual) de i.

Em 1 ano, o juro é dado por $j = c \cdot i$. Em t anos, o juro é $c \cdot i \cdot t$. Assim:

$$j = c \cdot i \cdot t$$

Montante

Ao final de um empréstimo ou de uma aplicação financeira, o total a ser pago pela pessoa que tomou o empréstimo (o tomador) ou a ser recebido pela pessoa que fez a aplicação (o investidor) é chamado de **montante** da operação.

O montante M é a soma do capital emprestado (ou aplicado) com o juro.

$$M = c + j$$

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Quanto é o juro?

Cláudio vai emprestar R$ 2.000,00 a Ricardo, por 2 anos, à taxa de 12% ao ano. Quanto Ricardo vai pagar de juro ao devolver o empréstimo ao final dos 2 anos?

Acompanhe o raciocínio da resolução desse problema. Como a taxa é de 12% ao ano, em 1 ano Ricardo pagará 12% de R$ 2.000,00:

$$\frac{2\,000 \cdot 12}{100} = 240$$

Em 1 ano, o juro é de R$ 240,00. Em 2 anos, como 2 · R$ 240,00 = R$ 480,00, Ricardo pagará R$ 480,00 de juro. Isso significa que, ao final de 2 anos, Ricardo terá que devolver a Cláudio o valor de: R$ 2.000,00 + + R$ 480,00 = R$ 2.480,00.

A reflexão sobre o impacto dos juros em nossas finanças pessoais é um ótimo contexto para discutir Educação Financeira, e também favorece a construção da cidadania e o desenvolvimento da autonomia.

É de suma importância que os estudantes compreendam os conceitos relativos ao estudo de juros. Desse modo, recomende que anotem no caderno de maneira destacada os conceitos e, também, suas representações. Uma opção é escrever por extenso as fórmulas apresentadas, por exemplo: "O juro é igual à taxa de juro aplicada ao capital por determinado tempo". Do mesmo modo para o montante: "O montante é a soma do capital com o juro, ou seja, é o valor total após o rendimento do juro". Esse tipo de abordagem relaciona diversos registros da língua escrita e falada com a linguagem matemática, de modo a estruturar o pensamento a partir do senso comum.

Faça a leitura do exemplo do livro e tire dúvidas não apenas dos conceitos apresentados, mas também das ideias envolvendo a resolução de equações.

Orientações didáticas

Taxa de juro e montante

Na BNCC

Este capítulo favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA05**, ao propor a resolução e elaboração de problemas envolvendo porcentagens, na aplicação de percentuais sucessivos e na determinação de taxas percentuais. Favorece também o desenvolvimento da **CEMAT05**, ao utilizar a calculadora como ferramenta digital na resolução de problemas. Mobiliza o TCT *Educação Financeira* ao trabalhar com situações-problema no contexto desse tema.

É relevante levantar as concepções prévias dos estudantes sobre os conceitos que serão estudados neste tópico. Pergunte: "O que são juros?"; "Em quais contextos vocês já tiveram contato com esse termo?"; "É um termo com conotação positiva? Juros são bons para vocês?" Essa é uma opção de primeira abordagem para temas envolvendo questões econômicas e financeiras. Há outras também que podem ser baseadas nas observações trazidas pelos estudantes. Desse modo, será possível trabalhar a **CG06** e a **CG07**, ao utilizar os conhecimentos aprendidos para se colocar no mundo em busca de seus interesses e formular e argumentar ideias em prol de sua liberdade como cidadão.

Orientações didáticas

Atividades

Nas atividades desta seção, incentive o registro dos valores e das respectivas letras que os representam no caderno. Por exemplo, na atividade **1**, faça: $c = 8920, i = \frac{13}{100}, t = 3$ e $j = ?$ A partir desses dados colhidos ao longo do enunciado, o estudante deve escolher qual fórmula utilizar, escrever a equação e substituir os valores nela. Demonstre exemplos também de sinônimos possíveis para os termos. Neste caso, "quanto rende de juro" é equivalente a "quanto de lucro o capital gerou".

Na atividade **2**, espere para compreender se os estudantes identificam que a taxa de juro está na unidade de medida ano, enquanto a pergunta se refere ao juro durante 5 meses. Caso os estudantes não percebam, dê a dica e instigue que utilizem os conceitos aprendidos no capítulo 7 desta Unidade, mais especificamente regra de três, para avaliar qual a melhor abordagem, se estabelecer a taxa de juro em % ao mês, ou escrever o equivalente de 5 meses em anos.

Na atividade **3**, utilize uma abordagem semelhante, e na atividade **4**, enfatize que a melhor escolha para a resolução é manter os valores fracionários exatamente como frações, pois tentativas de divisão resultarão em dízimas periódicas e, portanto, em erros na precisão do resultado.

Nas atividades **5** a **9**, aconselhe que a taxa de juro seja mantida como uma fração de denominador 100, pois isso irá simplificar os cálculos, já que alguns valores como o capital de R$ 19.200,00 na atividade **6**, por exemplo, acabará sendo dividido por 100, resultando em valores mais amigáveis para a resolução.

Na atividade **9**, ajude os estudantes a refletirem sobre decisões e atitudes que contribuem para o desenvolvimento de habilidades argumentativas.

A atividade **10** propõe a elaboração de um problema, o que contribui para o desenvolvimento do pensamento computacional.

Qual é o montante?

Qual será o montante ao final da aplicação de um capital de R$ 3.960,00 durante 300 dias à taxa de 15% ao ano?

Primeiro, vamos calcular o juro, agora empregando a fórmula dada anteriormente. Sabemos que:

$$c = 3\,960 \text{ e } i = 15\%$$

Como a taxa é dada ao ano, devemos expressar t em anos:

$$t = 300 \text{ dias} = \frac{300}{360} \text{ ano}$$

> ano comercial → 360 dias
> mês comercial → 30 dias

Assim: $j = c \cdot i \cdot t = 3\,960 \cdot \frac{15}{100} \cdot \frac{300}{360} = \frac{3\,960 \cdot 15 \cdot 300}{100 \cdot 360} = 495$

Calculando o montante: $M = c + j = 3\,960 + 495 = 4\,455$

Logo, o montante será R$ 4.455,00.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. Quanto rende de juro um capital de R$ 8.920,00 aplicado à taxa de 13% ao ano durante 3 anos? R$ 3.478,80

2. Qual é o juro que deve ser pago no financiamento de R$ 76.125,00 à taxa de 12% ao ano durante 5 meses? R$ 3.806,25

3. Júlio aplicou R$ 4.800,00 a juro simples, à taxa de 1% ao mês, durante 3 anos e 4 meses. No fim desse período que montante Júlio receberá?

Sugestão: Como a taxa é dada ao mês, expresse t em meses. R$ 6.720,00

4. Roberto e Juliana compraram um imóvel por R$ 90.000,00 e pagarão da seguinte forma: $\frac{1}{3}$ de entrada, $\frac{1}{3}$ no prazo de 1 ano e $\frac{1}{3}$ no prazo de 2 anos, sendo as parcelas com taxa de 12% ao ano. Quanto eles pagarão de juro? R$ 10.800,00

Rawpixel.com/Shutterstock

Entrega das chaves do imóvel comprado pelo casal.

5. Um banco emprestou R$ 3.280,00 a um cliente pelo prazo de 93 dias à taxa anual de 18%. Qual foi o juro cobrado pelo banco? Qual valor o cliente pagará ao banco no final desse prazo? R$ 152,52; R$ 3.432,52.

6. Fernando precisou fazer um empréstimo de R$ 19.200,00 em um banco pelo prazo fixo de 7 meses à taxa de 10,25% ao ano. Quanto Fernando vai pagar de juro? Que montante ele pagará ao banco no fim do prazo? R$ 1.148,00; R$ 20.348,00.

7. Qual é o juro que rende um capital no valor de R$ 13.000,00, aplicado à taxa de 9% ao ano durante 5 meses e 15 dias? R$ 536,25

8. Eduardo atrasou 3 meses o pagamento de uma prestação no valor de R$ 720,00 e terá de pagar juro pelo atraso. A taxa cobrada pelo banco é de 24% ao ano.

a) Qual é o valor do juro? R$ 43,20

b) Quanto Eduardo vai ter de pagar no total? R$ 763,20

9. Vera quer comprar um terreno que custa R$ 14.200,00. Para isso, ela aplicou a quantia de R$ 13.200,00 pelo prazo de 10 meses à taxa de 9,5% ao ano.

a) Quando Vera for resgatar o dinheiro aplicado, o valor será suficiente para comprar o terreno? Sim, porque ela vai receber R$ 14.245,00.

b) Você concorda com a atitude de Vera de aplicar seu dinheiro para, depois, comprar à vista? Por quê? Resposta esperada: Sim, pois desse modo Vera não faz dívidas nas quais poderia pagar juro.

10. Elabore um problema em que o capital e o montante são dados no enunciado e a taxa ao mês precisa ser calculada. Exemplo de resposta: Júlia aplicou R$ 400,00. Depois de 5 meses da aplicação o montante era de R$ 440,00. Qual foi a taxa de juro ao mês aplicada sobre o capital? Resposta: 2%.

Proposta para o estudante

Segue uma atividade complementar:

Igor quer fazer uma previdência privada para o filho Joaquim, que acabou de nascer, para que ele usufrua apenas aos 18 anos. Ele encontrou 2 opções:

- PrevMuito: rende 20% a cada 3 anos;
- SuperPrev: rende 40% a cada 6 anos.

a) Por quanto devemos multiplicar o valor investido na PrevMuito para saber o montante (valor total com o rendimento) após 3 anos? E após 18 anos? Resposta: Por 1,2; por $1{,}2^6$.

b) Por quanto devemos multiplicar o valor investido na SuperPrev para saber o montante após 6 anos? E após 18 anos? Resposta: Por 1,4; por $1{,}4^3$.

c) Elabore uma questão que envolva a comparação das previdências e possa ser resolvida com o apoio da calculadora. Exemplo de resposta: Qual das previdências é a mais vantajosa para o investimento em um período de 18 anos? Resposta: PrevMuito.

Cálculo com porcentuais sucessivos

 Analise as questões propostas a seguir. Para resolvê-las você pode utilizar uma calculadora.

As questões serão discutidas mais adiante neste capítulo.

Questão 1 – O aumento do preço do gás de cozinha

Atualmente, a Petrobras reajusta o preço do gás de cozinha de acordo com o custo dos derivados de petróleo no mercado internacional e com a taxa de câmbio no nosso país. Cada revendedora é livre para praticar seus preços, uma vez que o preço final ao consumidor inclui, além do custo da Petrobras, outros custos, como impostos, fretes, distribuição e revenda.

Por exemplo, uma revendedora que vendia o botijão de gás por R$ 100,00 em agosto aplicou um reajuste de 4% em setembro e, em outubro, um novo reajuste de 10%. Responda às perguntas a seguir no caderno.

a) Quanto custava o botijão em outubro?

b) Qual foi a taxa percentual do aumento do preço do botijão de agosto para outubro?

Questão 2 – O preço da geladeira

Uma geladeira que custava R$ 3.200,00 entrou em liquidação em uma loja que oferece 20% de desconto nesse preço. Se o pagamento for à vista, a loja dá mais 5% de desconto sobre o valor a pagar. Responda às seguintes perguntas no caderno:

a) Na liquidação, por quanto será vendida a geladeira se o pagamento for à vista?

b) Na liquidação, de quantos por cento é o desconto sobre o preço inicial para pagamento à vista?

Questão 3 – A variação da produção

No ciclo anual encerrado em 2020, a produção de certa leguminosa no Brasil caiu 11% em relação ao ano de 2019 em razão de uma estiagem prolongada e das altas temperaturas durante o ciclo. Já em 2021, houve um crescimento de 28% em relação a 2020.

Reflita e responda no caderno: Em relação ao ciclo encerrado em 2019, a produção no ciclo de 2021 foi maior ou menor? De quantos por cento?

O fator multiplicador no aumento ou no desconto

Conforme já estudado nos anos anteriores, quando, por exemplo, o preço de uma mercadoria, V_i (valor inicial), sofre um acréscimo (aumento) ou decréscimo (desconto) de taxa percentual i, o valor final, V_f, pode ser calculado pela fórmula $V_f = V_i + i \cdot V_i$. Colocando V_i em evidência, obtemos:

$$V_f = V_i \cdot (1 + i)$$

Caso o valor inicial sofra um desconto de taxa percentual i, o valor final será dado por $V_f = V_i - i \cdot V_i$, portanto:

$$V_f = V_i \cdot (1 - i)$$

Em ambos os casos, o valor inicial fica multiplicado por um fator que chamamos de **fator multiplicador** e representaremos por f. Assim, o valor final sempre pode ser calculado pela fórmula:

$$V_f = V_i \cdot f$$

sendo $f = 1 + i$ em caso de aumento, ou $f = 1 - i$, em caso de desconto, e i a taxa percentual dada.

Orientações didáticas

Cálculo com porcentuais sucessivos

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA05**, ao propor a resolução e elaboração de problemas envolvendo porcentagens, na aplicação de percentuais sucessivos. Favorece também o desenvolvimento da **CEMAT05**, ao utilizar a calculadora como ferramenta digital na resolução de problemas. Mobiliza o TCT *Educação Financeira* ao trabalhar com situações-problema no contexto desse tema.

Esta seção abre com questões reflexivas sobre o aumento do preço do gás de cozinha. O GLP, gás liquefeito de petróleo, é um combustível fóssil que é obtido como um dos subprodutos do petróleo, como já mencionado no texto de abertura desta Unidade. Como diversas outras *commodities* (itens em estado bruto ou com baixo grau de industrialização e produzidos em larga escala), o gás de cozinha está sujeito às flutuações do mercado externo, inclusas as variáveis de oferta e demanda, bem como a decisões políticas e comerciais. Por isso, seu preço pode flutuar bastante, porém também é um item essencial para o bem-estar de uma família. Relacione em conjunto com os estudantes, os termos “imposto”, “frete” e preços de “distribuição” e “revenda” com os termos técnicos estudados até então, como montante, capital, juro e taxa de juro.

A questão **2** versa sobre um item de consumo bem menos frequente, chamado bem durável. É comum que itens da chamada “linha branca” estejam frequentemente sujeitos a isenções fiscais, pois costumam favorecer o aquecimento da economia. Utilize do termo “bem durável” para abordar a TCT *Educação para o Consumo*.

A questão **3**, sobre a variação da produção de certa leguminosa, apresenta um item de consumo perecível, e que, portanto, se mostra bem suscetível a intempéries, bem como a substituição em caso de falta ou alta abrupta do preço. Questione os estudantes se eles supõem que o aumento na produção deverá levar a um aumento ou uma redução do preço para consumidor final. Debatam as ideias e argumentos por meio dessa reflexão incentivando o uso do raciocínio lógico, e conhecimentos prévios de fontes diversas como internet, TV, rádio e *podcasts*. Os debates em sala incentivam o respeito ao pluralismo e à diversidade de ideias, bem como o uso de observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais, predicados estes requeridos para o desenvolvimento da **CEMAT04**, da **CEMAT06** e da **CEMAT08**.

O fator multiplicador no aumento ou no desconto

Busque pelas concepções prévias dos estudantes as ideias sobre o 100%. Pergunte: “Se 100% representa o todo, pode haver um valor maior do que 100%?”. Após colher esses dados, avalie e corrija eventuais concepções equivocadas, deixando claro o entendimento de que esse “todo” no contexto financeiro é relativo, e que não há um limite óbvio para aumento ou redução de determinado preço de um bem de consumo. Desse modo, um produto hoje poderá estar 110% de seu valor anterior, e isso representa um aumento de 10% em relação à referência que o contexto estabeleceu como sendo o valor base.

Orientações didáticas

Atividades

Na correção das atividades **11** a **16**, enfatize a necessidade do vocabulário formal e dos termos acréscimo e decréscimo, pois, além de serem termos utilizados no contexto escolar, também são comuns no cotidiano. Peça aos estudantes que, para cada uma das atividades, anotem os valores fornecidos e as respectivas letras que os representam, relacionando-os com seus conceitos, como valor final, fator multiplicador e demais.

Exemplos

I. Um carro valia R$ 40.000,00 e sofreu uma desvalorização de 20%. Quanto ele passou a valer?

Temos V_i = R$ 40.000,00 e $i = 20\% = \frac{20}{100} = 0{,}20$. Como houve decréscimo no preço do carro, o fator multiplicador é: $f = 1 - 0{,}20 = 0{,}80$. O valor final do carro é: $V_f = V_i \cdot f$ = R$ 40.000,00 · 0,80 = R$ 32.000,00.

II. No ano de 2021, uma loja vendeu 500 fogões e em 2022 vendeu 25% a mais. Quantos fogões vendeu em 2022?

Temos $V_i = 500$ e $i = 25\% = \frac{25}{100} = 0{,}25$. Como houve acréscimo nas vendas, o fator multiplicador é: $f = 1 + i = 1 + 0{,}25 = 1{,}25$.

A quantidade vendida em 2022 foi: $V_f = V_i \cdot f = 500 \cdot 1{,}25 = 625$.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

11. Suponha que o preço do litro da gasolina tenha aumentado em 10%.
a) Por quanto devemos multiplicar o preço antigo para calcular o novo preço do litro da gasolina? 1,10
b) Se o litro custava R$ 6,00 antes do aumento, quanto passou a custar? R$ 6,60

12. O aluguel de uma residência sofreu um acréscimo de 5%.
a) Por quanto devemos multiplicar o valor antigo do aluguel para calcular o novo valor? 1,05
b) Se antes do aumento o aluguel era R$ 900,00, qual passou a ser o valor após o aumento? R$ 945,00

13. Uma camisa está sendo vendida com 10% de desconto em uma liquidação.
a) Por quanto devemos multiplicar o preço da camisa para calcular o preço com o desconto? 0,90
b) Se o preço da camisa é R$ 120,00, por quanto está sendo vendida? R$ 108,00

14. Para liquidar uma dívida com a prefeitura, um cidadão recebeu a proposta para pagá-la com 30% de desconto.
a) Por quanto devemos multiplicar o valor da dívida para calcular o valor com o desconto? 0,70
b) Se a dívida era de R$ 3.600,00, quanto o devedor vai pagar por ela com o desconto? R$ 2.520,00

15. A mensalidade de uma escola aumentou de R$ 800,00 para R$ 840,00.
a) Por quanto foi multiplicado o valor da mensalidade? 1,05
b) De quantos por cento foi o aumento da mensalidade? 5%

16. Uma empresa faturou R$ 2.500.000,00 em 2021 e R$ 2.150.000,00 em 2022.
a) Por quanto devemos multiplicar o valor do faturamento de 2021 para obter o valor de 2022? 0,86
b) Em quantos por cento o faturamento reduziu em 2022 relativamente a 2021? 14%

Aumentos ou descontos sucessivos

Vamos resolver as questões propostas anteriormente.

Questão 1 – O aumento do preço do gás de cozinha

a) Um botijão de gás era vendido por R$ 100,00 em agosto, aumentou 4% em setembro e, em outubro, teve um novo aumento de 10%.
O preço desse botijão de gás em agosto foi multiplicado pelo fator:

$$f_1 = 1 + \frac{4}{100} = 1{,}04$$

para resultar no valor do botijão de gás em setembro.

Depois, para compor o preço do botijão de gás em outubro, o preço de setembro, que era $(100 \cdot 1{,}04)$ reais, foi multiplicado pelo fator:

$$f_2 = 1 + \frac{10}{100} = 1{,}10$$

Assim, o preço do botijão de gás em outubro era:

$$(100{,}00 \cdot 1{,}04) \cdot 1{,}10$$

que é o mesmo que:

$$100{,}00 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}10$$

Calculando esse valor, descobrimos que o preço do botijão de gás em outubro era R$ 114,40.

b) Agora, vamos descobrir de quanto foi o aumento no preço do botijão de gás de agosto para outubro. Conforme já estudado em anos anteriores, uma maneira de calcular o aumento percentual (i) é:

$$i = \left(\frac{(\text{valor novo} - \text{valor antigo})}{\text{valor antigo}} \times 100\right)\% = \left(\frac{(114{,}40 - 100{,}00)}{100{,}00} \times 100\right)\% = 14{,}4\%$$

Outra maneira de resolver é calcular o fator multiplicador do preço de agosto para outubro:

$$f = 1{,}04 \cdot 1{,}10 = 1{,}144$$

Então: $f = 1{,}144 \Rightarrow 1 + i = 1{,}144 \Rightarrow i = 1{,}144 - 1 = 0{,}144 = \frac{14{,}4}{100} = 14{,}4\%$.

O aumento foi de 14,4%.

Quando temos aumentos ou descontos sucessivos, o valor final, é dado por:

$$V_f = V_i \cdot f_1 \cdot f_2 \cdot \ldots \cdot f_n$$

em que V_i é o valor inicial e $f_1, f_2, \ldots, f_n$ são os fatores multiplicadores correspondentes aos aumentos ou descontos.

Questão 2 – O preço da geladeira

a) $3\,200{,}00 \cdot (1 - 0{,}20) \cdot (1 - 0{,}05) = 3\,200{,}00 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}95 = 2\,432{,}00$

Na liquidação, a geladeira sai, à vista, por R$ 2.432,00.

b) Para pagamento à vista o fator multiplicador é $f = 0{,}8 \cdot 0{,}95 = 0{,}76$.

Então, $1 - i = 0{,}76$ e daí, $i = 1 - 0{,}76 = 0{,}24$.

Como $0{,}24 = 24\%$, o desconto é de 24%.

Questão 3 – A variação da produção

Sendo Q a produção em 2019, a produção de 2021 é dada por:

$$Q \cdot (1 - 0{,}11) \cdot (1 + 0{,}28) = Q \cdot 0{,}89 \cdot 1{,}28 = Q \cdot 1{,}1392$$

Como $1{,}1392 = 1 + 0{,}1392$ e $0{,}1392 = 13{,}92\%$, relativamente ao ciclo encerrado em 2019, a produção de 2021 foi maior: teve um aumento de 13,92%.

No livro *Educação financeira: um guia de valor,* de Flávia Aidar (São Paulo: Moderna, 2016; Coleção Informação e Diálogo), as questões "Para que serve o dinheiro?", "Qual é a sua importância em nossa vida?" e "O que o modo como lidamos com ele tem a ver com as escolhas que fazemos?" norteiam o livro, que pretende ser um guia para que a Educação financeira saia da teoria e entre, de verdade, no nosso cotidiano.

Orientações didáticas

Aumentos ou descontos sucessivos

Neste tópico são resolvidas as 3 questões apresentadas anteriormente, para as quais propusemos discussões qualitativas. Retome as mesmas discussões anteriores, porém agora munido do equacionamento dos problemas e seus valores finais. Avalie se essas novas informações somam para o entendimento da discussão já estabelecida.

Reforce a ideia de que os aumentos ou descontos sucessivos representam a multiplicação de novos fatores, amplificando e tornando mais complexa a obtenção do valor final. Comente que, apesar de mais complexa, a tarefa não é necessariamente mais difícil, bastando para isso a capacidade de sistematização do raciocínio, chamado de pensamento computacional, e a correta captação e manipulação dos dados apresentados.

O boxe de sugestão de leitura traz informações sobre um livro que explora o TCT *Educação Financeira* e contribui para o desenvolvimento da cidadania dos estudantes, tornando-os mais aptos a tomar decisões assertivas em relação ao dinheiro.

Orientações didáticas

Atividades

As atividades **17** a **25** sugerem a aplicação dos conceitos relacionados a porcentuais sucessivos de modo qualitativo e quantitativo, requerendo que os estudantes reconheçam os termos e saibam orientar-se na aplicação das fórmulas apresentadas. Oriente-os para que as resoluções contenham anotações sobre os dados do enunciado e qual fórmula será usada. Dê atenção para o uso da unidade de medida de tempo correta, como mês, ano ou dia, para o determinado contexto de cada atividade.

Faça as atividades no caderno.

17. A cidade de Fortaleza (CE) tinha, em 2012, uma população de, aproximadamente, 2 500 000 habitantes. Em 2016, já eram, aproximadamente, 2 610 000, com um crescimento de 4,4%.
Se for mantida essa taxa de crescimento, 4,4% a cada 4 anos, qual será a população em 2024? Aproxime o valor para milhares de habitantes. Aproximadamente 2 845 milhares.

dayene.designer/Shutterstock

Praia de Iracema, Fortaleza (CE). Foto de 2018.

18. Uma fábrica de automóveis produziu 84 000 veículos em 2019. Em 2020, a produção foi 20% menor do que a de 2019, e, em 2021, 10% menor do que a de 2020.
a) Quantos veículos foram produzidos por essa fábrica em 2021? 60 480 veículos.
b) Em relação à produção de 2019, em quantos por cento caiu a produção em 2021? 28%

19. O preço de uma casa era estimado em R$ 40.000,00 em 2019. Em 2020, teve uma queda de 20% e, em 2021, uma valorização de 10% relativamente ao preço de 2020.
a) Em quanto estava estimado o valor da casa em 2021? R$ 35.200,00
b) Em 2022, crescendo 12% relativamente ao preço do imóvel em 2021, o valor da casa ficou acima ou abaixo do valor em 2019? Em quantos por cento? R$ 39.424,00, abaixo do valor de 2019; em 1,44%.

20. Um trabalhador recebe seu salário com desconto de 8%, que é destinado a uma contribuição relativa à previdência social, e, do que recebe, guarda 5% em uma caderneta de poupança. Que porcentual do salário esse trabalhador dispõe para cobrir suas despesas mensais? 87,4%

21. Dois aumentos sucessivos de 10% equivalem a um único aumento de quantos por cento? 21%

22. Um carro que, na compra, valia R$ 60.000,00 teve uma desvalorização por 2 anos seguidos de uma mesma taxa percentual a cada ano, passando a valer R$ 48.600,00. De quantos por cento foi a desvalorização anual desse carro? 10%

23. Mário aplicou R$ 4.200,00 em um fundo de investimentos que rendeu 12% no primeiro ano, 20% no segundo e, no terceiro, em razão da pandemia de covid-19, houve um prejuízo de 25%.
Quanto Mário resgatou ao fim desses 3 anos? R$ 4.233,60

24. Elabore um problema que possa ter a seguinte resolução:
$250,00 \cdot 1,10 \cdot 1,06 \cdot 0,90 = 262,35$
Resposta: R$ 262,35.
Exemplo de resposta: Um cartucho de tinta de uma impressora, que custava R$ 250,00, teve um aumento de 10% devido ao aumento do valor do dólar. Posteriormente, sofreu outro aumento de 6% em razão da inflação. Na liquidação de uma loja, esse produto passou a ser oferecido com um desconto de 10%. Qual era o preço do cartucho nessa loja durante a liquidação? Resposta: R$ 262,35.
Depois, troque com um colega para que ele resolva o problema que você elaborou enquanto você resolve o problema elaborado por ele.

25. Michele não pagou em dia a fatura do seu cartão de crédito e, por isso, a dívida foi aumentando 10% a cada mês. Qual foi o fator multiplicador da dívida após 6 meses? Em quantos por cento aumentou a dívida? 1,771561; aproximadamente 77,16%.

Proposta para o estudante

Seguem atividades complementares:

1. Em 2020, no Brasil, foram produzidas 255,4 milhões de toneladas de grãos. A produção em 2021 foi 0,9% menor do que a de 2020 e a de 2022, 2,3% maior do que a de 2021. Qual foi a produção em 2022? Use calculadora. Resposta: 258,9 milhões de toneladas.

2. Após dois aumentos sucessivos de 10% cada um no preço de uma mercadoria, ela estava sendo vendida em uma liquidação com 20% de desconto. Em relação ao preço inicial, o preço na liquidação aumentou ou diminuiu? De quanto? Resposta: Diminuiu de 3,2%.

3. Joelma tinha um salário de R$ 1.800,00 e recebeu 2 aumentos consecutivos de 4%.
a) Por qual número decimal devemos multiplicar o salário inicial de Joelma para determinar o salário dela após o primeiro aumento? E após o segundo aumento? Resposta: Por 1,04; por $1,04^2$.
b) Use uma calculadora para descobrir o valor do salário de Joelma após os 2 aumentos. Resposta: R$ 1.946,88.
c) Se alguém recebesse 5 aumentos consecutivos, todos de 10% sobre o salário anterior, por quanto deveríamos multiplicar o salário inicial para determinar o salário após todos os aumentos? Resposta: Por $1,1^5$.

Uso de internet no Brasil

Internet chega a ////////////////////// em cada dez domicílios do País

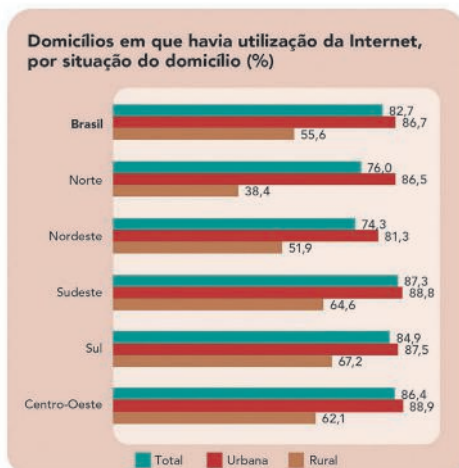
Em 2019, a internet era utilizada em 82,7% dos domicílios brasileiros. A maior parte desses domicílios fica concentrada nas áreas urbanas das Grandes Regiões do país, conforme se vê no gráfico.

Nas residências em que não havia utilização da internet, os motivos que mais se destacaram foram:

- falta de interesse em acessar a internet (32,9%);
- o serviço de acesso à internet era caro (26,2%); e
- nenhum morador sabia usar a internet (25,7%).

Dentre os domicílios localizados em área rural, um dos principais motivos da não utilização da internet continua sendo a indisponibilidade do serviço (19,2%). [...]

Entre os brasileiros com 10 anos ou mais de idade, a utilização da internet subiu de 74,7%, em 2018, para 78,3%, em 2019, segundo dados coletados no período de referência da pesquisa. Como nos anos anteriores, os menores percentuais de pessoas que utilizaram a internet foram observados na Região Nordeste (68,6%) e na Região Norte (69,2%).

O infográfico a seguir mostra as diferenças encontradas entre as Regiões e também por grupos de idade:

Fonte: IBGE, Diretoria de Pesquisas, Coordenação de Trabalho e Rendimento, Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua 2019.

Fonte: IBGE, Diretoria de Pesquisas, Coordenação de Trabalho e Rendimento, Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua 2018-2019.

Orientações didáticas

Na mídia

Na BNCC

Esta seção favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA05**, ao propor a resolução e elaboração de problemas envolvendo porcentagens. Mobiliza a **CEMAT01** e o TCT *Ciência e Tecnologia*, ao demonstrar que a internet é uma conquista fruto do trabalho de diversos membros da sociedade.

O texto apresenta o histórico da internet no Brasil e comenta que, em 2019, 82,7% dos domicílios brasileiros faziam uso da internet. Questione os estudantes se sabem há quanto tempo a internet é usada amplamente no Brasil e no mundo. Apesar de ter sido projetada em 1969 na Universidade da Califórnia, apenas em 1990 seu uso se tornou viável em larga escala, devido ao protocolo HTTP, responsável pela transferência de dados por endereços hospedados em *hyperlinks*. O uso dos *smartphones* amplificou ainda mais o uso da internet, mesmo que sua criação seja de aproximadamente 14 anos atrás, idade aproximada dos alunos do 9º ano coincidentemente. Avalie também abordar o TCT *Educação para o Consumo*, colhendo informações dos estudantes sobre se eles entendem o *smartphone* como um bem durável, tal qual a geladeira, ou não. Pergunte aos estudantes: “De quanto em quanto tempo é aceitável ou comum fazer a compra de um novo celular?”.

Proposta para o estudante

Peça aos estudantes que pesquisem o significado de “obsolescência programada” e o que isso significa em suas vidas em termos financeiros, sociais e culturais.

Proposta para o professor

Saiba mais sobre o assunto em:
UMA visão geral do HTTP. *MDN* Web Docs, [*s. l.*], [*s. d.*]. Disponível em: https://developer.mozilla.org/pt-BR/docs/Web/HTTP/Overview. Acesso em: 15 jun. 2022.

Orientações didáticas

Na mídia

Esta seção também é uma ótima oportunidade para desenvolver os TCTs *Vida Familiar e Social* e *Processo de envelhecimento, respeito e valorização do Idoso*, e a interdisciplinaridade com o componente curricular **Geografia**.

Proponha aos estudantes uma pesquisa sobre o envelhecimento da população e ações que visem incluir esses cidadãos no mundo digital, para que utilizem diferentes tecnologias de informação e comunicação.

Celular é o equipamento mais usado para o acesso à internet

O quadro [...] demonstra que a porcentagem das pessoas com 10 anos ou mais de idade que acessam a internet por meio de celular e de televisão ////////////, enquanto a porcentagem das que acessam a internet por meio de microcomputador ou *tablet* ////////////:

Fonte: IBGE, Diretoria de Pesquisas, Coordenação de Trabalho e Rendimento, Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua 2018-2019.

[...]

USO DE INTERNET, televisão e celular no Brasil. *IBGE Educa*, [*s. l.*], [2022?]. Disponível em: https://educa.ibge.gov.br/criancas/brasil/2697-ie-ibge-educa/jovens/materias-especiais/20787-uso-de-internet-televisao-e-celular-no-brasil.html. Acesso em: 14 abr. 2022.

1. Considere a seguinte manchete sobre os dados anteriores:
   "Internet chega a //////////// em cada dez domicílios do país"
   Que palavra (número) deve completar a manchete? Por quê? Oito; 82,7% de 10 é aproximadamente 8.
2. Na região Norte, que porcentual dos domicílios das áreas urbanas acessava à internet em 2019? E da área rural? 86,5%; 38,4%.
3. Em 2019, em que região do país havia, relativamente ao total de habitantes, mais pessoas utilizando a internet? Centro-Oeste, 84,6% das pessoas.
4. Em qual das faixas etárias ocorreu, de 2018 para 2019, o maior aumento percentual de pessoas acessando a internet? Na faixa de 60 anos ou mais, acréscimo de $\frac{6,3}{38,7} \cdot 100\% \simeq 16,3\%$.
5. Qual era o equipamento mais usado, em 2019, para o acesso à internet? Celular.
6. Que palavras completam a frase sobre os equipamentos usados para o acesso à internet? Aumentou; diminuiu.

Na Unidade

Faça as atividades no caderno.

1. (Enem) Uma indústria tem um reservatório de água com capacidade para 900 m^3. Quando há necessidade de limpeza do reservatório, toda a água precisa ser escoada. O escoamento da água é feito por seis ralos e dura 6 horas quando o reservatório está cheio. Esta indústria construirá um novo reservatório, com capacidade de 500 m^3, cujo escoamento da água deverá ser realizado em 4 horas, quando o reservatório estiver cheio. Os ralos utilizados no novo reservatório deverão ser idênticos aos do já existente.

A quantidade de ralos do novo reservatório deverá ser igual a: Alternativa **c**.

a) 2. **b)** 4. **c)** 5. **d)** 8. **e)** 9.

2. (Enem) Uma escola lançou uma campanha para seus alunos arrecadarem, durante 30 dias, alimentos não perecíveis para doar a uma comunidade carente da região.

Vinte alunos aceitaram a tarefa e nos primeiros 10 dias trabalharam 3 horas diárias, arrecadando 12 kg de alimentos por dia. Animados com os resultados, 30 novos alunos somaram-se ao grupo e passaram a trabalhar 4 horas por dia nos dias seguintes até o término da campanha.

Admitindo-se que o ritmo de coleta tenha se mantido constante, a quantidade de alimentos arrecadados ao final do prazo estipulado seria de:

a) 920 kg. **c)** 720 kg. **e)** 570 kg.
b) 800 kg. **d)** 600 kg. Alternativa **a**.

3. (ESPM-SP) Em 10 minutos, 27 secretárias com a mesma habilidade digitaram o equivalente a 324 páginas. Nas mesmas condições, se o número de secretárias fosse 50, em quantos minutos teoricamente elas digitariam 600 páginas?

a) 10 minutos. Alternativa **a**.
b) 45 minutos.
c) 5 minutos.
d) 5 minutos e 24 segundos.
e) 34 minutos e 29 segundos.

4. (PUCC-SP) Sabe-se que 5 máquinas, todas de igual eficiência, são capazes de produzir 500 peças em 5 dias, se operarem 5 horas por dia. Se 10 máquinas iguais às primeiras operassem 10 horas por dia durante 10 dias, o número de peças produzidas seria: Alternativa **c**.

a) 1 000. **c)** 4 000. **e)** 8 000.
b) 2 000. **d)** 5 000.

5. Uma empresa de empréstimo pessoal emprestou R$ 500,00 a um cliente, para receber em 6 meses acrescidos de juro simples de 10% ao ano. Quanto essa empresa vai receber quando o cliente pagar o empréstimo? Alternativa **b**.

a) R$ 520,00 **c)** R$ 550,00
b) R$ 525,00 **d)** R$ 575,00

6. (Unicamp-SP) Uma compra no valor de 1 000 reais será paga com uma entrada de 600 reais e uma mensalidade de 420 reais. Alternativa **b**.

A taxa de juros aplicada na mensalidade é igual a:

a) 2%. **b)** 5%. **c)** 8%. **d)** 10%.

7. (Unicamp-SP) Dois anos atrás certo carro valia R$ 50.000,00 e atualmente vale R$ 32.000,00. Supondo que o valor do carro decresça a uma taxa anual constante, daqui a um ano o valor do carro será igual a: Alternativa **a**.

a) R$ 25.600,00. **c)** R$ 23.000,00.
b) R$ 24.400,00. **d)** R$ 18.000,00.

8. (Enem)

A cerâmica constitui-se em um artefato bastante presente na história da humanidade.
Uma de suas várias propriedades é a retração (contração), que consiste na evaporação da água existente em um conjunto ou bloco cerâmico quando submetido a uma determinada temperatura elevada.
Essa elevação de temperatura, que ocorre durante o processo de cozimento, causa uma redução de até 20% nas dimensões lineares de uma peça.

Disponível em: www.arq.ufsc.br. Acesso em: 3 mar. 2012.

Suponha que uma peça, quando moldada em argila, possuía uma base retangular cujos lados mediam 30 cm e 15 cm. Após o cozimento, esses lados foram reduzidos em 20%.

Em relação à área original, a área da base dessa peça, após o cozimento, ficou reduzida em:

a) 4%. **c)** 36%. **e)** 96%.
b) 20%. **d)** 64%. Alternativa **c**.

Orientações didáticas

Na Unidade

Na BNCC

Esta seção favorece o desenvolvimento das habilidades exploradas ao longo de toda a Unidade e mobiliza com maior ênfase a **CEMAT02**, a **CEMAT06** e a **CG02**, ao propor a resolução de atividades diversas por meio de diferentes contextos e estratégias de resolução.

Esta seção traz atividades dos principais conteúdos abordados na Unidade que podem ser utilizadas como ferramentas de avaliação. Proponha a resolução das atividades individualmente. Acompanhe os estudantes durante a realização delas e registre avanços e dificuldades para, ao final, propor novas atividades para remediação coletiva ou individual de defasagens, conforme cada caso.

A seguir, listamos algumas sugestões e estratégias para remediação.

As atividades **1** a **4** envolvem grandezas de espécies diferentes relacionadas proporcionalmente de maneira direta ou indireta. Erros nessas atividades indicam que os estudantes não compreenderam a propriedade fundamental da proporção e/ou as relações algébricas que representam grandezas diretamente proporcionais e inversamente proporcionais. Retome esses conteúdos com exemplos, principalmente, a montagem do esquema da regra de três simples.

As atividades **5** e **6** envolvem conceitos relacionados a juro. É possível que os estudantes confundam juro com taxa ao aplicar a fórmula $j = \frac{c \cdot i \cdot t}{100}$. Explique que o juro é uma quantia, no caso do Brasil, em reais, e taxa, nessa fórmula, é a taxa de juro, quantos porcento será aplicado a determinado capital, por determinado tempo, que gerará o valor do juro.

As atividades **7** e **8** envolvem porcentuais sucessivos. Erros nessas atividades indicam que os estudantes podem não ter compreendido que a cada acréscimo ou decréscimo de um valor inicial há um fator multiplicador associado. Retome esses conceitos e os exemplos dados no tópico “Cálculo com porcentuais sucessivos” e, se necessário, apresente outros exemplos do cotidiano.

Outras dificuldades diferentes das listadas podem surgir; por isso, é importante o monitoramento individual e contínuo dos estudantes.

Orientações didáticas

Abertura

Na BNCC

A abertura da Unidade mobiliza com maior ênfase a **CG07,** a **CG10** e a **CEMAT07**, além de favorecer o desenvolvimento do TCT *Educação Ambiental*, ao propor uma reflexão sobre a importância da preservação do meio ambiente e o seu impacto na vida cotidiana.

Aproveite a leitura desse texto sobre Áreas de Preservação Permanente (APP) para trabalhar de forma interdisciplinar com os professores dos componentes curriculares de **Ciências** e **Geografia**, a fim de promover a argumentação baseada nos dados apresentados no texto, sobre a necessidade da manutenção de APP, tanto sob o ponto de vista dos aspectos da vida selvagem, quanto da preservação ambiental para a sociedade. Espera-se que os estudantes compreendam a importância da Matemática nesse controle estabelecido pelas unidades de medida apresentadas no texto.

Rio Amazonas (AM). Foto de 2019.

worldclassphoto/Shutterstock

As imagens não estão representadas em proporção.

APP de margens de rios, ribeirões e riachos

30 m
50 m
100 m
200 m
500 m
Menos de 10 m
De 10 a 50 m
De 50 a 200 m
De 200 m a 600 m
> 600 m

Reprodução/http://www.ciflorestas.com.br

Fonte dos dados: BEDÊ, Júlio Cadaval. *Cartilha sobre a nova lei florestal de Minas Gerais* – Orientações aos produtores rurais. Assembleia legislativa de Minas Gerais: 2013. Disponível em: https://www.terrabrasilis.org.br/ecotecadigital/images/abook/pdf/set_14_69.pdf. Acesso em: 31 maio 2022.

Exemplos de como calcular as Áreas de Preservação Permanente (APP).

Áreas de Preservação Permanente

Com o objetivo de preservar os recursos hídricos, a paisagem e a biodiversidade e proteger o solo, a legislação ambiental brasileira estabelece algumas normativas que definem quais são as Áreas de Preservação Permanente (APP) do país. Essas áreas podem se localizar na zona rural ou na zona urbana e ser cobertas ou não por vegetação nativa.

As APP são áreas naturais intocáveis, com rígidos limites de exploração, ou seja, não é permitida a exploração econômica direta. Os órgãos ambientais podem abrir exceções e autorizar o desmatamento dessas áreas; entretanto, para isso, devem comprovar a utilidade pública e o interesse social do empreendimento, além do baixo impacto ambiental, de acordo com o artigo 8º da Lei n. 12651/12.

Nos cursos de água naturais, a medida de área de preservação a partir da margem varia de 30 m a 500 m, de acordo com a medida de largura do rio, conforme pode-se verificar na ilustração desta página.

A Amazônia possui diversas APPs e a fiscalização ocorre através do uso de imagens de satélite e análises por meio de Sistema de Informação Geográfica (SIG). Esse método detecta a distância de infrações contra as APPs, principalmente desmatamentos, e reduz o tempo e o custo das vistorias de campo.

O rio Amazonas é cercado por APPs e detém a maior vazão de água do mundo, além de ser o mais extenso do mundo, com aproximadamente 6,9 mil quilômetros, ultrapassando o rio Nilo, com aproximadamente 6,6 mil quilômetros, segundo novas medições via satélite realizadas pelo Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (Inpe) em 2016. A nascente do rio Amazonas está nos Andes, do Peru, e o rio percorre os países: Peru, Colômbia e Brasil.

Fontes dos dados: O que é uma Área de Preservação Permanente. *O Eco*, Rio de Janeiro, 12 ago. 2013. Disponível em: https://oeco.org.br/dicionario-ambiental/27468-o-que-e-uma-area-de-preservacao-permanente/.
FIRESTONE, L.; BARRETO, P.; SOUZA JR., C. Controle de áreas de preservação permanente na Amazônia: inovações tecnológicas para detectar infrações ambientais. *Imazon,* Belém, 5 jun. 2001. Disponível em: https://imazon.org.br/publicacoes/controle-de-areas-de-preservacao-permanente-na-amazonia-inovacoes-tecnologicas-para-detectar-infracoes-ambientais/. GUITARRARA, Paloma. Rio Amazonas. *Brasil Escola* [*s. l.*], [202-]. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/brasil/rio-amazonas.htm.
Com 6692 km de comprimento, o rio Amazonas é o mais extenso do mundo. *Portal Amazônia*, 27 jul. 2021. Disponível em: https://portalamazonia.com/amazonia/com-6-992-km-de-cumprimento-o-rio-amazonas-e-o-mais-extenso-do-mundo. Acessos em: 14 jul. 2022.

Você conhece alguma APP? Em sua opinião, quais são as vantagens de estabelecer áreas de preservação permanente?

Resposta pessoal. Exemplo de resposta: As vantagens de estabelecer APPs são evitar desmatamentos e preservar o meio ambiente.

Orientações didáticas

Abertura

Formule questões reflexivas sobre o tema Área de Preservação Ambiental para motivar os estudantes a pesquisar sobre as APPs, por exemplo: "O que são as APPs urbanas e as rurais?"; "Quais são as diferenças entre elas?"; "Como as APPs podem ser indevidamente ocupadas?"; "Como a ocupação de APPs pode ser perigosa?".

Proposta para o professor

Para aprofundar o conhecimento sobre Áreas de Preservação Permanente (APPs) indicamos o artigo (2016) que apresenta possibilidades de utilização de temas ambientais nas aulas de Matemática.
LIELL, C. C.; BAYER, A. Projetos interdisciplinares: uma alternativa para o trabalho com temas ambientais nas aulas de matemática. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, v. 9, n. 2, p. 329-347, 2016.

Referências para auxiliar a destacar APPs urbanas e o perigos em ocupar algumas dessas áreas.

SASSON, J. M. W.; BRITO, F. P. M. de. Área de preservação permanente urbanas: Entre dilemas e possibilidades. *R-PGMFOR – Revista da Procuradoria Geral do Município de Fortaleza,* v. 26, n. 2, 2019. Disponível em: https://revista.pgm.fortaleza.ce.gov.br/index.php/revista1/article/view/186.
SENADO FEDERAL. Áreas de risco não devem receber infraestrutura, sugerem consultores. *Agência Senado*. 2011. Disponível em: https://www12.senado.leg.br/noticias/materias/2011/01/31/areas-de-risco-nao-devem-receber-infraestrutura-sugerem-consultores. Acesso em: 28 jun. 2022.

Orientações didáticas

Comparação de grandezas

Na BNCC

Aproveite o contexto sobre a construção de ciclovias, proponha um debate em sala em que são discutidos os impactos desse tipo de via na sua cidade, em regiões metropolitanas e capitais, mobilizando com maior ênfase a **CG09**, a **CG10** e a **CEMAT07**, uma vez que a Matemática é apresentada como ferramenta de melhoria de mobilidade urbana.

Este tópico auxilia na compreensão da ideia de proporcionalidade que será aprofundada a seguir, aplicada ao teorema de Tales.

Antes de iniciar a leitura do texto, pergunte aos estudantes se já utilizaram ciclovias. A leitura pode ser feita individualmente ou com toda a sala, de modo que sejam consideradas, ao final, as diferentes impressões e entendimentos acerca do que foi lido.

Pergunte aos estudantes o que entendem do trecho "maior proporção de vias destinadas a bicicletas em relação à malha viária total (13,4%)". Se necessário, retome o conceito de porcentagem e explique como esse conceito possibilita a comparação entre elementos com diferentes totais.

CAPÍTULO 9

Teorema de Tales

EF09MA10
EF09MA14

Comparação de grandezas

Com o crescimento da frota de automóveis e consequentes problemas no trânsito das grandes cidades, as bicicletas estão ganhando espaço nas malhas viárias urbanas do país. Leia o texto a seguir.

Malha cicloviária das capitais cresce 133% em 4 anos e já passa de 3 mil quilômetros

São 3 291 km de vias destinadas aos ciclistas; em 2014, eram 1 414 km. Ainda assim, elas correspondem a apenas 3,1% da malha viária total das cidades.

[...]

As capitais do país já contam com 3 291 km de vias destinadas a bicicletas, o que representa um aumento de 133% em quatro anos. É o que mostra levantamento feito pelo G1 e pela GloboNews junto às prefeituras das 26 cidades e ao governo do Distrito Federal. Os dados são referentes ao mês de julho [de 2018].

[...]

A cidade de Rio Branco continua com a maior proporção de vias destinadas a bicicletas em relação à malha viária total (13,4%) e ao número de habitantes (3 570 por km de via), assim como no primeiro e no último levantamentos do G1.

Daniel Cruz/Fotoarena

Ciclovia na cidade de Rio Branco (AC). Foto de 2021.

Mas outras capitais também merecem destaque. No último ano, a malha cicloviária de Brasília, por exemplo, ultrapassou a do Rio de Janeiro. Hoje, ela fica atrás somente de São Paulo. Mas a meta do governo é ainda em 2018 alcançar o topo do *ranking*, com 600 km de pistas para bicicletas.

VELASCO, Clara *et al*. Malha cicloviária das capitais cresce 133% em 4 anos e já passa de 3 mil quilômetros. *G1*, 28 ago. 2018. Disponível em: https://g1.globo.com/economia/noticia/2018/08/28/malha-cicloviaria-das-capitais-cresce-133-em-4-anos-e-ja-passa-de-3-mil-quilometros.ghtml. Acesso em: 23 mar. 2022.

De acordo com essa pesquisa, a cidade de Rio Branco, no Acre, tinha, em 2018, 107,4 km de ciclovias, que representavam 13,4% de sua malha viária – a maior proporção no país –, e apenas 3 570 habitantes por quilômetro de malha cicloviária.

Já em Manaus, no Amazonas, por exemplo, os 37,4 km de ciclovias representavam 0,85% da malha viária, com 56 901 habitantes por quilômetro de malha cicloviária. Assim, comparando os números das duas capitais, a população de Rio Branco tem mais acesso à ciclovia do que a população de Manaus.

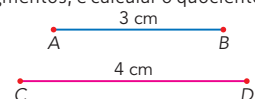
No texto da notícia sobre malha cicloviária, as taxas porcentuais citadas expressam a comparação entre a medida de extensão das ciclovias e a da malha viária de cada cidade.

Uma maneira de comparar duas grandezas, como o comprimento de dois segmentos, é calcular o quociente entre suas medidas.

Por exemplo, consideremos os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, cujas medidas são 3 cm e 4 cm, respectivamente.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

É certo que a medida de $\overline{AB}$ é menor do que a de $\overline{CD}$, mas podemos obter uma informação mais detalhada se calcularmos o quociente $\frac{AB}{CD}$. Vamos verificar: $\frac{AB}{CD} = \frac{3\text{ cm}}{4\text{ cm}} = \frac{3}{4} = 0,75$.

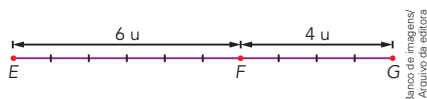
Assim, a medida de $\overline{AB}$ corresponde a $\frac{3}{4}$ da medida de $\overline{CD}$, ou seja, $\overline{AB}$ corresponde a 75% de $\overline{CD}$.

Proposta para o estudante

Com o contexto sobre as ciclovias, sugerimos que seja solicitada aos estudantes uma pesquisa sobre impactos das ciclovias nas cidades. Deixe que os estudantes exponham o material apresentado. Durante a exposição, encontramos um bom momento para exercitar a empatia e a escuta ativa, favorecendo também o trabalho com a **CG09** e a **CG10**, e também com a **CEMAT07**, uma vez que a Matemática é apresentada como ferramenta de melhoria da mobilidade urbana.

Razão de segmentos de reta

Considerando o exemplo dado anteriormente, dizemos que a razão entre as medidas dos segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ é $\frac{3}{4}$.

Acompanhe outros exemplos.

Consideremos os segmentos de reta $\overline{EF}$, de medida 6 u, e $\overline{FG}$, de medida 4 u, sendo **u** uma unidade de medida qualquer de comprimento (cm, dm, m, etc.).

Vamos estabelecer a razão entre as medidas dos segmentos de reta $\overline{EF}$ e $\overline{FG}$:

$$\frac{EF}{FG} = \frac{6\text{ u}}{4\text{ u}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Portanto, $\overline{EF}$ corresponde a $\frac{3}{2}$ (ou uma vez e meia) de $\overline{FG}$.

Dizemos que a razão entre os segmentos de reta $\overline{EF}$ e $\overline{FG}$ é $\frac{3}{2}$ ou que $\overline{EF}$ está para $\overline{FG}$ na razão de 3 para 2.

Vamos agora determinar a razão entre os segmentos de reta $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$ cujas medidas são 0,2 m e 50 cm, respectivamente. Inicialmente, devemos transformar as medidas deles em uma mesma unidade de medida:

$$MN = 0{,}2\text{ m} = 20\text{ cm}$$

Em seguida, estabelecemos a razão:

$$\frac{MN}{PQ} = \frac{20\text{ cm}}{50\text{ cm}} = \frac{20}{50} = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

A razão entre os segmentos de reta $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$ é $\frac{2}{5}$.

Podemos, assim, definir o que é razão entre segmentos de reta:

> Quando nos referimos à **razão entre dois segmentos de reta**, na realidade estamos nos referindo à razão entre suas medidas, tomadas na mesma unidade. Dados dois segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, a razão entre eles é $\frac{AB}{CD}$.

Segmentos de reta proporcionais

Consideremos as medidas dos segmentos de reta seguintes: $AB = 8$ cm, $CD = 20$ cm, $MN = 10$ cm e $PQ = 25$ cm.

Vamos obter as razões $\frac{AB}{CD}$ e $\frac{MN}{PQ}$:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{8\text{ cm}}{20\text{ cm}} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} \qquad \frac{MN}{PQ} = \frac{10\text{ cm}}{25\text{ cm}} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

As razões $\frac{AB}{CD}$ e $\frac{MN}{PQ}$ são iguais a $\frac{2}{5}$. Logo, elas são iguais entre si.

Temos, então, a igualdade de 2 razões: $\frac{AB}{CD} = \frac{MN}{PQ}$, que é uma **proporção**.

De modo geral, podemos afirmar que:

> Se 4 segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$ formam a proporção $\frac{AB}{CD} = \frac{MN}{PQ}$, dizemos que $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são proporcionais a $\overline{MN}$ e $\overline{PQ}$.

Orientações didáticas

Razão de segmentos de reta

Para melhor compreender os exemplos e conteúdos abordados na página, é importante verificar se os estudantes sabem encontrar frações equivalentes. Além disso, é interessante ressaltar a nomenclatura utilizada para segmentos de reta e para suas medidas.

Reforce as definições formais de razão e proporção de segmentos apresentadas nos quadros, destacando mais uma vez, a nomenclatura de segmentos e medidas de segmentos.

Peça aos estudantes para observarem que nas frações está sendo feita uma referência à medida desses segmentos. Crie outros exemplos, se necessário, registrando segmentos de retas na lousa e pedindo aos estudantes que determinem as proporções entre os segmentos.

Orientações didáticas

Atividades

As atividades **1** e **2** são de aplicação direta do conceito de razão de segmentos. Peça aos estudantes para observarem as frações obtidas, de modo que, apenas pelos resultados seja possível analisar se a medida do segmento de reta do numerador é maior ou menor do que a do denominador.

Para a atividade **3**, é importante relembrar a definição de congruência de segmentos. É possível que estudantes tenham dificuldade na realização da atividade por não ter sido fornecida a medida dos segmentos.

Caso os estudantes tenham dificuldades para realizar a atividade **5**, é possível recomendar que repartam o $\overline{AB}$ em 2 partes e o $\overline{BC}$ em 3. Dessa forma, ficará evidente que $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$ e que $\frac{AB}{AC} = \frac{2}{5}$ e $\frac{BC}{AC} = \frac{3}{5}$.

Nas atividades **6**, **7** e **8**, se necessário, lembre os conceitos de geometria pedidos, como base e altura de um retângulo, perímetro de um paralelogramo e ponto médio de um segmento de reta.

Feixe de retas paralelas

Na BNCC

Este tópico mobiliza com maior ênfase a **CEMAT02** na demonstração de fatos matemáticos, incentivando os estudantes a pensar criticamente a respeito dos resultados obtidos nos estudos de Matemática.

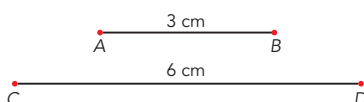
Antes de iniciar este tópico, é importante que os estudantes entendam o conceito de reta e que se lembrem das posições relativas entre elas.

Atividades

As imagens não estão representadas em proporção.

Faça as atividades no caderno.

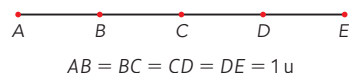
1. Responda no caderno: Qual é a razão entre os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ da figura a seguir? $\frac{1}{2}$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

2. Sabendo que $AB = 10$ cm, $RS = 16$ cm e $PQ = 30$ cm, determine as razões:

a) $\frac{AB}{RS}$ $\frac{5}{8}$ b) $\frac{RS}{AB}$ $\frac{8}{5}$ c) $\frac{RS}{PQ}$ $\frac{8}{15}$ d) $\frac{PQ}{AB}$ 3

3. Nesta figura, os segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DE}$ são congruentes.

Banco de imagens/Arquivo da editora

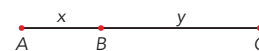
$AB = BC = CD = DE = 1$ u

Estabeleça as razões:

a) $\frac{AB}{BC}$ 1 c) $\frac{AC}{CE}$ 1 e) $\frac{BC}{AE}$ $\frac{1}{4}$

b) $\frac{AB}{BE}$ $\frac{1}{3}$ d) $\frac{AD}{AB}$ 3

4. Os segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são proporcionais aos segmentos de reta $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$, respectivamente. Se $AB = 2$ cm e $EF = 8$ cm, determine a medida de $\overline{CD}$. 4 cm

5. Determine a medida dos segmentos de reta $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ da figura, sabendo que $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$ e $AC = 35$ cm. $x = 14$ cm e $y = 21$ cm.

Banco de imagens/Arquivo da editora

6. A razão entre as medidas da base e da altura de um retângulo é $\frac{5}{2}$. Se a base mede 15 m, determine a medida de perímetro do retângulo. 42 m

7. A razão entre 2 lados de um paralelogramo é $\frac{2}{3}$. Se a medida de perímetro do paralelogramo é 150 m, determine as medidas dos lados. 30 m; 45 m.

8. Se M é o ponto médio de um segmento de reta $\overline{AB}$, determine a razão $\frac{AM}{MB}$. 1

Feixe de retas paralelas

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Um conjunto de retas de um plano, todas paralelas entre si, é chamado de **feixe de retas paralelas**.

Transversal do feixe

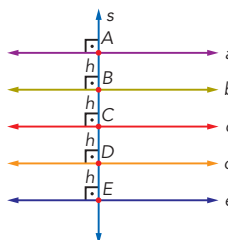
Uma reta que concorre com todas as retas de um feixe de retas paralelas é chamada **transversal** desse feixe.

Retas paralelas igualmente espaçadas

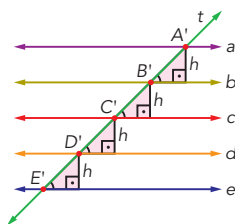
Sobre uma reta s estão marcados os pontos A, B, C, D, E, ... de modo que: $AB = BC = CD = DE = ... = h$.

Vamos traçar, passando por um a um desses pontos, retas perpendiculares a s.

Percebemos que as retas a, b, c, d, e, ... são paralelas entre si. Dizemos, então, que elas são **retas paralelas igualmente espaçadas**.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Proposta para o estudante

Para melhor compreensão da ideia de retas igualmente espaçadas, se achar pertinente, exemplifique a situação com objetos cotidianos, como escada, cerca ou portão. É possível, também, propor um trabalho de campo, no qual os estudantes medem a distância entre um degrau e outro de uma escada qualquer (de casa ou do colégio), a fim de verificar se são igualmente espaçados. Caso sejam, proponha que meçam também a distância entre as pontas de dois degraus (como se fosse a hipotenusa do triângulo retângulo formado), a fim de verificar que também apresentam a mesma medida.

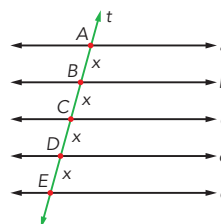
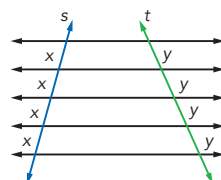
Quando consideramos um feixe de retas paralelas igualmente espaçadas e uma reta transversal t qualquer, a reta t intersecta as retas do feixe em A', B', C', D', E', etc.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

O que podemos afirmar sobre $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$, etc.? Essas medidas são iguais, uma vez que os triângulos destacados na figura são todos congruentes entre si.

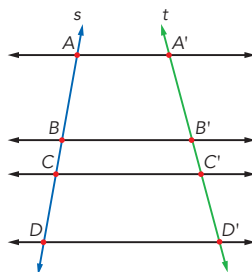
Consequentemente, quando temos um feixe de retas paralelas igualmente espaçadas e duas retas transversais s e t quaisquer, o feixe determina em s segmentos de reta todos congruentes entre si (com medida x) e também determina em t segmentos de reta todos congruentes entre si (com medida y).

Também é correto afirmar que, se considerarmos uma reta transversal t, nela marcarmos os pontos A, B, C, D, E, etc., de modo que $AB = BC = CD = DE = \ldots = x$, e traçarmos por esses pontos um feixe de paralelas, as retas do feixe (a, b, c, d, e, ...) serão igualmente espaçadas (o que pode ser provado usando-se a congruência de triângulos).

Podemos, então, enunciar:

> Se um feixe de retas paralelas determina segmentos de reta congruentes sobre uma reta transversal, então determina segmentos de reta congruentes sobre qualquer outra reta transversal.

Teorema de Tales

A figura a seguir mostra um feixe de retas paralelas com duas retas transversais. Dizemos que são **correspondentes**:

- os pontos: A e A', B e B', C e C', D e D';
- os segmentos de reta: $\overline{AB}$ e $\overline{A'B'}$, $\overline{CD}$ e $\overline{C'D'}$, $\overline{AC}$ e $\overline{A'C'}$, etc.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Orientações didáticas

Feixe de retas paralelas

Caso julgue necessário, retome o conceito de reta e as posições relativas entre retas e pergunte: "Quais objetos do nosso dia a dia podem ser comparados a retas?"; "E a retas paralelas?"; É possível que respondam rodovias, fios elétricos, degraus de escadas, entre outras coisas. No caso dos degraus de escadas, ressalte que é mais adequado comparar a segmentos de reta paralelos, mas enfatize que todo segmento de reta tem uma reta suporte. Valorize a diversidade de respostas que surgirem.

Teorema de Tales

Na BNCC

Este tópico trabalha com a habilidade **EF09MA14** e mobiliza com maior ênfase a **CEMAT02**, ao explorar as demonstrações e os resultados relacionados ao teorema de Tales, incentivando o desenvolvimento do pensamento crítico a respeito de resultados da Matemática. Em *Atividades*, mobiliza-se a **CEMAT05** ao propor a resolução de atividade em que a Matemática é apresentada como ferramenta para a resolução de um problema cotidiano.

Para dar continuidade ao tópico anterior, é possível iniciar este tópico com a seguinte pergunta: "O que ocorre com os segmentos de reta paralelos, quando estes não são igualmente espaçados? Será que é possível estabelecer alguma relação entre eles?" Ou, então, fomente a discussão por meio dos seguintes questionamentos: "Ao traçar paralelas igualmente espaçadas entre as paralelas existentes, o que você observa?"; "Quantas foram traçadas entre as duas primeiras?"; "E entre as duas últimas?"; "Como você calcularia a razão entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$?"; "E entre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$?"; "O que podemos concluir a respeito dessas razões?" Permita que os estudantes compartilhem suas conclusões e desenvolva o raciocínio junto com eles, a partir de suas considerações iniciais.

Orientações didáticas

Teorema de Tales

Após o término da tarefa proposta usando os questionamentos aqui sugeridos, auxilie os estudantes a formalizar o conceito observado, enfatizando as relações em destaque e enunciando-as como o teorema de Tales. Para finalizar, aproveite a última imagem deste tópico e substitua as variáveis a, b, c, a', b' e c' por diferentes valores, a fim de proporcionar o entendimento por meio de outros exemplos.

Vamos supor que exista um segmento de reta de medida x que "caiba" p vezes em $\overline{AB}$ e q vezes em $\overline{CD}$, e que p e q sejam números inteiros, $p > 0$ e $q > 0$. Na figura, $p = 5$ e $q = 4$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Teremos, então:

$$AB = p \cdot x \text{ e } CD = q \cdot x$$

Estabelecendo a razão $\frac{AB}{CD}$, teremos:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{p \cdot x}{q \cdot x} \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{p}{q} \quad (1)$$

Então:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{5}{4}$$

Conduzindo retas do feixe pelos pontos de divisão de $\overline{AB}$ e de $\overline{CD}$ (note as linhas tracejadas na figura), temos que:

- o segmento de reta $\overline{A'B'}$ fica dividido em p partes congruentes (de medida x'), então $A'B' = p \cdot x'$;
- o segmento de reta $\overline{C'D'}$ fica dividido em q partes congruentes (também de medida x'), então $C'D' = q \cdot x'$;
- ao estabelecermos a razão $\frac{A'B'}{C'D'}$, temos:

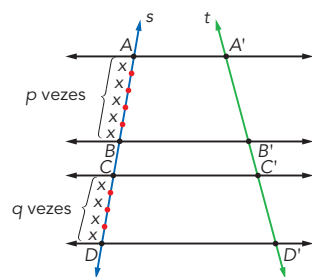
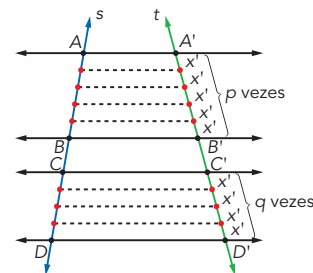
$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{p \cdot x'}{q \cdot x'} \Rightarrow \frac{A'B'}{C'D'} = \frac{p}{q} \quad (2)$$

- comparando as igualdades (1) e (2), obtemos:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'}, \text{ logo: } \frac{A'B'}{C'D'} = \frac{5}{4}$$

Assim, podemos concluir que:

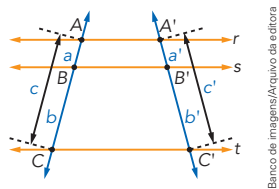
Essa conclusão provou-se verdadeira, inclusive quando a razão $\frac{p}{q}$ não é um número racional. Esta conclusão é conhecida como **teorema de Tales** e pode ser enunciada como:

Se duas retas são transversais de um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos de reta quaisquer de uma delas é igual à razão entre os segmentos de reta correspondentes da outra.

Proposta para o estudante

Para melhor compreensão do teorema de Tales ou até mesmo para o desenvolvimento de uma tarefa de exploração, sugerimos o uso de uma atividade de Salgado (*s. n.*). Nessa atividade, ao movimentar os pontos indicados com um ×, são formados diferentes segmentos entre retas paralelas cortadas por transversais e são indicadas as razões desses segmentos, que se mantêm sempre iguais.

SALGADO, M. Teorema de Tales. *GeoGebra*. [*s. l.*]. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/QPvZHUYv. Acesso em: 21 maio 2022.

Note que se trata da razão entre dois segmentos de reta quaisquer de uma transversal e seus correspondentes da outra.

Assim, na figura a seguir, sendo $r \parallel s \parallel t$, temos:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \text{ ou } \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \qquad \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'} \text{ ou } \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} \qquad \frac{BC}{AC} = \frac{B'C'}{A'C'} \text{ ou } \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$$

Como consequência, as razões entre segmentos de reta correspondentes são iguais: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

As imagens não estão representadas em proporção.

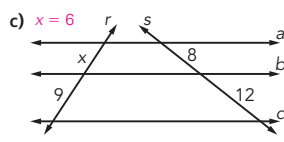
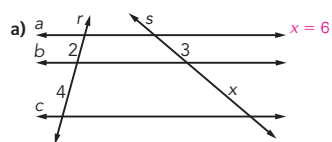
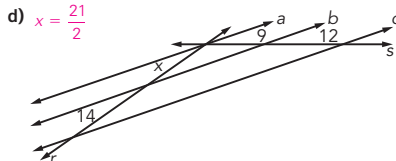
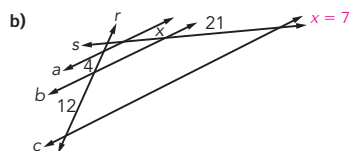
9. Calcule x nas figuras sabendo que $a \parallel b \parallel c$.

a) $x = 6$

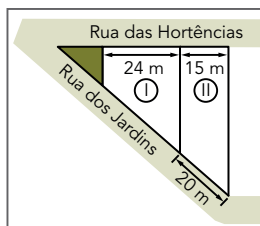
b) $x = 7$

c) $x = 6$

d) $x = \frac{21}{2}$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

10. Analise a representação dos terrenos (I) e (II).

Quantos metros de comprimento deverá ter o muro que o proprietário do terreno (I) construirá para fechar o lado que faz frente com a rua dos Jardins, considerando que os muros adjacentes às ruas são paralelos entre si? 32 metros.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

11. Sendo $a \parallel b \parallel c$, determine x e y:

a) $x = 12$; $y = 9$

b) $x = 6$; $y = 15$

Orientações didáticas

Atividades

Antes de iniciar as atividades dessa seção oriente os estudantes sobre o fato de as figuras estarem fora de escala, evitando assim que tentem resolver usando réguas ou instrumentos de medição.

A atividade **9** exige a utilização de álgebra para a resolução dos problemas. Desenvolva uma das equações com os estudantes e permita que eles resolvam as demais.

A atividade **10** propõe uma aplicação prática do teorema de Tales, em que o estudante deve aplicá-lo de modo a descobrir o tamanho do muro por meio da proporção. Essa atividade favorece o trabalho com a **CEMAT05**, uma vez que a Matemática é apresentada como ferramenta para a resolução de um problema cotidiano.

A atividade **11** segue o mesmo raciocínio de aplicação da atividade **9**.

Proposta para o estudante

Indicamos o vídeo de PIC (2014) para ver uma demonstração alternativa do teorema de Tales e explorar ideias da demonstração com os estudantes, se achar pertinente. GEOMETRIA - Aula 58 - Teorema de Tales através de áreas. [*S. l.*: *s. n.*], 2014. 1 vídeo (10 min). Publicado pelo canal Programa de Iniciação Científica da OBMEP. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=Y6tI95F0n5Q. Acesso em: 28 jun. 2022.

Orientações didáticas

Divisão de segmento de reta em partes congruentes

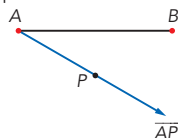
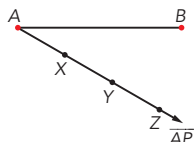
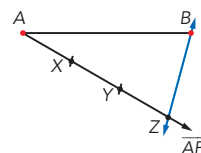
Para o desenvolvimento deste tópico, oriente, primeiramente, os estudantes a separar os materiais indicados: régua, esquadro e compasso. Em seguida, oriente-os a construir um segmento qualquer em uma folha, com o auxílio da régua, nomeando-o de $\overline{AB}$. Peça para marcarem um ponto fora de $\overline{AB}$, chamado de P e, a partir daí, estimule-os a seguir os passos individualmente. Circule pela sala auxiliando-os nos passos em que tiverem dificuldade.

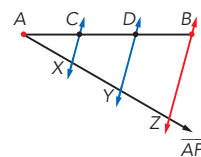
Divisão de segmento de reta em uma razão dada

Neste tópico, proponha a mesma dinâmica que no anterior: separação dos materiais e construção do passo a passo de maneira individual, com seu apoio nos passos necessários.

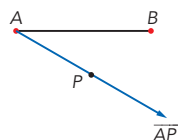
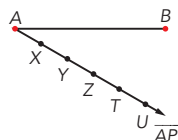
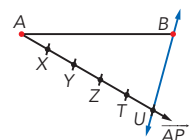
Divisão de segmento de reta em partes congruentes

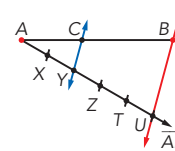
Dado um segmento de reta $\overline{AB}$, vamos dividi-lo em 3 partes congruentes. Para tanto, você vai precisar de régua, compasso e esquadro.

1) Considere um ponto P não pertencente ao segmento de reta $\overline{AB}$ e trace por A e P uma semirreta $\overrightarrow{AP}$ que será oblíqua a $\overline{AB}$.

2) Tomando o compasso com abertura a qualquer, marcamos em $\overrightarrow{AP}$ os pontos X, Y e Z, tais que $AX = XY = YZ = a$.

3) Traçamos a reta $\overleftrightarrow{ZB}$.

4) Usando régua e esquadro, traçamos as retas $\overleftrightarrow{YD} \parallel \overleftrightarrow{ZB}$ (com D em $\overline{AB}$) e $\overleftrightarrow{XC} \parallel \overleftrightarrow{ZB}$ (com C em $\overline{AB}$). Os pontos C e D dividem $\overline{AB}$ em 3 partes congruentes.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Divisão de segmento de reta em uma razão dada

Dado um segmento de reta $\overline{AB}$, vamos dividi-lo em 2 partes que estejam na razão $\frac{2}{3}$, usando régua, compasso e esquadro.

1) Considere um ponto P não pertencente ao segmento de reta $\overline{AB}$. Traçamos por A e P uma semirreta $\overrightarrow{AP}$ que será oblíqua à $\overline{AB}$.

2) Como $2 + 3 = 5$, tomando o compasso com abertura a qualquer, marcamos em $\overrightarrow{AP}$ 5 pontos, X, Y, Z, T e U, tais que $AX = XY = YZ = ZT = TU = a$.

3) Traçamos a reta $\overleftrightarrow{UB}$.

4) Usando régua e esquadro, traçamos por Y a reta $\overleftrightarrow{YC} \parallel \overleftrightarrow{UB}$, com C em $\overline{AB}$. O ponto C divide $\overline{AB}$ na razão $\frac{AC}{CB} = \frac{AY}{YU} = \frac{2}{3}$, justificado pelo teorema de Tales.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Apresentamos aqui uma sequência de passos para a realização de uma construção. Isso é o que chamamos de algoritmo, que pode ser utilizado tanto na Matemática quanto nas Ciências da Computação.
Visite o *site*: https://www.sbc.org.br/noticias/1857-o-algoritmo-nosso-de-cada-dia. Acesso em: 12 abr. 2022.

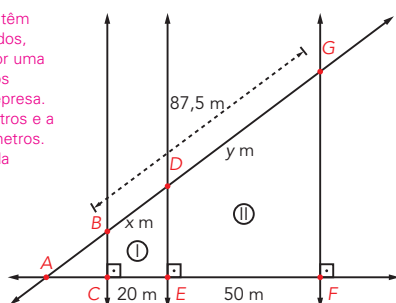
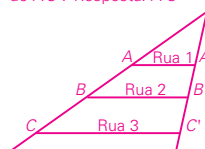
Faça as atividades no caderno.

Nas atividades **12** e **13** você vai usar régua, esquadro e compasso.

12. Construa um segmento de reta $\overline{AB}$ medindo 5,8 cm. Em seguida, divida $\overline{AB}$ em 4 partes congruentes. Escreva no caderno todos os passos utilizados nesta construção. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

13. Desenhe um segmento de reta medindo 6 cm e divida-o em 2 segmentos de reta que estejam na razão $\frac{2}{5}$. Escreva no caderno todos os passos utilizados nesta construção. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

14. Considere o esquema de 3 retas paralelas cortadas por 2 retas transversais. Elabore um problema no qual a resolução seja encontrar os valores de *x* e *y* indicados no esquema.

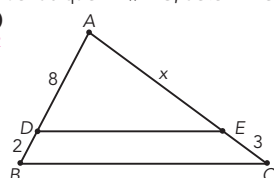
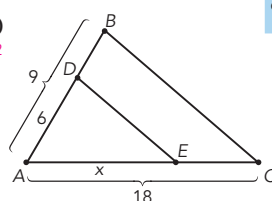
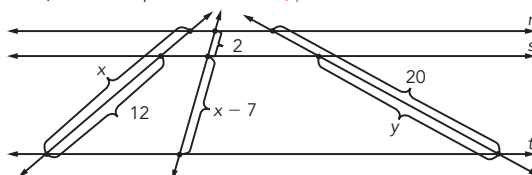
Exemplo de resposta: Igor e Rodrigo têm sítios vizinhos. Os sítios são delimitados, na frente, por uma rodovia, e atrás por uma represa. Eles sabem que os dois sítios tomam 87,5 metros da margem da represa. A frente do sítio do Igor mede 20 metros e a frente do sítio do Rodrigo mede 50 metros. Qual é a medida que cada sítio tem da margem da represa?
Resposta: $x = 25$ m e $y = 62,5$ m.

18. Exemplo de resposta: Marta fez um esboço de duas quadras da rua onde ela mora. Sabendo que
$AB = 7$ cm, $AC = 15$ cm e
$A'B' = 4,2$ cm, qual é a medida de $\overline{A'C'}$? Resposta: $A'C' = 9$ cm.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

15. Sabendo que $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$, determine *x*:

As imagens não estão representadas em proporção.

a) 12

b) 12

16. Determine *x* e *y*, sendo *r*, *s* e *t* retas paralelas. $x = 15$; $y = 16$

17. Uma reta paralela ao lado $\overline{BC}$ de um triângulo *ABC* determina o ponto *D* em $\overline{AB}$ e *E* em $\overline{AC}$. Sabendo que $AD = x$, $BD = x + 6$, $AE = 3$ e $EC = 4$, determine a medida do lado $\overline{AB}$ do triângulo. 42

18. Elabore um problema que seja resolvido aplicando-se o teorema de Tales, como segue:

$AB = 7$ cm, $AC = 15$ cm e $A'B' = 4,2$ cm.

$$\frac{A'C'}{A'B'} = \frac{AC}{AB} = \frac{15}{7}$$

Então:

$$A'C' = \frac{15}{7} \cdot A'B' \Rightarrow A'C' = \frac{15}{7} \cdot 4,2 \Rightarrow A'C' = 9$$

Resposta: $A'C' = 9$ cm.

Orientações didáticas

Atividades

Nas atividades **12** e **13**, é possível que os estudantes tentem fazer a divisão apenas com a régua. Entretanto, caso isso aconteça, reforce o fato de que a régua não apresenta muita precisão quando é necessário construir um segmento com medida de mais de uma casa decimal. Incentive o uso do compasso, em que é preciso manter uma abertura fixa para marcar as extremidades dos segmentos. Nesse caso, será necessário realizar a aproximação uma vez só, para definir a abertura do compasso.

Na atividade **14**, oriente os estudantes a elaborar o problema, lembrando que, embora sejam pessoais, as elaborações precisam estar de acordo com os dados propostos. Permita que os estudantes realizem essa atividade em grupos.

Nas atividades **15** a **17**, os estudantes devem resolver o problema com o auxílio da álgebra. Oriente-os quanto à confecção das equações.

Proposta para o professor

Nesta seção, é trabalhado um dos pilares, do pensamento computacional, o algoritmo, nas atividades com as construções. Reforce que não é necessário utilizar computadores e linguagem de programação. Segue uma referência com exemplos de atividades:

BRACKMANN, C. *Desenvolvimento do pensamento computacional através de atividades desplugadas na Educação Básica*. 2017. Tese (Doutorado – Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), Porto Alegre, Rio Grande do Sul, 2017. Disponível em: https://lume.ufrgs.br/handle/10183/172208. Acesso em: 28 jun. 2022.

Orientações didáticas

Ângulos formados por duas retas paralelas e uma transversal

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA10,** ao explorar os ângulos formados por duas retas paralelas e uma transversal. A atividade proposta em *Participe* mobiliza com maior ênfase a **CEMAT02** e a **CEMAT04**.

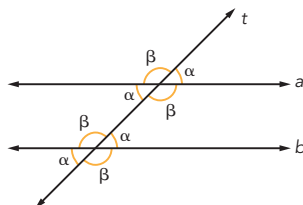
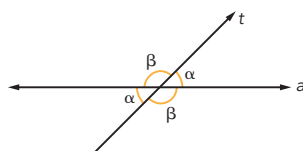
Faça a leitura do texto com a turma; em seguida, proponha que realizem as atividades propostas em *Participe*.

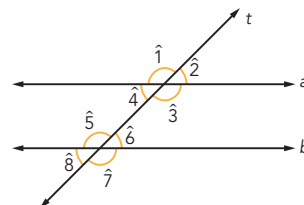
Participe

É proposta uma atividade em grupo em que os estudantes, primeiramente, pensam a respeito de cada item e, depois, compartilham com a sala toda. É importante permitir que os estudantes iniciem a atividade antes da apresentação do texto. Dessa maneira, você pode verificar os conhecimentos prévios. Para responder ao item **a**, é possível sugerir que os estudantes meçam o ângulo $\hat{1}$ e o de medida α com transferidor, a fim de verificar a relação entre eles. É possível, também, utilizar um papel vegetal e reproduzir nele a figura da atividade, para, em seguida, mover o papel e conferir se o ângulo $\hat{1}$ e o de medida α possuem a mesma abertura.

Ângulos formados por duas retas paralelas e uma transversal

Consideremos duas retas paralelas *a* e *b*, que são cortadas por uma reta transversal *t*. Então, temos:

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

As medidas dos ângulos formados pela intersecção da reta *a* com a transversal *t* e pela intersecção da reta *b* com a transversal *t* são representadas por α e β.

Como as retas *a* e *b* são paralelas, os pares de ângulos correspondentes são congruentes. Então, os ângulos formados podem ser nomeados conforme a figura a seguir.

Banco de imagens/Arquivo da editora

- Os ângulos $\hat{3}$ e $\hat{6}$; $\hat{4}$ e $\hat{5}$ são chamados de **colaterais internos**.
- Os ângulos $\hat{1}$ e $\hat{8}$; $\hat{2}$ e $\hat{7}$ são chamados de **colaterais externos**.
- Os ângulos $\hat{3}$ e $\hat{5}$; $\hat{4}$ e $\hat{6}$ são chamados de **alternos internos**.
- Os ângulos $\hat{1}$ e $\hat{7}$; $\hat{2}$ e $\hat{8}$ são chamados de **alternos externos**.
- Os ângulos $\hat{1}$ e $\hat{5}$; $\hat{2}$ e $\hat{6}$; $\hat{4}$ e $\hat{8}$; $\hat{3}$ e $\hat{7}$ são chamados de **ângulos correspondentes**.

Participe

Faça as atividades no caderno.

I. Vamos explorar a relação entre as medidas de ângulos alternos internos em um feixe de paralelas. Na figura a seguir, temos que *r* e *s* são paralelas e *t* é uma transversal.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Sobre a reta *r*, qual ângulo é correspondente ao ângulo de medida α? E o que podemos afirmar sobre as medidas desses ângulos? $\hat{1}$; esses ângulos são congruentes, portanto, as medidas são iguais.

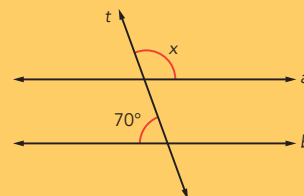
b) Sobre a reta *r*, qual ângulo é oposto pelo vértice ao ângulo correspondente ao ângulo de medida α? O que podemos afirmar sobre as medidas desses ângulos? $\hat{3}$; esses ângulos são congruentes, portanto, as medidas são iguais.

c) Sobre a reta *r*, qual ângulo junto ao de medida α forma um par de ângulos alternos internos? De acordo com os itens **a** e **b**, qual é a relação entre as medidas desses ângulos? $\hat{3}$; as medidas são iguais, pois os ângulos são congruentes.

II. Determine o valor de *x*, sabendo que as retas *a* e *b* são paralelas e *t* é uma reta transversal. $x = 110°$

t
x
a
70°
b

Na mídia

Faça as atividades no caderno.

Cidades mais sustentáveis do Brasil

Separadas por mais de 2 700 km, as cidades de Morungaba, em São Paulo, e Moju, no Pará, são, respectivamente, a mais e a menos sustentável do Brasil, de acordo com o Índice de Desenvolvimento Sustentável das Cidades, lançado nesta terça-feira, 23 [de março de 2021], pelo Programa Cidades Sustentáveis, em parceria com a Rede de Soluções de Desenvolvimento Sustentável (SDSN, da sigla em inglês), vinculada à Organização das Nações Unidas (ONU).

O *ranking* analisou 770 cidades brasileiras em relação ao cumprimento dos 17 Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS) formulados pela ONU, que incluem questões como a erradicação da pobreza e a promoção da agricultura sustentável. Os objetivos fazem parte de uma agenda mundial que definiu quais temas humanitários devem ser prioridade nas políticas públicas até 2030. [...] Das 100 cidades com melhor desempenho, 80 estão situadas no Estado de São Paulo. As demais 20 dessa centena estão localizadas nas regiões Sul e Sudeste. Além disso, os 23 primeiros municípios do *ranking* são paulistas.

A líder Morungaba tem cerca de 14 mil habitantes e obteve pontuação geral de 73,4 (sendo 100 o máximo) em relação ao cumprimento dos objetivos fixados. Ao todo, quatro dos 17 objetivos foram atingidos integralmente pelo município. São eles: garantia de acesso à energia limpa; consumo e produção responsáveis; proteção da vida marinha; e proteção da vida terrestre. Entre os principais desafios que Morungaba ainda precisa enfrentar estão reduzir as desigualdades e garantir educação inclusiva, equitativa e de qualidade.

Com o escore mais baixo, Moju (PA) somou 32,18 pontos, o que significa que percorreu apenas um terço da distância para atingir os ODS. Com pouco mais de 83 mil habitantes, a cidade não alcançou nenhum objetivo por completo. [...] Entre as 100 cidades que estão na lanterna, apenas 14 não estão localizadas nas Regiões Norte e Nordeste.

Os 17 ODS's

Os 17 Objetivos de Desenvolvimento Sustentável foram estabelecidos pela ONU em 2015 e compõem uma agenda mundial para a construção e implementação de políticas públicas que visam guiar a humanidade até 2030. São eles: erradicação da pobreza, segurança alimentar e agricultura, saúde, educação, igualdade de gênero, redução das desigualdades, energia, água e saneamento, padrões sustentáveis de produção e de consumo, mudança do clima, cidades sustentáveis, proteção e uso sustentável dos oceanos e dos ecossistemas terrestres, crescimento econômico inclusivo, infraestrutura e industrialização, governança, e meios de implementação.

MIRANDA, Cássia. SP concentra cidades sustentáveis do país; tema foi ignorado por metade dos prefeitos eleitos. *O Estado de S.Paulo*, São Paulo, 23 mar. 2021. Disponível em: https://politica.estadao.com.br/noticias/geral,sp-concentra-cidades-sustentaveis-do-pais-tema-foi-ignorado-por-metade-dos-prefeitos-eleitos,70003658019. Acesso em: 25 maio 2021.

Daniel Teixeira/Estadão Conteúdo

Painel de energia solar instalado em residência; *ranking* analisou 770 cidades brasileiras em relação ao cumprimento dos 17 Objetivos de Desenvolvimento Sustentável formulados pela Organização das Nações Unidas (ONU). Foto: Daniel Teixeira/Estadão. Barueri (SP), 2018.

1. Em um mapa do Brasil, a distância entre Morungaba (SP) e Moju (PA) mede 54 cm. Considerando 2 700 km a medida de distância real entre essas cidades, em que escala o mapa foi elaborado? 1 : 5 000 000
2. O prédio da ONU mede 155 m de altura. Quanto o prédio deve ter de altura em uma maquete construída na escala 1 : 250? 62 cm
3. Redija uma manchete sobre a distribuição territorial das cidades mais sustentáveis do Brasil. Resposta pessoal.

Orientações didáticas

Na mídia

Na BNCC

Essa seção mobiliza com maior ênfase a **CG07** e a **CEMAT07** por discutir o tema da sustentabilidade que auxilia na promoção da consciência socioambiental. Favorece também o desenvolvimento do TCT *Educação Ambiental*.

É possível propor um trabalho em grupo de pesquisa interdisciplinar em que os estudantes podem escolher um dos 17 Objetivos de Desenvolvimento Sustentável propostos pela ONU e pensar em possíveis propostas para atendê-los em determinada cidade.

Com relação às questões, é possível utilizar a ideia de escala para introduzir o próximo capítulo, de Semelhança de triângulos. Se achar necessário, retome o conceito de escala, razão e proporção. É possível também explorar o conceito de porcentagem fazendo perguntas como: "Qual é a porcentagem de cidades paulistas no *ranking* entre as 100 com maior desempenho?"; "Qual é a porcentagem de cidades da região Norte e Nordeste no *ranking* entre as 100 com menor desempenho?"; "Qual a porcentagem de objetivos atingidos na totalidade pela cidade de Morungaba?".

Orientações didáticas

Semelhança

Na BNCC

Neste capítulo, a habilidade **EF09MA12** será trabalhada em sua totalidade e até mesmo expandida, uma vez que serão explorados e demonstrados outros teoremas e propriedades relacionados à semelhança de triângulos. A **CG02** e a **CEMAT02** serão trabalhadas em diversos momentos em que os estudantes serão incentivados a tirar suas próprias conclusões, realizar e testar hipóteses e compreender demonstrações. As atividades desse tópico mobilizam a **CEMAT05**.

O texto de introdução do capítulo pode ser uma boa oportunidade para o desenvolvimento da **CG09**, pois é possível realizar uma reflexão com os estudantes a respeito de modalidades paralímpicas.

É possível, também, levantar uma reflexão sobre capacitismo, que consiste no preconceito com pessoas com deficiência, que tem origem na ideia de que pessoas desse grupo têm menos capacidade para executar tarefas. É preciso combater essa ideia e, ao mesmo tempo, é preciso combater a supervalorização da ideia de superação.

Participe

O boxe tem o objetivo de coletar conhecimentos prévios dos estudantes a respeito da ideia de semelhança de figuras. Caso esse termo não seja familiar a eles, proponha mais pesquisas de aplicações dessa palavra em diferentes contextos, a fim de que fique mais clara a aplicabilidade na Matemática.

Semelhança de triângulos

Semelhança

As imagens não estão representadas em proporção.

O jogo de bocha

A bocha é um esporte com origem no Império Romano. Com a expansão do Império, foi sendo difundida entre os demais povos europeus e se tornou popular, bem como tradicional, em países como a Itália, a França, a Espanha, a Inglaterra e Portugal. [...]

O objetivo da bocha consiste na marcação de pontos, através do lançamento das bolas [bochas], a fim de que elas se aproximem de um ponto, determinado aleatoriamente pelo lançamento de um objeto, o bolim. [O adversário tenta fazer o mesmo, às vezes empurrando suas bochas para longe ou bloqueando a passagem para que você não empurre as dele.]

Bocha: Como jogar bocha – Conheça as regras. *Cjnet*, [*s. l.*], [*s. d.*]. Disponível em: http://regrasdoesporte.com.br/bocha-como-jogar-bocha-conheca-as-regras.html. Acesso em: 25 mar. 2022.

Alan Morici/CPB

Seleção Brasileira de Bocha faz treinamento no Centro de Treinamento Paralímpico, em Sao Paulo (SP). Foto de 2021.

Participe

Faça as atividades no caderno.

Analise a imagem e faça o que se pede.

a) O que os objetos da imagem têm em comum? O formato.

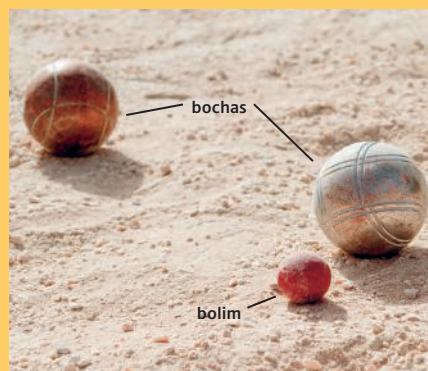
b) Em que eles se diferenciam? Quanto ao tamanho e à cor.

c) Suponha que a bocha vermelha esteja a meio metro do bolim, e a cinza, a 42 cm. Qual delas estaria pontuando no jogo de bocha? Por quê? A cinza. Porque está mais próxima do bolim.

d) Procure no dicionário o significado de "semelhança" e responda:

Podemos afirmar que, exceto pela cor, todos os objetos da imagem são exatamente iguais? Justifique. Não. Eles apresentam o mesmo formato, mas têm diferentes tamanhos.

thodonal88/Shutterstock

As duas bolas maiores são chamadas de bocha, e a menor, de bolim.

Proposta para o estudante

Indicamos uma visita ao *site* do Comitê Paralímpico Brasileiro para informações sobre a história e o desenvolvimento da modalidade bocha nas paraolimpíadas. Endereço eletrônico: COMITE PARALÍMPICO BRASILEIRO. *Bocha*. Disponível em: https://www.cpb.org.br/modalidades/51/bocha. Acesso em: 28 jun. 2022.

Quando olhamos para cópias de uma fotografia com tamanhos diferentes, como as imagens a seguir, fica evidente que a figura maior é uma ampliação da menor. Por sua vez, a figura menor é uma redução da maior.

Figura 1.

Museu The Solomon R. Guggenheim, em Nova York. Foto de 2014.

Figura 2.

Fotos: Roy Harris/Shutterstock

Às vezes, encontramos figuras de formas parecidas. Devemos considerá-las semelhantes? Em Matemática, a transformação de uma figura geométrica por ampliação ou redução, conservando a forma original, produz uma figura **semelhante** à figura original.

Por exemplo:

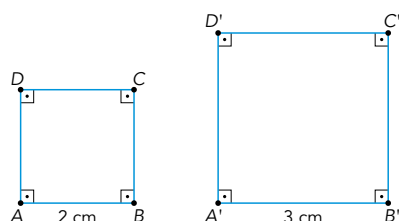
- O quadrado $A'B'C'D'$ é uma ampliação do quadrado $ABCD$.

  Esses quadrados têm lados correspondentes proporcionais:

  $$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'A'}{DA} = \frac{3}{2}$$

  E os ângulos correspondentes são congruentes:

  $$\widehat{A'} \cong \hat{A}, \widehat{B'} \cong \hat{B}, \widehat{C'} \cong \hat{C} \text{ e } \widehat{D'} \cong \hat{D}$$

  Portanto, esses quadrados são figuras semelhantes.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

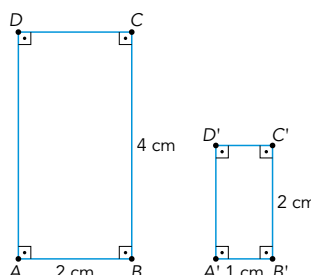
- O retângulo $A'B'C'D'$ é uma redução do retângulo $ABCD$.

  Eles têm lados correspondentes proporcionais:

  $$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D'}{CD} = \frac{D'A'}{DA} = \frac{1}{2}$$

  E os ângulos correspondentes são congruentes:

  $$\widehat{A'} \cong \hat{A}, \widehat{B'} \cong \hat{B}, \widehat{C'} \cong \hat{C} \text{ e } \widehat{D'} \cong \hat{D}$$

  Portanto, esses retângulos são figuras semelhantes.

Orientações didáticas

Semelhança

No desenvolvimento deste tópico, passe pelos exemplos com os estudantes, de modo que compreendam melhor a ideia de figuras semelhantes. Procure trazer exemplos cotidianos da aplicação dessa ideia, como a de ampliação de imagens, fotos, desenho de plantas de construções, maquetes e miniaturas, entre outras coisas. Pergunte aos estudantes se eles sabem de mais exemplos e valorize as diferentes respostas que surgirem. Se houver aparelhos de multimídia na sala de aula, faça uma montagem utilizando figuras sobrepostas, amplie e reduza duas fotos iguais. Outro recurso possível é a utilização de um *software* de geometria como o GeoGebra.

Desenvolva o exemplo dos quadrados com os estudantes demonstrando a proporcionalidade entre eles.

Orientações didáticas

Semelhança

Desenhe as figuras na lousa e faça a seguinte pergunta: "Esses retângulos são semelhantes? Esses losangos são semelhantes?" Peça aos estudantes que justifiquem suas respostas. Permita que compartilhem suas ideias.

A partir das respostas dos estudantes, ressalte a importância de as condições terem que ser válidas para que as figuras sejam semelhantes. No exemplo dos retângulos, a condição da proporcionalidade dos lados não é satisfeita e no exemplo dos losangos a condição dos ângulos serem congruentes não é satisfeita.

Peça para os estudantes pensarem em outros exemplos ou contraexemplos de figuras semelhantes e valorize as diferentes respostas que surgirem. Utilize um *software* geométrico para ampliar uma das figuras não semelhantes e demonstrar que, mesmo assim, não é possível encaixá-las corretamente.

- Os retângulos *EFGH* e *E'F'G'H'* não têm a mesma forma.

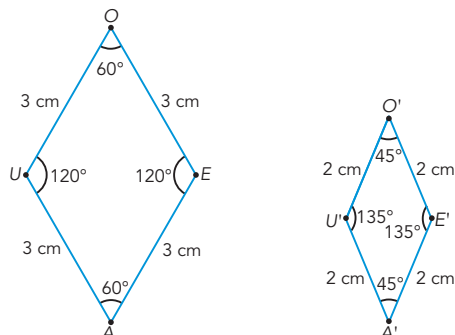
  Embora os ângulos correspondentes sejam congruentes, os lados correspondentes não são proporcionais, pois:

  $$\frac{E'F'}{EF} = \frac{4}{3} \text{ e } \frac{F'G'}{FG} = \frac{3}{1}$$

  Logo, $\frac{E'F'}{EF} \neq \frac{F'G'}{FG}$.

  Esses retângulos não são semelhantes.

- Os losangos *AEOU* e *A'E'O'U'* não têm a mesma forma.

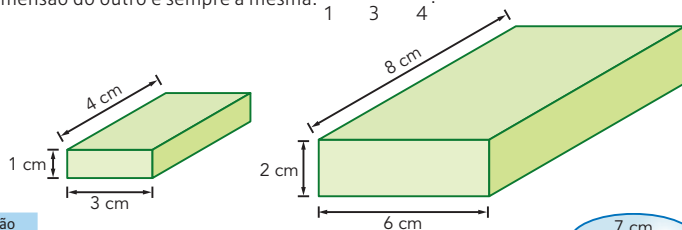
  Embora os lados correspondentes sejam proporcionais, os ângulos correspondentes não são congruentes. Estes losangos não são semelhantes.

Agora, verifique as caixas da fotografia a seguir. Elas têm o formato que lembra o de blocos retangulares.

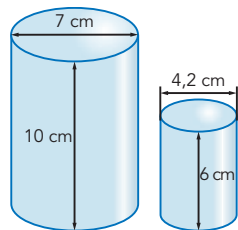
As imagens não estão representadas em proporção.

São comuns embalagens de produtos com formato de blocos retangulares.

Há blocos retangulares que apresentam figuras semelhantes: um deles é uma ampliação ou redução do outro, ou eles têm exatamente as mesmas dimensões.

Note, a seguir, um exemplo de blocos retangulares semelhantes: o segundo bloco é uma ampliação do primeiro. A razão entre cada uma das medidas das três dimensões de um bloco retangular e a correspondente medida de dimensão do outro é sempre a mesma: $\frac{2}{1} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4}$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Considere o exemplo de cilindros retos semelhantes: o segundo cilindro é uma redução do primeiro. A razão entre as medidas dos diâmetros das bases é igual à razão entre as medidas de altura dos cilindros.

$$\frac{6}{10} = \frac{4,2}{7}$$

7 cm
10 cm
4,2 cm
6 cm

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Escala

A maquete de um edifício é uma representação reduzida do imóvel: quando, de fato, edifício e representação são semelhantes, a maquete é perfeita. A maquete é feita em uma escala. A escala 1 : 100, por exemplo, significa que as dimensões reais do edifício foram divididas por 100 na construção da maquete, ou, de maneira equivalente, uma medida de comprimento 1 na maquete equivale à medida 100 no edifício (na mesma unidade). Por exemplo, 1 cm na maquete corresponde a 100 cm (1 m) no edifício.

As escalas também são utilizadas em mapas.

Fernando Favoretto/Criar Imagem

Maquete de um condomínio de prédios.

Um dos mais famosos museus que reproduzem cidades em miniaturas é o Miniatur Wunderland, localizado na cidade de Hamburgo, na Alemanha. Em 2021, o museu criou uma réplica da cidade do Rio de Janeiro.

Fonte dos dados: DA REDAÇÃO. Museu de réplicas em miniatura na Alemanha reduz o Rio de Janeiro a 46 metros quadrados. *Uol*, São Paulo, 2 set. 2021. Disponível em: https://cultura.uol.com.br/noticias/44617_museu-de-replicas-em-miniatura-na-alemanha-reduz-o-rio-de-janeiro-a-46-metros-quadrados.html. Acesso em: 12 abr. 2022.

No Brasil, o museu Little World, localizado na cidade de Cotia, São Paulo, apresenta réplicas de monumentos espalhados pelo mundo.

Fonte dos dados: G1. Taj Mahal, MASP e outros prédios ganham réplicas em novo museu. *G1*, São Paulo, 12 set. 2006. Disponível em: https://g1.globo.com/Noticias/PopArte/0,,AA1268287-7084,00-TAJ+MAHAL+MASP+E+OUTROS+PREDIOS+GANHAM+REPLICAS+EM+NOVO+MUSEU.html. Acesso em: 12 abr. 2022.

Orientações didáticas

Semelhança

Desenvolva o raciocínio de proporcionalidade do paralelepípedo e do cilindro com os estudantes, utilizando um *software* de geometria, se possível.

Escala

O conceito de escala é uma aplicação direta de semelhança, de modo que se trata de ampliações e reduções. Ressalte que, assim como em figuras semelhantes, é importante que imagens de mapas ou figuras de maquetes tenham os ângulos preservados, além de ter medidas correspondentes proporcionais, senão os objetos perderiam sua forma original.

Se achar pertinente, proponha uma atividade de construção da planta de uma parte da escola. Peça aos estudantes que escolham uma sala em que seja possível fazer a medição das dimensões e, primeiramente, peça que façam um esboço com as medidas reais. Em seguida, defina uma escala, como 1 : 50 ou 1 : 20, por exemplo, e peça para construírem com régua e esquadro uma redução da sala.

Para finalizar, incentive a leitura dos *sites* indicados na seção “Para saber mais” e pergunte aos estudantes se já viram algum museu que apresente miniaturas.

Orientações didáticas

Atividades

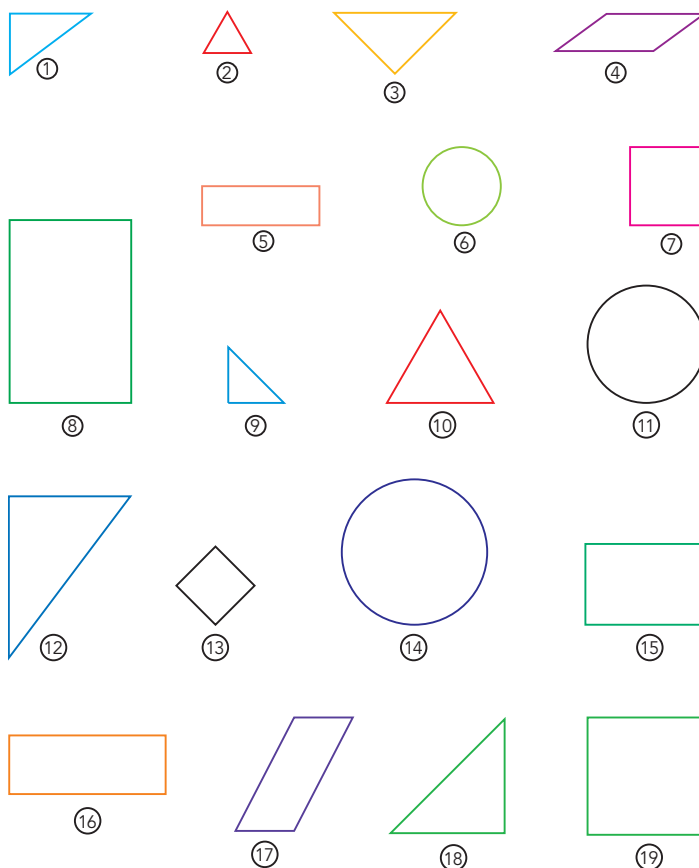
Para realizar a atividade **1**, é importante que os estudantes se lembrem das condições de semelhança, mas, principalmente, que tenham a noção intuitiva de que figuras semelhantes apresentam o mesmo formato. É possível que tenham dificuldades nos itens **d**, **e** e **f**, pois os três tratam de triângulos, entretanto há desenhos de triângulos em diferentes formatos, com diferentes ângulos.

A utilização de instrumentos de desenho como régua e compasso é necessária para a realização das atividades **2** e **3**. Na atividade **2**, é apresentada uma descrição de como é possível construir figuras semelhantes por meio da homotetia. Peça aos estudantes para refletirem sobre o método apresentado e apresentar justificativas para o motivo pelo qual esse método funciona. Com base nisso, auxilie-os na atividade **3**, de modo que concluam que será preciso marcar dois pontos após cada vértice da figura, de modo que as distâncias sejam as mesmas de *O* aos vértices, a fim de triplicar as medidas dos lados da figura.

Nas atividade **4** e **5** temos propostas de aplicações reais do cotidiano. Caso os estudantes tenham dificuldades para resolver as atividades, incentive-os a montar as proporções a fim de encontrar os resultados a partir de regra de três ou equivalência de frações. Os atente para o fato de que os resultados serão obtidos na mesma unidade de medida dos valores fornecidos no enunciado e que, no caso da atividade **5**, será preciso realizar uma conversão. Essas atividades favorecem o trabalho com a **CEMAT05**.

Faça as atividades no caderno.

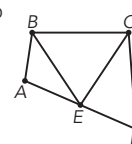
Toda medição é aproximada, porque, dependendo do instrumento de medida e de quem está medindo, o resultado da medição tem um grau de incerteza. Dessa maneira, a atividade **1** também padece de um grau de incerteza.

1. Analise as figuras a seguir e faça medições, se necessário.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Quais dessas figuras, na sua opinião, são semelhantes: Respostas esperadas:

a) ao quadrado 7? 13; 19.
b) à circunferência6? 11; 14.
c) ao retângulo 8? 15
d) ao triângulo 1? 12
e) ao triângulo 2? 10
f) ao triângulo 3? 9; 18.

2. Copie a figura no caderno e, na sequência, siga os passos para construir uma ampliação dela com o dobro do tamanho inicial.
A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

- tome um ponto *O* qualquer, próximo à figura;
- trace as semirretas $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$;
- coloque a ponta-seca do compasso em *A*, abra até *O* e marque *A'* na semirreta $\overrightarrow{OA}$, de modo que $OA = AA'$, o que equivale a dizer que *A* seja o ponto médio de $\overline{OA'}$;

Banco de imagens/Arquivo da editora

- analogamente, construa B' em $\overrightarrow{OB}$, C' em $\overrightarrow{OC}$, D' em $\overrightarrow{OD}$ e E' em $\overrightarrow{OE}$;
- ligue A', B', C', D' e E'.

Esse método de ampliação (ou redução) de figuras é chamado de **homotetia**.

3. Copie a figura a seguir e, na sequência, construa uma figura semelhante, três vezes maior, usando o método da homotetia. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Banco de imagens/Arquivo da editora

4. A maquete de um automóvel foi feita na escala 1 : 18. Se o comprimento do automóvel mede 4 590 mm, qual é a medida do comprimento dele nessa maquete? 255 mm (25,5 cm)

5. Em um mapa na escala 1 : 1 000 000, a distância entre duas cidades mede 4,8 cm. Qual é a medida da distância entre essas cidades em quilômetros? 48 km

Semelhança de triângulos

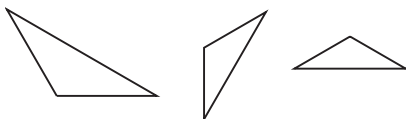
Comparando triângulos

Se desenharmos dois triângulos ao acaso, provavelmente obteremos triângulos não semelhantes. Analise as coleções de triângulos a seguir, organizados por formas iguais.

Coleção 1: Triângulos equiláteros

Coleção 2: Triângulos retângulos e isósceles

Coleção 3: Triângulos isósceles com ângulo obtuso medindo 120°

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Analisando essas três coleções de triângulos, podemos concluir que os triângulos de uma mesma coleção têm a mesma forma, entretanto, o tamanho de cada um deles é diferente e os triângulos não estão na mesma posição. Assim, ao considerarmos dois triângulos de uma mesma coleção, eles serão semelhantes; ao considerarmos dois triângulos de coleções diferentes, eles **não** serão semelhantes.

Orientações didáticas

Semelhança de triângulos

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA12** e permite trabalhar a **CG02** e a **CEMAT02** nos diversos momentos em que os estudantes serão incentivados a tirar suas próprias conclusões, realizar e testar hipóteses, bem como compreender demonstrações.

Para iniciar o tópico, sugerimos que pergunte aos estudantes o que eles podem observar e concluir a respeito das três coleções de triângulos. Para isso, é possível propor uma prática ativa por meio da rotina de pensamento chamada “ver, pensar e perguntar”, em que, primeiramente, os estudantes precisam descrever objetivamente tudo o que estão observando a respeito dos três grupos de triângulos, no segundo passo, descrever o que pensam, ou seja, o que podem concluir do que observaram e, no terceiro passo, fazer perguntas a respeito das dúvidas que surgirem. O objetivo é que os próprios estudantes concluam que os triângulos de uma mesma coleção possuem a mesma forma, por mais que tenham tamanhos e posições diferentes. Se necessário, retome as classificações de triângulos para o melhor desenvolvimento da prática.

Para potencializar tudo que é apresentado nesta página, ao final das atividades, reforce a definição de semelhança de triângulos, bem como as diferenças entre congruência e semelhança. Caso os estudantes ainda estejam com dificuldades de compreender os conceitos, traga mais exemplos, como dois triângulos equiláteros.

Orientações didáticas

Participe

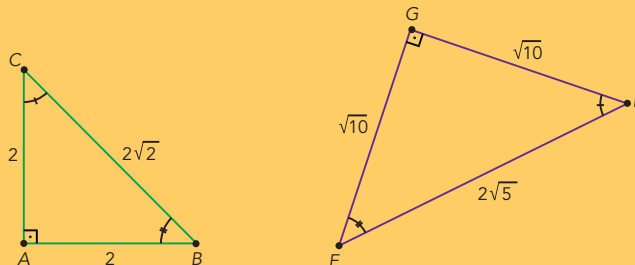
Permita que os estudantes façam a atividade em grupos.

Oriente-os quanto à proporcionalidade e às condições para tal. Peça que os grupos entreguem suas conclusões. Espera-se que os estudantes percebam que os triângulos são semelhantes. Quanto às respostas intuitivas, é possível que alguns deles respondam que sim pelo fato de os dois triângulos serem retângulos.

Participe

Faça as atividades no caderno.

Vamos comparar triângulos da Coleção **2** para notarmos características que auxiliarão no entendimento do conceito de semelhança entre dois triângulos. Analise os triângulos *ABC* e *GEF* e responda às questões no caderno.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Como são triângulos isósceles e retângulos, qual é a medida dos ângulos internos dos triângulos *ABC* e *GEF*?

b) Calcule a razão entre o lado do triângulo *GEF* oposto ao ângulo reto e o lado do triângulo *ABC* oposto ao ângulo reto.

c) Calcule a razão entre o lado do triângulo *GEF* oposto ao ângulo $\hat{F}$ e o lado do triângulo *ABC* oposto ao ângulo $\hat{C}$. Calcule também a razão entre o lado do triângulo *GEF* oposto ao ângulo $\hat{E}$ e o lado do triângulo *ABC* oposto ao ângulo $\hat{B}$.

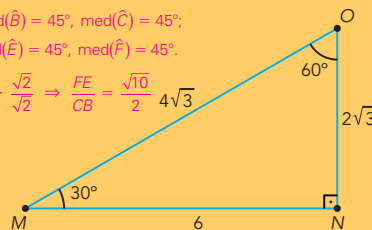
d) Você diria, intuitivamente, que esses dois triângulos são semelhantes? Resposta pessoal.

e) Analise o triângulo retângulo *NOM*. Você diria, intuitivamente, que ele é semelhante ao triângulo *ABC*? Escreva no caderno as diferenças observadas. Resposta pessoal.

a) $\triangle ABC$: $med(\hat{A}) = 90°$, $med(\hat{B}) = 45°$, $med(\hat{C}) = 45°$;
$\triangle GEF$: $med(\hat{G}) = 90°$, $med(\hat{E}) = 45°$, $med(\hat{F}) = 45°$.

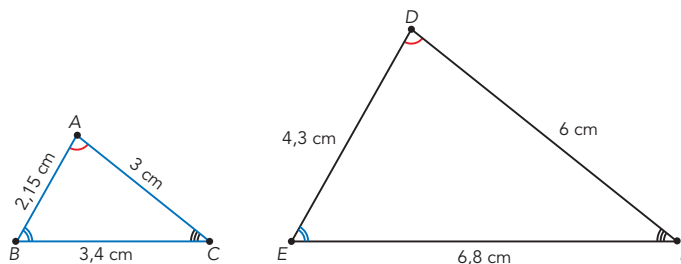
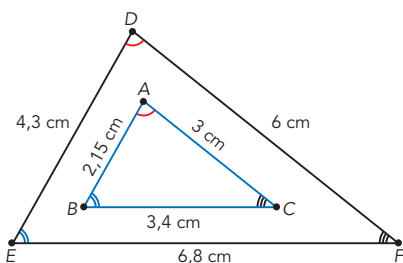
b) $\frac{FE}{CB} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{FE}{CB} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{FE}{CB} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

c) $\frac{GE}{AB} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ e $\frac{GF}{AC} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Como devemos comparar os ângulos e os lados de dois triângulos para descobrir se eles realmente são semelhantes?

Vamos estudar com mais profundidade a semelhança dos triângulos.

Considere os triângulos *ABC* e *DEF*, construídos de modo a terem a mesma forma.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Como esses triângulos têm a mesma forma, é possível colocar o triângulo menor ($\triangle ABC$) dentro do maior ($\triangle DEF$), de maneira que seus lados fiquem respectivamente paralelos.

Podemos, então, notar que dois triângulos que apresentam formas iguais têm, necessariamente, ângulos correspondentes congruentes:

$$\hat{A} \cong \hat{D}, \hat{B} \cong \hat{E} \text{ e } \hat{C} \cong \hat{F}$$

Se calcularmos as razões entre as medidas dos lados correspondentes, teremos:

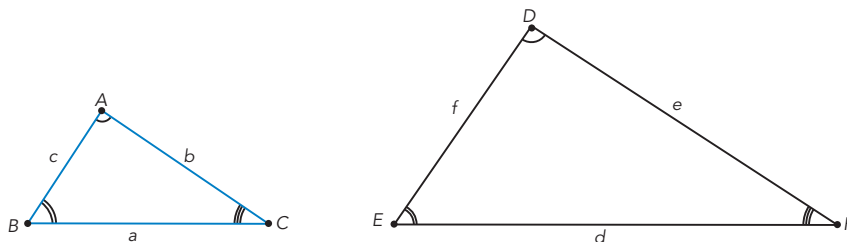
$$\frac{AB}{DE} = \frac{2{,}15 \text{ cm}}{4{,}3 \text{ cm}} = \frac{1}{2} \qquad \frac{AC}{DF} = \frac{3 \text{ cm}}{6 \text{ cm}} = \frac{1}{2} \qquad \frac{BC}{EF} = \frac{3{,}4 \text{ cm}}{6{,}8 \text{ cm}} = \frac{1}{2}$$

Logo, as razões são todas iguais, ou seja, os lados correspondentes (homólogos) são proporcionais:

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

Vamos, então, estabelecer o seguinte conceito:

> Dois triângulos são semelhantes quando têm os ângulos correspondentes congruentes e os lados homólogos proporcionais.

Usando símbolos matemáticos, podemos escrever:

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A} \cong \hat{D} \\ \hat{B} \cong \hat{E} \\ \hat{C} \cong \hat{F} \end{cases} \text{ e } \frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}.$$

> $\sim$ significa semelhante;
> $\cong$ significa congruente.

Razão de semelhança

Quando dois triângulos são semelhantes, a razão entre dois lados correspondentes é chamada de **razão de semelhança**:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k, \text{ em que } k \text{ é a razão de semelhança.}$$

Orientações didáticas

Semelhança de triângulos

Com relação aos exemplos dos triângulos *ABC* e *DEF*, ressalte que, ao colocar um triângulo dentro do outro, podemos justificar o fato de os ângulos serem congruentes pelo fato de os lados serem paralelos. Ao prolongar o lado $\overline{AB}$, por exemplo, temos suas paralelas ($\overline{AB}$ e $\overline{DE}$) e, ao deslocar o triângulo de modo que $\overline{AC}$ e $\overline{DF}$ se sobreponham, $\overline{AC}$ vira uma transversal das duas paralelas e os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{D}$ serão correspondentes, portanto, congruentes.

Razão de semelhança

Desenvolva o exemplo proposto com os estudantes, reexplicando as condições para semelhança, abordando novamente os tópicos como: congruência entre ângulos e proporcionalidade homóloga entre os lados. Se necessário, demonstre aos estudantes a simbologia gráfica matemática para congruência e semelhança.

Desenvolva igualmente o conceito de razão de semelhança, demonstrando aos estudantes a constante *k*, utilizando do exemplo anteriores.

Para melhor compreensão deste tópico, é importante trazer exemplos, como os que seguem:

- Para dois triângulos equiláteros com lados 2 e 5, a razão de semelhança pode ser $\frac{2}{5}$ ou $\frac{5}{2}$.
- Para dois triângulos retângulos isósceles de lados 2 e 3; 4 e 6, a razão de semelhança pode ser $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ou $\frac{4}{2} = \frac{6}{3} = 2$.

Orientações didáticas

Propriedades da semelhança

Para melhor compreensão deste tópico, é importante trazer exemplos para ver aplicações das propriedades. É possível estabelecer os seguintes valores para os lados dos triângulos desenhados e verificar as razões de semelhança:

- Triângulo menor: 2 cm, 3 cm, 4 cm;
- Triângulo médio: 3 cm, 4,5 cm, 6 cm;
- Triângulo maior: 4 cm, 6 cm, 8 cm.

Desenvolva com os estudantes os conceitos de propriedade reflexiva, propriedade simétrica e propriedade transitiva. Desenhe os triângulos na lousa, utilizando réguas e compassos. Se possível, utilize *softwares* de geometria para fazer essa apresentação.

Atividades

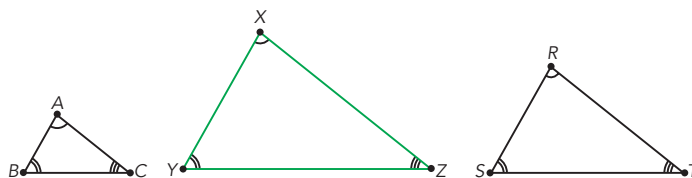
Na atividade **6**, será necessária a utilização de réguas e compassos. Oriente os estudantes a fazerem um quadro no qual anotarão os lados e ângulos de cada um dos triângulos. Dessa forma, poderão compará-los, utilizando as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

Se a razão de semelhança de dois triângulos é igual a 1, então:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = 1, \text{ consequentemente, } a = d;\ b = e;\ c = f.$$

Portanto, os triângulos são congruentes.

Propriedades da semelhança

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Propriedade reflexiva:

Todo triângulo é semelhante a si mesmo.
$\triangle ABC \sim \triangle ABC$

Propriedade simétrica:

Se um triângulo é semelhante a outro, então esse outro é semelhante ao primeiro.
$\triangle ABC \sim \triangle XYZ \Rightarrow \triangle XYZ \sim \triangle ABC$

Propriedade transitiva:

Se um triângulo é semelhante a outro e esse outro é semelhante a um terceiro triângulo, então o primeiro é semelhante ao terceiro.
$(\triangle ABC \sim \triangle XYZ \text{ e } \triangle XYZ \sim \triangle RST) \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle RST$

Atividades

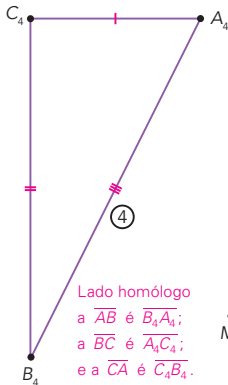
Faça as atividades no caderno.

Como citamos, toda medição é aproximada. Dessa maneira, a atividade **6** também padece de um grau de incerteza.

6. Analise os triângulos e meça seus lados. Além dele mesmo, indique quais triângulos são semelhantes a:

a) 1 2; 3; 7 e 10. **b)** 4 Nenhum. **c)** 5 6 **d)** 8 9 **e)** 11 12

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

7. Todos os triângulos a seguir são semelhantes ao modelo. Escreva no caderno o nome de cada um dos lados homólogos aos do modelo.

8. Em cada item, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes. Determine as medidas dos elementos indicadas por letras.

9. Os lados de um triângulo medem 7 cm, 5 cm e 4 cm. Determine as medidas dos lados de um triângulo semelhante, sabendo que a razão de semelhança do primeiro para o segundo é $\frac{1}{3}$. 21 cm, 15 cm e 12 cm.

Orientações didáticas

Atividades

Na atividade **7**, caso os estudantes tenham dificuldades, retome o conceito de homólogo (lados entre os mesmos ângulos, lados correspondentes) e ressalte a importância de identificar primeiramente os ângulos congruentes, já que os triângulos estão em posições diferentes. Isso vale para as atividades **8** e **13**, já que os estudantes precisam identificar os ângulos congruentes e os lados homólogos para escrever corretamente as relações de proporção e descobrir os valores desconhecidos.

As atividades **9** a **11** apresentam o conceito de razão de semelhança. É importante ressaltar que, dependendo de qual triângulo é considerado como o primeiro, a razão pode se inverter. Na atividade **9**, por exemplo, se a razão fosse do segundo para o primeiro triângulo, ela seria 3, e isso pode facilitar no entendimento de que as medidas dos lados do segundo são o triplo das medidas dos lados do primeiro.

A atividade **14** apresenta uma razão entre os lados, que precisa ser interpretada como a razão de semelhança do maior triângulo para o menor, uma vez que a razão é maior do que 1, ou seja, os resultados das dimensões precisam ser menores do que as fornecidas no enunciado.

A atividade **12** é uma aplicação direta do que foi demonstrado na atividade **11**, uma vez que é preciso primeiramente encontrar a razão de semelhança a partir da razão entre os perímetros.

Orientações didáticas

Teorema da semelhança de triângulos I

Na BNCC

Este tópico mobiliza com maior ênfase a **CEMAT02** ao propor que os estudantes explorem o trabalho com demonstrações.

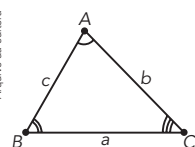
Para a melhor compreensão da primeira conclusão da demonstração, é importante ressaltar que os ângulos $\hat{D}$ e $\hat{B}$, $\hat{E}$ e $\hat{C}$ são congruentes dois a dois porque são correspondentes. Se achar pertinente, retome as relações entre os ângulos formados por paralelas e transversais.

Para melhor compreensão da segunda conclusão, se achar pertinente, retome o teorema de Tales.

Na terceira conclusão, é possível que os estudantes tenham dificuldades para compreender o motivo de precisarmos traçar uma paralela a $\overline{AB}$. Caso haja essa dúvida, justifique que isso é realizado para que seja possível estabelecer uma relação entre os lados $\overline{DE}$ e $\overline{BC}$ dos triângulos, garantindo que *BDEF* é um paralelogramo, por construção. Reforce que, fazendo isso, formamos um segmento de reta $\overline{BF}$ com a mesma medida de $\overline{DE}$, ou seja, é como se deslocássemos um dos lados do triângulo menor para o maior a fim de estabelecer uma relação entre esses lados.

Faça as atividades no caderno.

10. Os triângulos *ABC* e *A'B'C'* da figura são semelhantes ($\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$). Se a razão de semelhança do primeiro triângulo para o segundo é $\frac{3}{2}$, determine:

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

a) *a*, *b* e *c*; 21; 18; 15.

b) a razão entre as medidas de perímetro. $\frac{3}{2}$

11. Mostre que, se a razão de semelhança entre dois triângulos é *k*, a razão entre as medidas de perímetro também é *k*. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

12. Os lados de um triângulo medem 8 cm, 18 cm e 16 cm. Um triângulo semelhante a esse tem 63 cm de medida de perímetro. Determine as medidas dos lados do segundo triângulo. 12 cm, 27 cm e 24 cm.

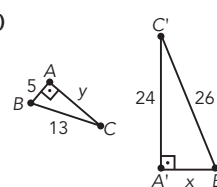
13. Em cada item, os triângulos *ABC* e *A'B'C'* são semelhantes. Calcule a razão de semelhança e as medidas dos elementos indicadas por *x* e *y*.

a)

$\frac{1}{2}$; $x = 10$ e $y = 12$.

b)

2; $x = 12$; $y = 6$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

14. Os três lados de um triângulo *ABC* medem 9 cm, 18 cm e 21 cm. Determine a medida dos lados de um triângulo *A'B'C'* semelhante a *ABC*, sabendo que $\frac{AB}{A'B'} = 3$. 3 cm, 6 cm e 7 cm.

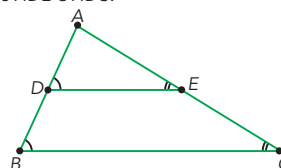
As imagens não estão representadas em proporção.

Teorema da semelhança de triângulos I

Vamos agora conhecer o teorema fundamental da semelhança de triângulos. Note como chegamos a ele.

A figura a seguir mostra um triângulo *ABC*, um ponto *D* em $\overline{AB}$, um ponto *E* em $\overline{AC}$, e $\overline{DE}$ é um segmento de reta paralelo ao lado $\overline{BC}$.

Verifique os ângulos dos triângulos *ADE* e *ABC*.

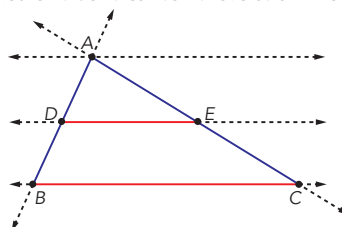
Banco de imagens/Arquivo da editora

Do paralelismo de $\overline{DE}$ e $\overline{BC}$, temos:

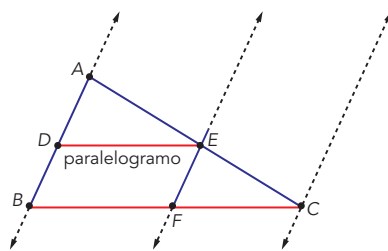
$$\hat{D} \cong \hat{B} \text{ e } \hat{E} \cong \hat{C}$$

Então, os triângulos *ADE* e *ABC* têm os ângulos ordenadamente congruentes:

$$\hat{D} \cong \hat{B},\ \hat{E} \cong \hat{C} \text{ e } \hat{A} \text{ em comum} \quad (1)$$

Sendo $\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ e aplicando o teorema de Tales nas transversais $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{AC}$, temos: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ (2)

Banco de imagens/Arquivo da editora

Pelo ponto E, vamos conduzir $\overleftrightarrow{EF}$, paralela a $\overleftrightarrow{AB}$:

Banco de imagens/Arquivo da editora

Sendo $\overleftrightarrow{EF} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ e aplicando o teorema de Tales, temos:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$$

Mas $\overline{BF} \cong \overline{DE}$, pois $BDEF$ é um paralelogramo.

Substituindo BF por DE na última igualdade, vem: $\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$ ③

Comparando ② e ③, temos: $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$ ④

Voltando aos triângulos ADE e ABC, concluímos que eles têm **ângulos congruentes** (por ①) e **lados proporcionais** (por ④). Logo, eles são semelhantes.

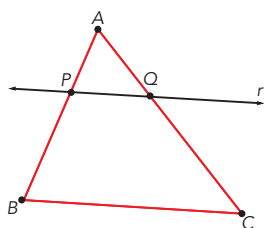
$$\triangle ADE \sim \triangle ABC$$

Toda paralela a um lado de um triângulo que intersecta os outros dois lados em pontos distintos determina um novo triângulo semelhante ao primeiro.

Teorema da semelhança de triângulos II

Uma reta r intersecta os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ de um triângulo ABC nos pontos distintos P e Q, respectivamente. Essa reta determina os segmentos de reta correspondentes, $\overline{AQ}$ e $\overline{AP}$, $\overline{QC}$ e $\overline{PB}$, nos lados $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente. Vamos supor, ainda, que:

$$\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ} \quad ①$$

Banco de imagens/Arquivo da editora

Dessa igualdade, decorre:

$$\frac{AB}{AP} - 1 = \frac{AC}{AQ} - 1 \Rightarrow \frac{AB - AP}{AP} = \frac{AC - AQ}{AQ} \Rightarrow \frac{PB}{AP} = \frac{QC}{AQ} \quad ②$$

De ① e ② podemos concluir que os segmentos de reta correspondentes são proporcionais. Dizemos, então, que a reta r **divide proporcionalmente** os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

Orientações didáticas

Teorema da semelhança de triângulos II

Na BNCC

Este tópico mobiliza com maior ênfase a **CEMAT02** ao propor que os estudantes explorem o trabalho com demonstrações.

É possível que os estudantes tenham dificuldades para compreender os passos, mas, caso isso aconteça, é importante deixar claro o objetivo de cada passo no desenvolvimento da demonstração.

Primeiramente, é preciso reforçar que não se sabe a posição relativa entre a reta r e $\overline{BC}$. No primeiro e segundo passos, deseja-se comprovar que os lados são proporcionais. No terceiro passo, deseja-se comprovar que é absurdo supor que r não seja paralelo a $\overline{BC}$, uma vez que, se isso não ocorrer, os lados não serão proporcionais, como foi comprovado nos primeiros passos.

Orientações didáticas

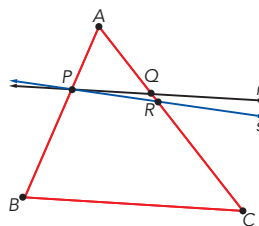
Teorema da semelhança de triângulos II

Conclua o conceito do teorema de semelhança de triângulos pedindo aos estudantes que reescrevam, com suas próprias palavras, a definição: “Toda reta que intersecta dois lados de um triângulo em pontos distintos, dividindo-os proporcionalmente, é paralela ao outro lado do triângulo”.

Atividades

Nas atividades **15** a **17**, oriente os estudantes a utilizar a álgebra, além dos conceitos de proporcionalidade e semelhança de triângulos, para encontrar os valores das incógnitas. Talvez os estudantes tenham dúvidas no tocante aos triângulos estarem inscritos, portanto, se necessário, desenhe as figuras separadamente na lousa, para que os estudantes identifiquem os triângulos semelhantes e congruentes. Se necessário, ajude-os a desenvolver as equações.

Agora, vamos traçar a reta s que passa por P e é paralela à reta $\overleftrightarrow{BC}$. Vamos supor que a reta s intersecta o lado $\overline{AC}$ em um ponto R, distinto de Q.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Pelo **teorema da semelhança de triângulos I**, o triângulo APR é semelhante ao triângulo ABC, logo:

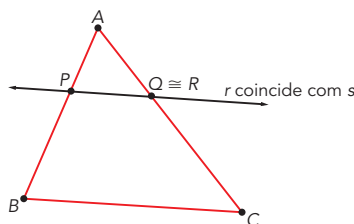
$$\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AR} \quad (3)$$

Decorre de (1) e (3) que: $\frac{AC}{AQ} = \frac{AC}{AR}$ e, daí, vem $AR = AQ$.

Como os pontos R e Q pertencem ao lado $\overline{AC}$, e $AR = AQ$, R e Q não podem ser pontos distintos, eles são pontos coincidentes.

Assim, as retas $r\ (\overleftrightarrow{PQ})$ e $s\ (\overleftrightarrow{PR})$ são coincidentes. Como a reta r é paralela ao lado $\overline{BC}$, concluímos que a reta s é paralela ao lado $\overline{BC}$.

Resumindo: a reta r, que intersecta os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ em pontos distintos P e Q, respectivamente, tais que $\frac{AB}{AP} = \frac{AC}{AQ}$, é paralela ao lado $\overline{BC}$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Demonstramos, assim, o seguinte teorema, que chamaremos de teorema da semelhança de triângulos II:

> Toda reta que intersecta dois lados de um triângulo em pontos distintos, dividindo-os proporcionalmente, é paralela ao outro lado do triângulo.

As imagens não estão representadas em proporção.

Faça as atividades no caderno.

15. Sabendo que $\overline{BE} \,/\!/\, \overline{CD}$, $AD = 20$ cm, $AC = 12$ cm, $CD = 16$ cm e $AE = 5$ cm, determine $AB = x$ e $BE = y$. $x = 3$ cm; $y = 4$ cm.

Banco de imagens/Arquivo da editora

16. Na figura, os ângulos $\hat{R}$ e $\hat{C}$ são congruentes, $AS = 6$ cm, $SB = 12$ cm e $BC = 30$ cm. Determine $RS = x$. $x = 10$ cm

Banco de imagens/Arquivo da editora

18. c) Ubirajara é um nome de origem tupi que pode significar "senhor da lança", "senhor do tacape" ou "o dono da floresta".
Fonte dos dados: http://www.seer.ufu.br/index.php/GTLex/article/download/37831/20533/.
Acesso em: 3 maio 2022.

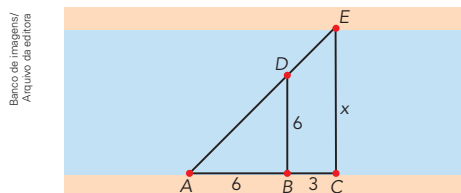
Faça as atividades no caderno.

17. Na figura, $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$, $MN = x - 2$, $BC = x$, $AN = 2$ e $AC = 3$, sendo todas as medidas na mesma unidade. Determine x. $x = 6$

Banco de imagens/Arquivo da editora

18. Ubirajara comprou uma fazenda por onde passa um rio. Para delimitar a Área de Preservação Permanente (APP), ele elaborou um esquema das medidas que conhece, conforme ilustração a seguir, e precisa descobrir a medida x da largura do rio.

a) Considere o esquema a seguir, com as medidas feitas por Ubirajara na margem do rio. O ponto D é uma formação rochosa que está a 6 metros da margem em que Ubirajara está. Qual é a medida da largura do rio? 9 metros.

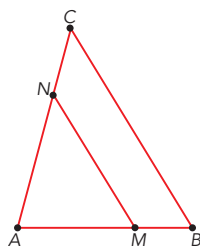
Banco de imagens/Arquivo da editora

b) De acordo com a legislação apresentada no início da Unidade, quantos metros a partir da margem deverá ter a APP deste rio?
30 metros a partir da margem.

c) Qual é o significado do nome Ubirajara? Pesquise a origem desse nome e seu significado.

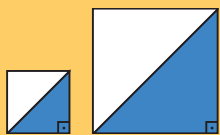
19. De um triângulo ABC sabemos que $AB = 20$ m, $BC = 30$ m e $AC = 25$ m. Se D está em $\overline{AB}$, E em $\overline{AC}$, $\overline{DE}$ é paralelo a $\overline{BC}$ e $DE = 18$ m, determine $x = DB$ e $y = EC$. $x = 8$ m; $y = 10$ m.

20. As bases de um trapézio medem 12 m e 18 m, e os lados oblíquos às bases medem 5 m e 7 m. Determine a medida dos lados do menor triângulo que obtemos ao prolongar os lados oblíquos às bases. 10 m; 12 m; 14 m.

21. Calcule a medida de perímetro do triângulo ABC da figura a seguir, sabendo que $AM = 12$ m; $AN = 14$ m; $MN = 16$ m; $BM = 6$ m e $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$. 63 m

Banco de imagens/Arquivo da editora

As imagens não estão representadas em proporção.

Participe

I. Na figura a seguir, pintamos dois triângulos retângulos e isósceles.

a) Você acha que esses triângulos são semelhantes ou não? Por quê? Respostas pessoais.

b) Quanto medem os ângulos de cada triângulo? 90°, 45° e 45°.

c) Os ângulos correspondentes são congruentes? Sim.

d) Agora, sem medir os lados para verificar se são proporcionais, pode-se garantir que são triângulos semelhantes? Resposta pessoal.

II. Verifique os triângulos ABC e EGF a seguir. Esses triângulos têm dois pares de lados correspondentes proporcionais e dois ângulos internos correspondentes congruentes.

Em sua opinião, eles são semelhantes ou não? Por quê? Respostas pessoais.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Orientações didáticas

Atividades

A atividade **18** retoma o tema adotado no texto de introdução apresentado no início da unidade. Se achar pertinente, oriente que seja realizada a leitura do texto relativo a Áreas de Preservação Permanente (APP), antes de iniciar a atividade.

Para realizar a atividade **19** e **20**, oriente que os estudantes realizem o desenho das situações para facilitar o entendimento e a montagem das proporções de maneira correta. No caso da atividade **20**, caso os estudantes tenham dificuldade de relacionar ao teorema I, relembre a definição de trapézio (apresenta pelo menos um par de lados paralelos) e as nomenclaturas (bases e lados oblíquos). Reforce que as bases sempre são paralelas.

Proposta para o estudante

Incentive os estudantes a pesquisar outras palavras utilizadas em nosso cotidiano que são de origem indígena. Esse reconhecimento promove a valorização de povos indígenas e do campo, favorecendo o desenvolvimento do TCT *Diversidade Cultural*. Indicamos duas referências que podem auxiliar na pesquisa por essas palavras.

FRANZIN. A. Palavras indígenas nomeiam a maior parte das plantas e animais do Brasil. *EBC*, 2015. Disponível em: https://memoria.ebc.com.br/infantil/voce-sabia/2015/10/palavras-indigenas-nomeiam-maior-parte-das-plantas-e-animais-do-brasil.

DICIONÁRIO Ilustrado de Tupi Guarani. Disponível em: https://www.dicionariotupiguarani.com.br/. Acesso em: 28 jun. 2022.

Orientações didáticas

Casos de semelhança

Na BNCC

Neste tópico, pode-se ressaltar a importância de sempre apresentar argumentações e justificativas matemáticas para qualquer conclusão, a fim de evitar conclusões errôneas e de desenvolver a **CG02** e a **CEMAT02**.

1º caso: AA (ângulo-ângulo)

Inicie este tópico reforçando que, para concluir que dois triângulos são semelhantes, não precisaremos sempre conferir todas as condições (congruência dos três ângulos e proporcionalidade dos três lados), basta algumas delas para que as demais também sejam satisfeitas. O objetivo do estudo desses três casos é simplificar a identificação da semelhança.

Caso os estudantes tenham dificuldades para compreender a maneira como as demonstrações foram construídas, reforce que precisamos desenhar um triângulo semelhante ao triângulo *ABC* em seu interior para poder concluir que esse novo triângulo é congruente ao primeiro e, portanto, isso comprova que os dois analisados inicialmente eram semelhantes.

2º caso: LAL (lado-ângulo-lado)

Para iniciar o 2º caso LAL, e desenvolver mais a ideia intuitiva deste caso de semelhança, se achar pertinente, peça a grupos de estudantes para construírem ângulos com uma medida fixa (30°, por exemplo), com apoio de um transferidor, e construírem segmentos coincidentes aos lados desses ângulos, com medidas proporcionais. Peça para construírem um segmento para fechar cada triângulo e anote as medidas fornecidas, concluindo junto com a sala que essas medidas também são proporcionais. É possível, também, pedir para todos medirem os outros dois ângulos para concluírem que há congruência.

O conceito de triângulos semelhantes tem as seguintes condições para que um triângulo *ABC* seja considerado semelhante a outro, *A'B'C'*:

$$\underbrace{\hat{A} \cong \hat{A}',\ \hat{B} \cong \hat{B}' \text{ e } \hat{C} \cong \hat{C}'}_{\text{três congruências de ângulos}} \quad \text{e} \quad \underbrace{\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}}_{\text{proporcionalidade dos três lados}}$$

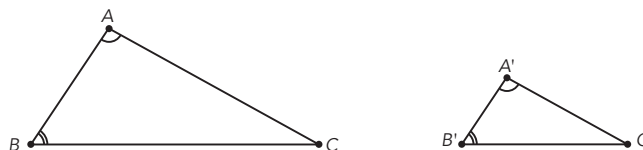
Casos de semelhança

Entretanto, essas exigências não precisam ser sempre verificadas. Os casos de semelhança (ou critérios de semelhança) que vamos demonstrar a seguir mostram que determinadas condições são suficientes para garantir que dois triângulos sejam semelhantes.

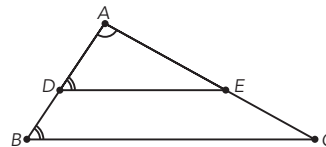
1º caso: AA (ângulo-ângulo)

Analise dois triângulos, *ABC* e *A'B'C'*, com dois ângulos respectivamente congruentes:

$$\hat{A} \cong \hat{A}' \text{ e } \hat{B} \cong \hat{B}'$$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Se $AB = A'B'$, então $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ e, daí, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Vamos supor que os triângulos não são congruentes e que $AB > A'B'$.

Tomemos *D* em $\overline{AB}$, de modo que $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$, e por *D* vamos traçar $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$.

Pelo caso de congruência ALA, os triângulos *ADE* e *A'B'C'* são congruentes; logo, são semelhantes (razão de semelhança = 1):

$$\triangle ADE \sim \triangle A'B'C'$$

Pelo teorema fundamental, os triângulos *ADE* e *ABC* são semelhantes:

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC$$

Então, pela propriedade transitiva, os triângulos *A'B'C'* e *ABC* também são semelhantes:

$$\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$$

Se dois triângulos têm dois ângulos respectivamente congruentes, então eles são semelhantes.

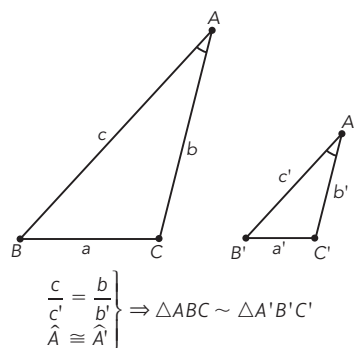
É por isso que podemos garantir, por exemplo, que dois triângulos retângulos e isósceles são semelhantes.

2º caso: LAL (lado-ângulo-lado)

Se dois triângulos têm dois lados correspondentes proporcionais e os ângulos formados por eles são congruentes, então eles são semelhantes.

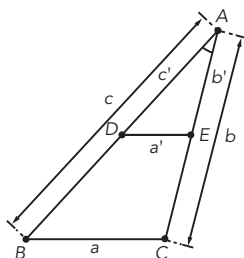
Analise a demonstração considerando os dois triângulos a seguir. Temos que:

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{c}{c'} = \dfrac{b}{b'} \\ \hat{A} \cong \hat{A'}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

Se $b = b'$, então $c = c'$ e, daí, pelo caso de congruência LAL, $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$; logo, $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Vamos supor que os triângulos não sejam congruentes e que $b > b'$; logo, $c > c'$.

Tomando D em $\overline{AB}$, com $AD = c'$, e E em $\overline{AC}$, com $AE = b'$, note que, pelo caso de congruência LAL, $\triangle ADE \cong \triangle A'B'C'$; logo:

$$\triangle ADE \sim \triangle A'B'C' \text{ (1)}$$

Banco de imagens/Arquivo da editora

Pelo teorema da semelhança de triângulos II, $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ e, então, pelo teorema da semelhança de triângulos I:

$$\triangle ADE \sim \triangle ABC \text{ (2)}$$

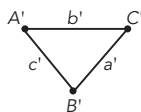
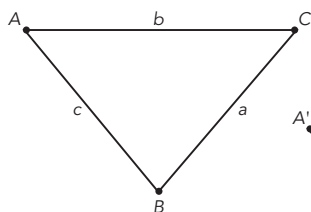
Por (1) e (2), $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

Na seção *Na História*, há uma aplicação interessante desse caso, em que explicamos como a semelhança de triângulos pode ser usada na construção de um túnel.

3º caso: LLL (lado-lado-lado)

Se dois triângulos têm os lados correspondentes proporcionais, então eles são semelhantes.

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' \text{ (1)}$$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Caso $a = a'$, logo $b = b'$ e $c = c'$, pelo caso LLL, os triângulos são congruentes; logo, são semelhantes.

Orientações didáticas

3º caso: LLL (lado-lado-lado)

Para desenvolver melhor a ideia intuitiva relacionada ao 3º caso LLL, é possível pedir para grupos de estudantes construírem triângulos com três lados proporcionais, com apoio de um compasso, e medirem os ângulos com um transferidor, a fim de concluírem que são sempre congruentes.

Orientações didáticas

Consequência: base média de um triângulo

Este tópico traz aplicações diretas dos casos de semelhança vistos nas páginas anteriores, acrescentando o conceito de pontos médios do segmento de retas formados pelos lados do triângulo. Para melhor compreensão dos estudantes, estimule que eles tirem as próprias conclusões a respeito dessas consequências. Para isso, peça que desenhem o mesmo triângulo três vezes e tracem, em cada um deles, um segmento de reta que vá de um ponto médio a outro. Se julgar necessário, faça o primeiro. É esperado que o estudante perceba que todos os segmentos de retas produzidos pelo ligamento dos pontos médios têm a reta suporte paralela a um dos lados do triângulo. Espera-se que o estudante também perceba que tais segmentos de reta geram um triângulo semelhante inscrito no triângulo original. Finalmente, demonstre como o coeficiente k coincide em todas as proporcionalidades encontradas.

Vamos supor $a > a'$; logo, $b > b'$ e $c > c'$. Marquemos D em $\overline{AB}$ com $AD = c'$ e E em $\overline{AC}$ com $AE = b'$. Pelo teorema da semelhança de triângulos II, $\overline{DE} \,/\!/\, \overline{BC}$ e, então, pelo teorema da semelhança de triângulos I:

$\triangle ADE \sim \triangle ABC$ (2)

Por (1) e (2), $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Consequência: base média de um triângulo

Considere este triângulo ABC, em que M e N são os pontos médios de $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$.

Chamamos $\overline{MN}$ de **base média** do triângulo ABC.

Analise os triângulos AMN e ABC. Eles têm $\hat{A}$ em comum e $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{1}{2}$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

De acordo com o 2º caso de semelhança, temos:

$\triangle AMN \sim \triangle ABC$, portanto, nesses triângulos, $\hat{M} \cong \hat{B}$ e $\frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$.

Assim, podemos concluir que $\overline{MN} \,/\!/\, \overline{BC}$ e $MN = \frac{BC}{2}$.

Podemos resumir da seguinte maneira:

Se um segmento de reta une os pontos médios de dois lados de um triângulo, então ele é paralelo ao terceiro lado e tem medida igual à metade do terceiro lado.

Agora, considere a figura a seguir. Tomamos um triângulo ABC e marcamos M, ponto médio do lado $\overline{AB}$. Em seguida, traçamos por M a reta r, paralela ao lado $\overline{BC}$.

Pelo teorema fundamental, temos $\triangle AMN \sim \triangle ABC$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

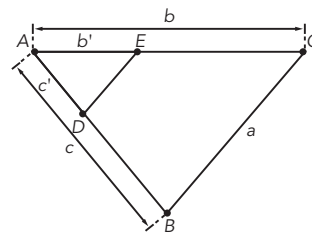
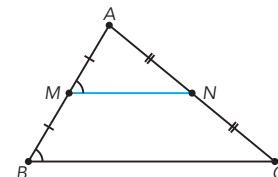
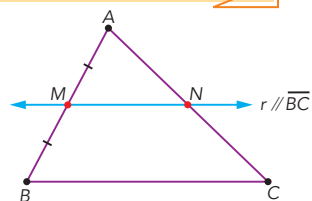
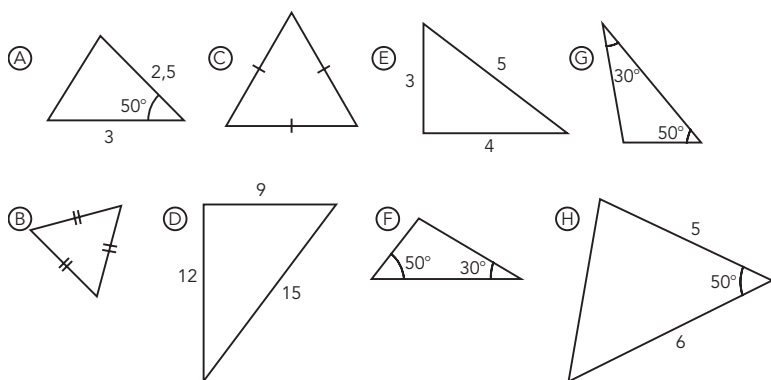
Como $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{2}$, concluímos que $\frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$, ou seja, N é ponto médio de $\overline{AC}$ e MN é a metade de BC.

Resumindo:

Se, pelo ponto médio de um lado de um triângulo, traçarmos uma reta paralela a outro lado, então ela encontra o terceiro lado em seu ponto médio.

Com base nos casos de semelhança, se a razão de semelhança de dois triângulos é k, então podemos ter os seguintes resultados:

- a razão entre lados homólogos é k;
- a razão entre os perímetros é k;
- a razão entre as alturas homólogas é k;
- a razão entre as medianas homólogas é k;
- a razão entre as bissetrizes internas homólogas é k;
- a razão entre os raios dos círculos inscritos é k;
- a razão entre os raios dos círculos circunscritos é k; etc.

A razão entre dois elementos lineares homólogos é k, e os ângulos homólogos são congruentes.

Faça as atividades no caderno.

22. Dados 8 triângulos, indique os pares de triângulos semelhantes e o caso de semelhança correspondente. Atenção! As medidas não estão representadas em escala. A ~ H (LAL); B ~ C (LLL); D ~ E (LLL); F ~ G (AA).

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

23. Determine x e y nas figuras:

a) $x = 2$; $y = 3$.

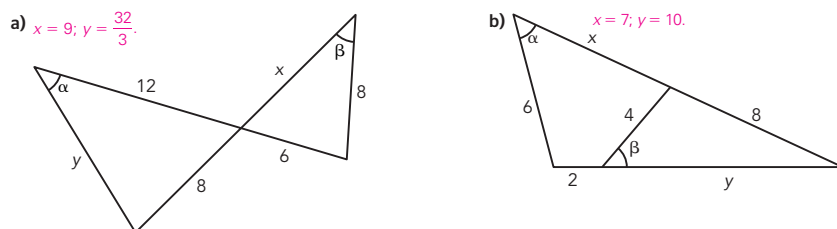
b) $x = 8$; $y = 10$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

24. Determine a medida da altura de um prédio cuja sombra mede 15 m de comprimento no mesmo instante em que uma vara de 6 m de altura, fincada em posição vertical, tem uma sombra que mede 2 m de comprimento. 45 m

As imagens não estão representadas em proporção.

Alberto De Stefano/Arquivo da editora

25. Se $\alpha = \beta$, determine x e y nos seguintes casos:

a) $x = 9$; $y = \frac{32}{3}$.

b) $x = 7$; $y = 10$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Orientações didáticas

Atividades

A atividade **22** é uma aplicação direta da identificação dos casos de semelhança. Caso os estudantes tenham dificuldade, peça para escreverem ao lado de cada triângulo os dados que foram fornecidos, para identificar melhor o caso.

Nas atividades **23** e **24**, ressalte o fato de não ter sido fornecida no enunciado a informação de que os triângulos são semelhantes e, portanto, será necessário identificar o caso de semelhança de triângulos. Só depois disso será possível reconhecer os lados homólogos e montar as proporções.

Nas atividades **25** a **28**, também será preciso identificar a semelhança pelo caso AA, entretanto, os triângulos apresentam posições diferentes, e será preciso identificar que há um ângulo comum aos dois triângulos.

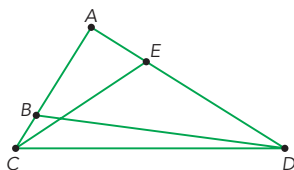
Orientações didáticas

Atividades

Na atividade **29**, caso os estudantes tenham dificuldades de perceber a semelhança, sugira que reproduzam a figura no caderno e pintem os ângulos congruentes da mesma cor.

Na atividade **30**, há 4 triângulos semelhantes, porém em posições diferentes.

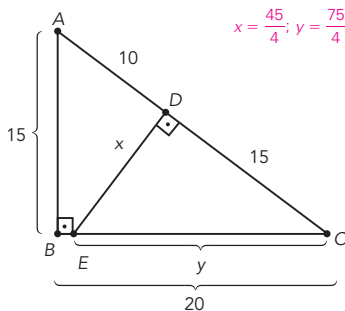
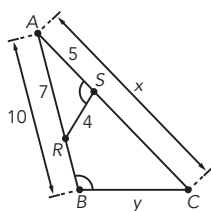
26. Na figura, as medidas são $AB = 8$ cm, $BC = 3$ cm, $AE = 5$ cm. Calcule $DE = x$, sabendo-se que $A\hat{C}E \cong A\hat{D}B$. $x = \frac{63}{5}$ cm.

Banco de imagens/Arquivo da editora

27. Dada a figura, determine o valor de x e de y.

$x = \frac{45}{4}$; $y = \frac{75}{4}$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

28. Na figura a seguir, temos:

Banco de imagens/Arquivo da editora

- $\hat{S} \cong \hat{B}$
- $AR = 7$ cm
- $AS = 5$ cm
- $SR = 4$ cm
- $AB = 10$ cm

Determine $AC = x$ e $BC = y$. $x = 14$ cm; $y = 8$ cm.

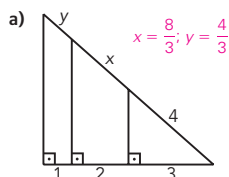
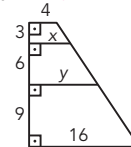
29. Determine x e y.

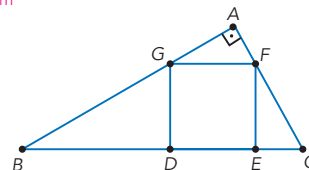
a) $x = \frac{8}{3}$; $y = \frac{4}{3}$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

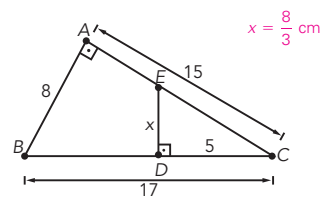
b) $x = 6$; $y = 10$.

As imagens não estão representadas em proporção.

Banco de imagens/Arquivo da editora

30. Na figura a seguir, o quadrado $DEFG$ está inscrito no triângulo retângulo ABC. Sendo $BD = 8$ cm e $CE = 2$ cm, calcule a medida de perímetro do quadrado.
16 cm

Banco de imagens/Arquivo da editora

31. Determine $DE = x$, sabendo que o triângulo ABC é retângulo em A, o triângulo DEC é retângulo em D, $AB = 8$ cm, $AC = 15$ cm, $BC = 17$ cm e $CD = 5$ cm.

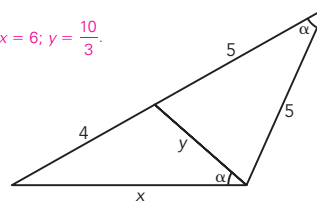
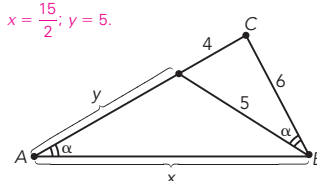
$x = \frac{8}{3}$ cm

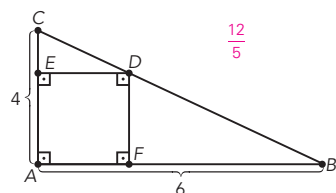
Banco de imagens/Arquivo da editora

32. Determine x e y nos casos a seguir.

a) $x = 6$; $y = \frac{10}{3}$.

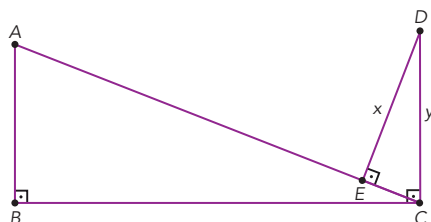
b) $x = \frac{15}{2}$; $y = 5$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

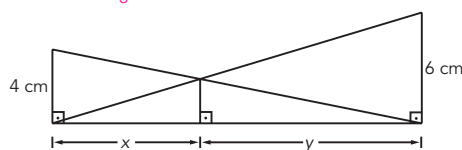
Faça as atividades no caderno.

33. Determine a medida dos lados do quadrado da figura a seguir.

$\frac{12}{5}$

Banco de imagens/Arquivo da editora

34. Dois círculos de raios medindo 6 cm e 4 cm são tangentes exteriormente no ponto *A*. Sendo *C* e *D* os pontos de tangência de uma reta *t* externa, com os dois círculos, determine a medida da altura do triângulo *ACD* relativa ao lado $\overline{CD}$. 4,8 cm

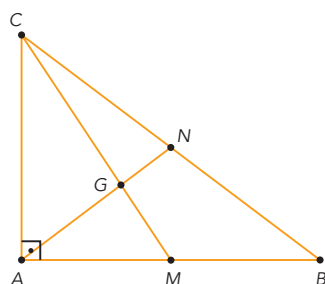
35. Na figura, temos: $AB = 8$, $BC = 15$, $AC = 17$ e $EC = 4$. Determine $DE = x$ e $CD = y$.

$x = \frac{15}{2}$; $y = \frac{17}{2}$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

36. Calcule a razão $\frac{x}{y}$ na figura a seguir. $\frac{2}{3}$

Banco de imagens/Arquivo da editora

37. Prove a propriedade do baricentro de um triângulo:

"O baricentro (ponto de intersecção das medianas) divide a mediana em duas partes que medem $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ dela".
A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

38. Em um triângulo *ABC*, $med(\hat{A}) = 90°$, $AB = 12$ cm e $AC = 9$ cm, *M* é ponto médio de $\overline{AB}$, *N* é ponto médio de $\overline{BC}$, e $\overline{AN}$ e $\overline{CM}$ intersectam-se em *G*. Qual é a medida de área do triângulo *ABG*? 18 cm^2

Banco de imagens/Arquivo da editora

Orientações didáticas

Atividades

Há 3 triângulos semelhantes, na mesma posição, na atividade **33**, entretanto ao chamar o lado do quadrado de *x* será preciso identificar que os catetos dos triângulos menores estarão em função de *x*, o que pode gerar dúvidas nos estudantes. Se achar pertinente, sugira a reprodução da figura no caderno e o uso de cores para facilitar a visualização das medidas dos lados.

As atividades **34**, **37** e **38** apresentam um nível de complexidade maior, pois envolvem conceitos geométricos presentes em outros capítulos, como o de circunferências tangentes, reta tangente, baricentro e área, por exemplo. Se achar pertinente, retome esses conceitos e auxilie os estudantes a fazer o desenho das situações descritas, a fim de identificar a semelhança entre os triângulos formados. A atividade **38** é uma aplicação do resultado demonstrado na atividade **37**.

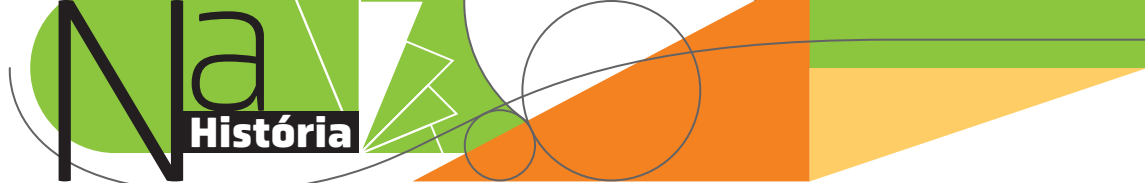
Nas atividades **35** e **36**, é possível que os estudantes tenham dificuldade de identificar os ângulos congruentes. Com relação à atividade **35**, caso isso aconteça, reforce a relação entre os ângulos que são congruentes. Quanto à atividade **36**, sugira a reprodução da figura no caderno para que pintem de cores diferentes os triângulos identificados ou que os desenhem na mesma posição para facilitar a visualização da correspondência.

Orientações didáticas

Na História

Na BNCC

Esta seção favorece o trabalho do TCT *Ciência e Tecnologia*, uma vez que a matemática é apresentada como solução para a resolução de problemas de engenharia. Mobiliza também a **CG01**, **CEMAT01** e a **CEMAT05.**

Aproveite a situação para abordar o caso LAL de semelhança de triângulos, pois é por esse caso que se pode concluir que os triângulos $O_1C_1S_1$ e *OCS*, citados no texto, são semelhantes. Se achar pertinente, oriente os estudantes a ler o texto e resolver as questões **2** e **3**, quando esse caso de semelhança for introduzido.

A semelhança de triângulos na construção de um túnel

Denis Charlet/AFP

Trem atravessando o Eurotúnel em Coquelles, na França. Foto de julho de 2006.

O canal da Mancha é um braço de mar do oceano Atlântico que separa a Grã-Bretanha do norte da França. Muitos episódios históricos estão associados à travessia de suas águas, por exemplo, o dia D (6 de junho de 1944), da Segunda Guerra Mundial, em que mais de 100 mil soldados aliados o atravessaram, da Inglaterra para a Normandia (na França), em 5 mil barcos dos mais diversos tipos. No mês de setembro seguinte, cerca de 2 milhões de soldados já haviam feito essa travessia. Essa operação determinou a derrocada das tropas de Hitler na Europa ocidental.

Em contrapartida, a travessia do canal da Mancha a nado é considerada a prova mais difícil de natação em águas abertas do mundo. O primeiro homem a conseguir essa proeza foi o inglês Matthew Webb (1848-1883), em 1875, que, com uma rota em zigue-zague, percorreu cerca de 63,5 km em 21 horas e 45 minutos. O primeiro brasileiro a fazer essa travessia foi Abílio Couto (1924-1998), em 1958, em 12 horas e 45 minutos.

Atualmente é possível ir de Londres a Paris em 35 minutos pelo Eurotúnel, em um percurso de, aproximadamente, 55 km de comprimento e que passa cerca de 40 m abaixo das águas do canal.

O que nos interessa destacar aqui é o fato de que as obras do Eurotúnel foram conduzidas a partir das duas extremidades, o que é notável, apesar de toda a tecnologia moderna. O encontro das frentes de trabalho se deu em 1º de dezembro de 1990. O Eurotúnel só foi inaugurado em 5 de maio de 1994.

Curioso é que essa ideia já havia sido usada na ilha de Samos, entre 550 a.C. e 530 a.C., para construir um aqueduto, o famoso túnel de Eupalino, e que a geometria de Euclides teve um relevante papel nessa obra. Como?

Imaginemos uma cidade da Grécia antiga que, em razão do aumento de sua população, viu-se às voltas com o problema da falta de água. A fonte de água mais próxima para abastecer a cidade ficava em um local separado dela por uma montanha. Como, então, canalizar a água para a cidade, com a pouca tecnologia da época, através da montanha?

Faça as atividades no caderno.

Para evitar questões topográficas, imaginemos o problema de se ir do ponto C ao ponto S, na mesma horizontal (figura **1**), um de cada lado da montanha, mas em linha reta, através da montanha, partindo simultaneamente dos dois pontos.

Para isso, consideremos um terceiro ponto O, acessível aos pontos C e S (figura **1**). Nessas condições, é possível medir diretamente os segmentos de reta $\overline{OC}$ e $\overline{OS}$, e medir o ângulo interno $\hat{O}$. Usando unidades de medidas modernas, vamos supor que $OC = 2$ km, $OS = 3$ km e $med(\hat{O}) = 53°$. Mas para ligar C a S em linha reta é preciso determinar as medidas dos ângulos $\hat{C}$ e $\hat{S}$, os quais não podem ser medidos diretamente, uma vez que o segmento de reta $\overline{CS}$ passa pelo interior da montanha. É hora, então, de usarmos a Geometria euclidiana.

Usando uma escala conveniente (1:1000), podemos traçar o $\triangle O_1C_1S_1$ (figura **2**) semelhante ao $\triangle OCS$ da seguinte maneira:

$$\hat{O}_1 \cong \hat{O},\ O_1C_1 = 2 \text{ m e } O_1S_1 = 3 \text{ m}.$$

Então:

- $\dfrac{OC}{O_1C_1} = \dfrac{2\,000 \text{ m}}{2 \text{ m}} = 1000$
- $\dfrac{OS}{O_1S_1} = \dfrac{3\,000 \text{ m}}{3 \text{ m}} = 1000$

e que $\dfrac{OC}{O_1C_1} = \dfrac{OS}{O_1S_1}$ e $\hat{O} \cong \hat{O}_1$.

Figura 1.

Figura 2.

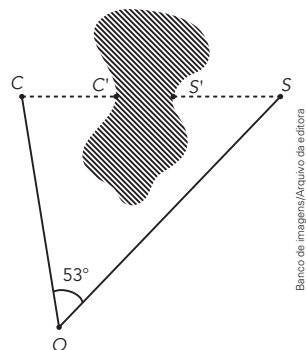
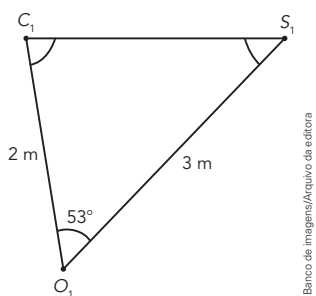
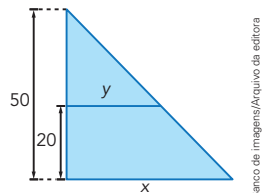
Portanto, $\triangle OCS \sim \triangle O_1C_1S_1$. Como $\hat{O} \cong \hat{O}_1$, também são semelhantes os triângulos OSC e $O_1C_1S_1$ (segundo caso de semelhança). Em consequência, $\hat{C} \cong \hat{C}_1$ e $\hat{S} \cong \hat{S}_1$. Então, as medidas de $\hat{C}_1$ e $\hat{S}_1$ podem ser "transportadas" para a figura **1**, formando os ângulos $\hat{C}$ e $\hat{S}$ de que precisamos e indicando a trajetória a ser seguida a partir das duas extremidades.

Fontes dos dados: BARBOSA, João Lucas Marques Barbosa. *Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro, SBM, 2007. EUCLIDES. *Os Elementos*. Trad. de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora da Unesp, 2009. STILLWELL, John. *Numbers and Geometry*. Nova York: Springer, 2000. CHANNEL *Swimming Association. Swim Results*. Disponível em: https://www.channelswimmingassociation.com/swims. REDAÇÃO Mundo Estranho. Como foi construído o túnel sob o canal da Mancha? *Superinteressante*, [*s. l.*], 4 jul. 2018. Disponível em: https://super.abril.com.br/mundo-estranho/como-foi-construido-o-tunel-sob-o-canal-da-mancha/. Acesso em: 10 jun. 2022.

1. A largura mínima do canal da Mancha mede, aproximadamente, 33 km. Se um nadador conseguisse nadar em linha reta esse percurso em 10 horas e 20 minutos, qual seria a medida de velocidade média em metros por minuto? Aproximadamente 53 metros por minuto.

2. Determine CS em função de C_1S_1. $CS = 1\,000 \cdot C_1S_1$

3. É possível determinar a medida $C'S'$ da largura da montanha em função dos resultados obtidos? Como? **3.** Sim. $C'S' = CS - (CC' + S'S)$.

4. Alguns escritos babilônicos do período de 2000 a.C. a 1600 a.C. mostram que os matemáticos da região sabiam a "receita" da medida de área de um trapézio retângulo e que os lados correspondentes de dois triângulos semelhantes são proporcionais. Em um documento desse período, há o seguinte problema: "Na figura a seguir, a área do trapézio retângulo de bases x e y e altura 20 é igual a 320 unidades de área. Determine x e y.". Resolva-o. $x = 20$ e $y = 12$.

Orientações didáticas

Na História

Os problemas propostos **1** e **4** têm o objetivo de expandir os conceitos abordados neste capítulo, de modo a aplicá-los em situações mais complexas, que envolvem outros contextos e outros conteúdos, não apenas da Matemática, mas também da Física, representada no componente curricular Ciências. A questão *1* pode proporcionar um trabalho interdisciplinar com a componente curricular de Geografia.

A atividade **4** favorece o trabalho com a **CEMAT01**, uma vez que reconhece a Matemática como ciência humana, capaz de modificar e quebrar paradigmas ao longo da história.

Orientações didáticas

O triângulo retângulo

Na BNCC

Neste capítulo, a habilidade **EF09MA13** será trabalhada por completo como uma continuação da habilidade **EF09MA12**, desenvolvida no capítulo anterior. A **CG02** e a **CEMAT02** serão trabalhadas em diversos momentos em que os estudantes serão incentivados a tirar suas próprias conclusões, realizar e testar hipóteses e compreender demonstrações. A habilidade **EF09MA14** será desenvolvida por meio da elaboração e resolução de problemas envolvendo a aplicação do teorema de Pitágoras.

O problema apresentado no início do capítulo tem o objetivo de instigar a curiosidade dos estudantes e mostrar a necessidade de compreender novos conceitos para resolver problemas. Caso ache pertinente, estimule os estudantes para que procurem soluções possíveis apenas com os conhecimentos prévios que possuem. Se não encontrarem a solução, reforce que o problema será retomado ao final do capítulo. Caso encontrem a solução, diga que aprenderão novas maneiras que podem ser mais simples do que as que foram empregadas.

A solução do problema utiliza o teorema de Pitágoras, uma vez que a diagonal do quebra-cabeça precisa ser menor ou igual ao diâmetro da mesa para que o quebra-cabeça caiba.

Relações métricas no triângulo retângulo

EF09MA13
EF09MA14

O triângulo retângulo

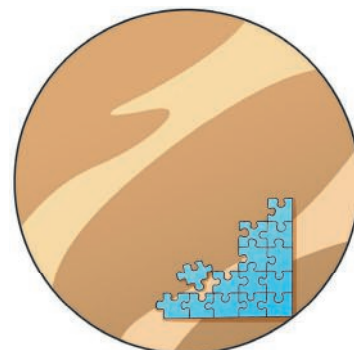
As imagens não estão representadas em proporção.

Quebrando a cabeça

Lara e Nícolas ganharam um quebra-cabeça de muitas peças. Os dois querem montá-lo sobre uma mesa circular de diâmetro medindo 90 cm. O quebra-cabeça tem formato retangular e, montado, tem dimensões que medem 54 cm por 72 cm. Será que Lara e Nícolas vão conseguir montá-lo na mesa?

karens4/iStockphoto/Getty Images

O quebra-cabeça foi inventado pelo inglês John Spilsbury em 1763.

Estúdio Mil/Arquivo da editora

Depois de estudar o assunto deste capítulo, você vai responder a essa pergunta e concluir se Lara e Nícolas vão conseguir montar o quebra-cabeça nessa mesa.

Participe

Faça as atividades no caderno.

I. Em um plano, vamos tomar:

- uma reta r e um ponto P fora dela.

Imaginando por P uma reta perpendicular a r, ela intersecta r no ponto P', chamado **projeção ortogonal** (diremos apenas **projeção**) de P sobre r.

- uma reta r e um segmento de reta $\overline{AB}$ não contido nela.

A projeção do segmento de reta $\overline{AB}$ sobre r é o segmento de reta $\overline{A'B'}$, sendo A' a projeção de A sobre r e B', a de B sobre r.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Agora, responda:

a) Na figura anterior, o quadrilátero $ABB'A'$ é um trapézio. Quais são as bases dele? $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$

Construa: As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

b) uma reta r, um segmento de reta $\overline{AB}$ não paralelo e não perpendicular a r, e a projeção de $\overline{AB}$ sobre r.

c) uma reta r, um segmento de reta $\overline{AB}$ paralelo a r, e a projeção de $\overline{AB}$ sobre r.

d) uma reta r, um segmento de reta $\overline{AB}$ contido em uma reta perpendicular a r, e a projeção de $\overline{AB}$ sobre r.

e) uma reta r, um ponto A em r, um ponto B fora de r e a projeção de $\overline{AB}$ sobre r.

II. Compare as medidas das projeções $\overline{A'B'}$ com as dos segmentos de reta $\overline{AB}$ desenhados nos itens **b**, **c**, e **d** e responda às seguintes perguntas:

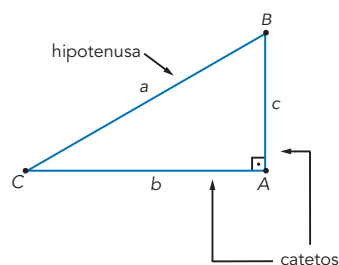
a) A medida da projeção pode ser 0? Em que caso? Sim; quando $\overline{AB} \perp r$.

b) A medida da projeção $\overline{A'B'}$ pode ser igual a do segmento de reta $\overline{AB}$? Em que caso? Sim; quando $\overline{AB} \parallel r$.

c) A medida da projeção $\overline{A'B'}$ pode ser maior do que a do segmento de reta $\overline{AB}$? Em que caso? Não; em nenhum caso.

d) O que você pode afirmar sobre a medida da projeção de um segmento de reta $\overline{AB}$ sobre uma reta em comparação com a medida de $\overline{AB}$? A medida da projeção é menor ou igual à medida de $\overline{AB}$.

Os elementos de um triângulo retângulo recebem denominações especiais; assim, para um triângulo ABC retângulo em A, temos que:

- o lado de medida a, oposto ao ângulo $\hat{A}$, é a **hipotenusa**;
- os lados de medidas b e c, opostos, respectivamente, aos ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$, são os **catetos**.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Vamos traçar a altura $\overline{AD}$ relativa à hipotenusa. Note, nas figuras a seguir, com o triângulo ABC em duas posições diferentes.

Empregaremos as letras m, n e h para representar:

- m é a medida da projeção do cateto que mede b sobre a hipotenusa;
- n é a medida da projeção do cateto que mede c sobre a hipotenusa;
- h é a medida da altura relativa à hipotenusa.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Orientações didáticas

Participe

O boxe tem o objetivo de fazer com que os estudantes tirem suas conclusões a respeito da medida de projeções de segmentos de reta sobre uma reta conforme suas posições em relação a ela.

É interessante que a atividade seja realizada em grupo para que os estudantes compartilhem suas ideias, entretanto, se não for possível, proporcione um momento final de compartilhamento das respostas, em que os estudantes se sintam confortáveis para expor suas opiniões. Caso ache pertinente, retome alguns conceitos utilizados na tarefa para facilitar o seu desenvolvimento, como o conceito de reta, segmento de reta, posição relativa entre retas e quadriláteros notáveis.

Orientações didáticas

Semelhanças no triângulo retângulo

Para melhor compreensão deste tópico, é possível propor uma tarefa exploratória aos estudantes em que eles devem desenhar dois triângulos retângulos congruentes (os dois chamados de *ABC*, retângulos em *A*) e, em um deles, traçar a altura $\overline{DA}$ relativa ao lado $\overline{BC}$. Dessa forma, eles poderão recortar os três triângulos formados e pintar da mesma cor os ângulos que concluírem ser congruentes. Além disso, será possível, também colocar os três triângulos na mesma posição e sobrepô-los para verificar a congruência dos ângulos.

Retome os casos de semelhança aprendidos no capítulo anterior e finalize a tarefa exploratória perguntando aos estudantes qual é o caso que comprova a semelhança dos três triângulos, cuja resposta é o caso AA.

Participe

Para o desenvolvimento das atividades do boxe é possível utilizar os três triângulos recortados no desenvolvimento do tópico da página anterior, pois isso permite aos estudantes que coloquem os três triângulos na mesma posição e identifiquem as relações de proporção entre os lados.

Sugira aos estudantes que escrevam nos vértices de cada um dos três triângulos as letras maiúsculas correspondentes aos seus nomes e, nos lados, as letras minúsculas correspondentes às suas medidas. Dessa forma, nos itens **a**, **b** e **c**, eles já podem escrever as relações de proporção utilizando duas maneiras diferentes para referenciar as medidas, como *BC* e *a* para indicar a medida do segmento $\overline{BC}$, por exemplo.

Semelhanças no triângulo retângulo

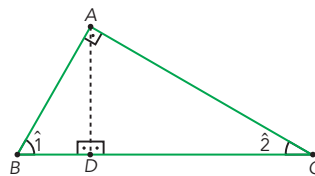
O triângulo *ABC* representado a seguir é retângulo em *A*.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Participe

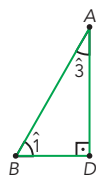
a) Os triângulos *ABC* e *DBA* são semelhantes pelo critério AA. Exemplo de resposta: $\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{AD}$.

b) Os triângulos *ABC* e *DAC* são semelhantes pelo critério AA. Exemplo de resposta: $\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC} = \frac{AB}{AD}$.

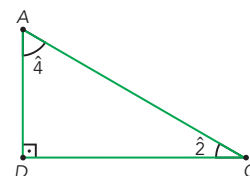
c) Os triângulos *DBA* e *DAC* são semelhantes pelo critério AA. Exemplo de resposta: $\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

No triângulo *ABC*, os ângulos $\hat{1}$ e $\hat{2}$ são complementares, ou seja, a soma de suas medidas é igual a 90°.

Destacando a altura $\overline{AD}$, relativa à hipotenusa do triângulo *ABC*, obtemos dois outros triângulos retângulos: $\triangle DBA$ e $\triangle DAC$.

O ângulo $\hat{3}$ do triângulo *DBA* é complemento do ângulo $\hat{1}$; então, é congruente ao ângulo $\hat{2}$, do triângulo *DAC*.

$\hat{3} \cong \hat{2}$

O ângulo $\hat{4}$ do triângulo *DAC* a seguir é complemento do ângulo $\hat{2}$; então, é congruente ao ângulo $\hat{1}$.

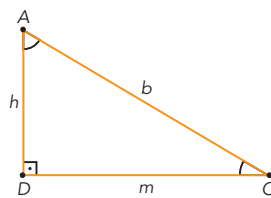
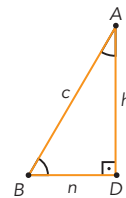
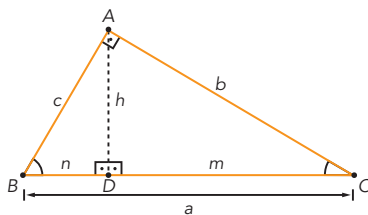
$\hat{4} \cong \hat{1}$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Os triângulos *ABC*, *DBA* e *DAC* têm os ângulos respectivamente congruentes, portanto, são semelhantes.

$$\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle DAC$$

Relações métricas no triângulo retângulo

Considere, a seguir, o triângulo *ABC*, retângulo em *A*, de altura $\overline{AD}$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

$$\triangle ABC \sim \triangle DBA \sim \triangle DAC$$

Participe — Faça as atividades no caderno.

Vamos explorar a semelhança dos triângulos *ABC*, *DBA* e *DAC* para obter algumas relações métricas entre as medidas dos lados dos triângulos.

a) Os triângulos *ABC* e *DBA* são semelhantes? Justifique e expresse a proporção entre as medidas dos lados.

b) Os triângulos *ABC* e *DAC* são semelhantes? Justifique e expresse a proporção entre as medidas dos lados.

c) Os triângulos *DBA* e *DAC* são semelhantes? Justifique e expresse a proporção entre as medidas dos lados.

Vamos explorar a semelhança dos triângulos *ABC*, *DBA* e *DAC* com as medidas indicadas nesses triângulos:

$$\triangle ABC \sim \triangle DBA \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{c}{n} \Rightarrow c^2 = a \cdot n \quad ①$$

$$\triangle ABC \sim \triangle DAC \Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{m} \Rightarrow b^2 = a \cdot m \quad ②$$

$$\triangle DBA \sim \triangle DAC \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{BD}{AD} \Rightarrow \frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow h^2 = m \cdot n \quad ③$$

①, ② e ③ são relações métricas no triângulo retângulo.

Em qualquer triângulo retângulo:

- cada cateto é média proporcional (ou média geométrica) entre sua projeção sobre a hipotenusa e a hipotenusa:

$$b^2 = a \cdot m \quad \text{e} \quad c^2 = a \cdot n$$

- a altura relativa à hipotenusa é média geométrica (ou média proporcional) entre os segmentos que determina na hipotenusa:

$$h^2 = m \cdot n$$

Para estudar as relações métricas dos triângulos retângulos neste capítulo, considere que, quando nos referirmos, por exemplo, às médias geométricas dos lados dos triângulos, estamos citando, na verdade, as médias geométricas das medidas desses lados.

Dessas três relações, decorrem outras. Vamos destacar duas:

- Multiplicando membro a membro as relações ① e ② e, em seguida, usando a ③, obtemos:

$$\left.\begin{matrix} b^2 = a \cdot m \\ c^2 = a \cdot n \end{matrix}\right\} \Rightarrow b^2 \cdot c^2 = a^2 \cdot \underbrace{m \cdot n}_{③} \Rightarrow b^2 \cdot c^2 = a^2 \cdot h^2 \Rightarrow b \cdot c = a \cdot h$$

Em qualquer triângulo retângulo, o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa a ela:

$$b \cdot c = a \cdot h$$

- Adicionando membro a membro as relações ① e ② e considerando que $m + n = a$, obtemos:

$$\left.\begin{matrix} b^2 = a \cdot m \\ c^2 = a \cdot n \end{matrix}\right\} \Rightarrow b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n \Rightarrow b^2 + c^2 = a \cdot \underbrace{(m + n)}_{a} \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

Em qualquer triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa:

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Essa última relação é conhecida como **teorema de Pitágoras**.

Há muitas maneiras de demonstrar a validade do teorema de Pitágoras. Algumas delas, históricas, são apresentadas no texto da seção *Na História* deste capítulo.

Pitágoras, filósofo e matemático, nasceu na ilha de Samos, na Grécia, por volta de 572 a.C. e faleceu em 497 a.C.

Orientações didáticas

Relações métricas no triângulo retângulo

As três primeiras relações métricas podem ser obtidas pelos próprios estudantes, caso peça que escrevam todas as relações de proporção que conseguirem entre os três triângulos que realizem a multiplicação cruzada. Fazendo isso, algumas relações aparecerão repetidas, mas é possível pedir para circularem apenas as diferentes encontradas.

Dessa forma será possível estabelecer, ainda, outra relação não mencionada na página, que é a seguinte: “Em qualquer triângulo retângulo, o produto de um dos catetos pela altura é igual ao produto do outro cateto pela projeção do primeiro cateto”. As fórmulas que descrevem essa relação são: $c \cdot h = b \cdot n$ e $b \cdot h = c \cdot m$, caso ache pertinente apresentar aos estudantes.

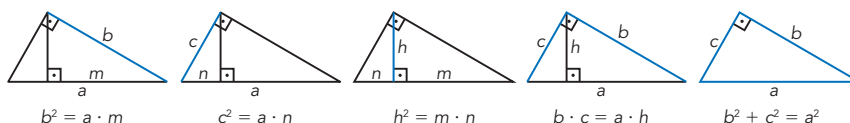
Exponha as relações do final do tópico na lousa e explique aos estudantes cada uma delas utilizando a figura.

Orientações didáticas

Atividades

Na atividade **1**, o estudante deve reproduzir as relações apresentadas tentando preencher corretamente as lacunas. Faça com eles o item **a**, permitindo que eles façam os itens **b** e **c** posteriormente.

Caso os estudantes tenham dificuldades nas atividades **2** e **3**, sugira que escrevam primeiramente o nome dos segmentos que apresentam medidas (catetos, hipotenusa, altura ou projeções) para identificarem mais facilmente quais relações podem ser utilizadas.

Podemos resumir as relações métricas em um triângulo retângulo da seguinte maneira:

$b^2 = a \cdot m$

$c^2 = a \cdot n$

$h^2 = m \cdot n$

$b \cdot c = a \cdot h$

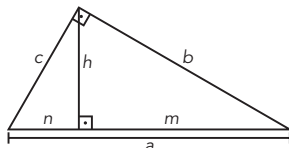
$b^2 + c^2 = a^2$

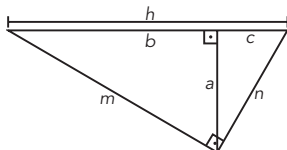
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. Para cada item, use as relações métricas no triângulo retângulo e complete as sentenças substituindo os ▒▒▒ pelas medidas corretas.

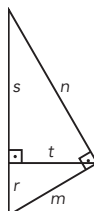
a)

- $b^2 = a \cdot$ ▒▒▒ m
- $c^2 =$ ▒▒▒ $\cdot\, n$ a
- $h^2 =$ ▒▒▒ $\cdot$ ▒▒▒ $m \cdot n$
- $b \cdot c =$ ▒▒▒ $\cdot$ ▒▒▒ $a \cdot h$
- $b^2 + c^2 =$ ▒▒▒ a^2

b)

- $c \cdot h =$ ▒▒▒ n^2
- $b \cdot h =$ ▒▒▒ m^2
- $b \cdot c =$ ▒▒▒ a^2
- $m^2 + n^2 =$ ▒▒▒ h^2
- $h \cdot a =$ ▒▒▒ $m \cdot n$
- $a^2 + c^2 =$ ▒▒▒ n^2
- $a^2 + b^2 =$ ▒▒▒ m^2

As imagens não estão representadas em proporção.

c)

- $r \cdot s =$ ▒▒▒ t^2
- $(r + s) \cdot s =$ ▒▒▒ n^2
- $m \cdot n =$ ▒▒▒ $(r + s) \cdot t$
- $(r + s) \cdot r =$ ▒▒▒ m^2
- $t^2 + r^2 =$ ▒▒▒ m^2
- $t^2 + s^2 =$ ▒▒▒ n^2
- $m^2 + n^2 =$ ▒▒▒ $(r + s)^2$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

2. Determine o valor de x em cada item.

a) 6

b) 3

c) 2

d) 8

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

3. Calcule o valor de x em cada item.

As imagens não estão representadas em proporção.

a) 5

c) 4

b) 12

d) 2

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

4. Uma escada de 2,5 m de comprimento está apoiada em uma parede, da qual o pé da escada está a uma distância de 1,5 m. Determine a medida da altura em que a escada atinge a parede. 2 m

5. Determine o valor de x em cada caso.

a) $2\sqrt{29}$

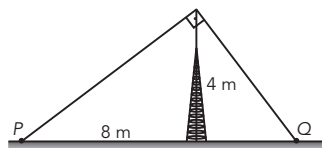
b) 9

c) $\frac{52}{5}$

d) 6

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

6. Um poste de 4 metros de altura corria risco de queda. Para eliminar o risco, os funcionários de uma empresa de eletricidade sustentaram o poste por dois cabos perpendiculares com extremidades fixas no solo, conforme a figura a seguir. O ponto P de fixação do cabo maior no solo está situado a 8 metros da base da torre. Qual é a medida de distância, em metros, do ponto Q de fixação do cabo menor à base da torre? 2 m

Banco de imagens/Arquivo da editora

7. A altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo mede 12 m e a hipotenusa mede 25 m. Calcule a medida dos catetos. 20 m e 15 m.

8. Calcule a medida da hipotenusa de um triângulo retângulo em que a altura relativa a ela mede 6 cm e nela determinam-se dois segmentos de reta cuja diferença das medidas é 5 cm. 13 cm

9. Releia o problema "Quebrando a cabeça", proposto no início deste capítulo. A figura mostra a situação-limite em que a região retangular cabe no círculo.

Então, Lara e Nícolas vão conseguir montar o quebra-cabeça, com dimensões medindo 54 cm por 72 cm, na mesa de diâmetro de medida 90 cm? Qual resultado você utilizou para resolver o problema? Sim. O teorema de Pitágoras.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Orientações didáticas

Atividades

As atividades **4** e **5** são aplicações do teorema de Pitágoras. Na atividade **4**, caso os estudantes tenham dificuldade de entendimento, sugira que façam um desenho que represente a situação e indiquem as medidas fornecidas. Em seguida, peça para identificarem o nome dos segmentos com medidas para escolher a melhor relação a ser utilizada. Na atividade **5**, será necessário aplicar o teorema de Pitágoras mais de uma vez em cada item. Peça que eles identifiquem, primeiramente, os triângulos retângulos presentes e as medidas de seus lados.

A atividade **9** retoma o problema do início do capítulo. Caso os estudantes ainda tenham dificuldades para resolver o problema, oriente-os a encontrar triângulos retângulos no desenho e identificar os lados para os quais foram fornecidos os dados. Se necessário, retome a definição de diâmetro para que identifiquem a relação entre o diâmetro do círculo e a hipotenusa do triângulo.

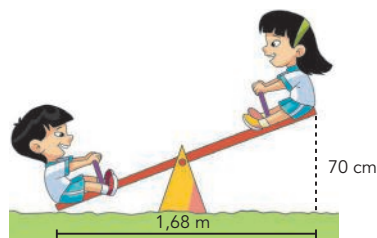
Orientações didáticas

Atividades

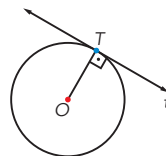
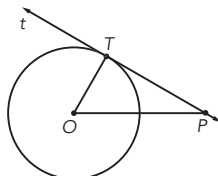
Na atividade **10** temos uma aplicação prática para um tipo de solução muito comum em atividades de Física, no Ensino Médio, por exemplo, em cálculos de braço de força.

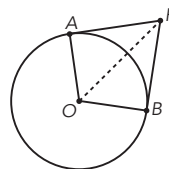
As atividades **11** e **13** são aplicações do teorema de Pitágoras em segmentos na circunferência. Caso os estudantes ainda tenham dificuldades de realizar os cálculos, estimule-os a desenhar os triângulos retângulos presentes nas imagens e a escrever as classificações dos segmentos que apresentam medidas para identificar melhor as relações métricas a serem utilizadas.

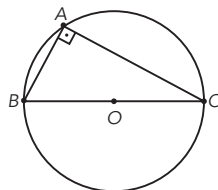
Na atividade **12** são necessários alguns raciocínios prévios de Geometria. Auxilie o estudante a perceber que, se o segmento de reta $\overline{AP}$ e $\overline{BP}$ são tangentes à circunferência, e os segmentos $\overline{AO}$ e $\overline{OB}$ coincidem com o raio da circunferência, logo, trata-se de dois triângulos retângulos. Daí basta calcular as medidas dos lados desses triângulos para encontrar o perímetro do quadrilátero.

10. Igor e Marina estão brincando em uma gangorra, como se nota na figura.

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Sabendo que a altura máxima que pode subir cada criança mede 70 cm, calcule a medida do comprimento da gangorra. 1,82 m ou 182 cm.

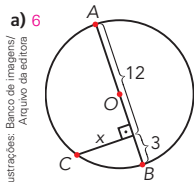
11. Recordemos: Se uma reta t é tangente a uma circunferência de centro O, e T é o ponto de tangência, então t é perpendicular ao raio $\overline{OT}$.

Agora, considere a figura e calcule PT, sabendo que $OT = 2$ cm e $OP = 4$ cm. $2\sqrt{3}$ cm

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

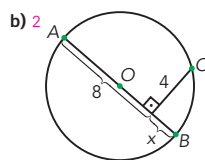
12. Sabendo que $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ são tangentes à circunferência de centro O e raio medindo 6 cm, calcule a medida de perímetro do quadrilátero $OAPB$ cuja diagonal $\overline{OP}$ mede 10 cm. 28 cm

Banco de imagens/Arquivo da editora

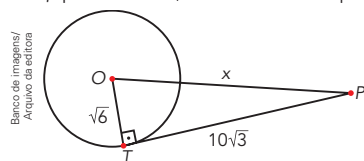
13. Quando tomamos uma circunferência de centro O e marcamos um diâmetro $\overline{BC}$ e duas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, o triângulo ABC é retângulo em A.

Banco de imagens/Arquivo da editora

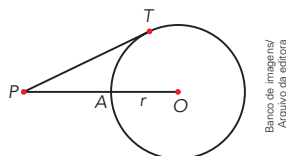
Assim, determine o valor de x em cada caso, sendo O o centro de cada circunferência.

14. Exemplo de resposta: Uma formiga está na borda de um prato cujo raio mede $\sqrt{6}$ cm e observa na direção tangente à borda do prato uma aranha à distância que mede $10\sqrt{3}$ dela. Qual é a medida de distância da aranha ao centro do prato? Resposta: $3\sqrt{34}$.

Faça as atividades no caderno.

a) 6

b) 2

As imagens não estão representadas em proporção.

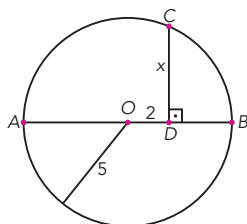
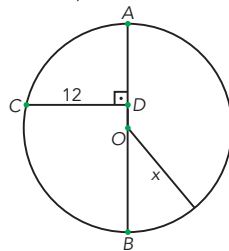
14. De um ponto P externo a uma circunferência de centro O e de $\sqrt{6}$ cm de medida de raio, traçamos o segmento de reta $\overline{PT}$ tangente a ela, que mede $10\sqrt{3}$ cm. Elabore um problema a partir da situação descrita.

15. Uma corda $\overline{AB}$ de um círculo mede 6 cm e a distância dessa corda ao centro do círculo mede 3 cm. Quanto mede o raio do círculo em centímetros? $3\sqrt{2}$ cm

16. Na figura a seguir, $\overline{PT}$ é tangente à circunferência de centro O e raio medindo r, e PA é a medida de distância de P à circunferência. Dado r e sabendo que $PT = 2r$, determine PA. $(\sqrt{5} - 1)r$

17. Um ponto P dista 2 cm de uma circunferência de raio medindo r. A tangente $\overline{PT}$ à circunferência traçada desse ponto é congruente ao raio dela. Calcule a medida do raio. $2(\sqrt{2} + 1)$ cm

18. Seja P um ponto externo a uma circunferência. A menor distância desse ponto à circunferência mede 6 dm e a maior, 24 dm. Faça um desenho no caderno e elabore um problema sobre a situação descrita.

O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

19. Determine o valor de x em cada circunferência de centro O.

a) $\overline{AB}$ é diâmetro, $\overline{CD} \perp \overline{AB}$; $\sqrt{21}$

b) $\overline{AB}$ é diâmetro, $BD = 15$ e $\overline{CD} \perp \overline{AB}$. 12,30

20. Elabore um problema que seja resolvido com a aplicação do teorema de Pitágoras, como segue.

$b^2 = 24^2 \Rightarrow b^2 = 576$

$c^2 = 10^2 \Rightarrow c^2 = 100$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 576 + 100 \Rightarrow a^2 = 676 \Rightarrow a^2 = 26^2 \Rightarrow a = 26$

Resposta: 26 O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Orientações didáticas

Atividades

Na atividade **14**, a proposta de desenvolvimento de um problema por parte do estudante pode favorecer o trabalho com a **CG2** e a **CG4.**

As atividades **15**, **17** e **18** são parecidas com as anteriores, entretanto exigem um nível de abstração maior por não apresentarem figuras que ilustrem os enunciados. Caso os estudantes tenham dificuldades, oriente-os a fazer desenhos das situações e a indicar as medidas fornecidas, a fim de que identifiquem os triângulos retângulos e as relações métricas que podem ser utilizadas na resolução.

Na atividade **19**, temos um significativo aumento de complexidade do problema. Resolva com os estudantes o item **a**, desenvolvendo com eles as estratégias necessárias. Permita que resolvam o item **b** por conta própria, auxiliando-os em suas dificuldades.

A atividade **20** trabalha as mesmas competências favorecidas na atividade de **14.**

Orientações didáticas

Aplicações notáveis do teorema de Pitágoras

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA14**, por meio da elaboração e resolução de problemas envolvendo a aplicação do teorema de Pitágoras, além da **CG02** e da **CEMAT02**.

Para um melhor entendimento das duas aplicações do teorema de Pitágoras propostos na página, peça aos estudantes para calcularem a medida da diagonal de um quadrado, dada as medidas de seus lados, e para calcularem a medida da altura de um triângulo equilátero, dada a medida de seus lados. Dessa forma, os próprios estudantes vão desenvolver o raciocínio utilizando o teorema de Pitágoras; depois disso, será feita a generalização para uma medida ℓ qualquer dos lados do quadrado e do triângulo equilátero.

Após encontrarem as fórmulas que são aplicações notáveis do teorema de Pitágoras, sugira que os mesmos cálculos propostos no início sejam feitos com a aplicação direta das fórmulas, a fim de que os estudantes compreendam que há uma economia de tempo quando há uma generalização.

Aplicações notáveis do teorema de Pitágoras

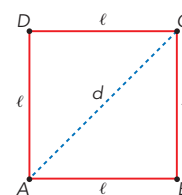
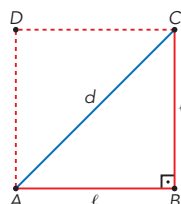
O teorema de Pitágoras permite obter expressões que nos ajudam a efetuar alguns cálculos de modo mais rápido. Note como calcular a medida da diagonal de um quadrado e a medida da altura de um triângulo equilátero.

Diagonal do quadrado

Na figura, *ABCD* é um quadrado cujo lado mede ℓ.

Vamos calcular a medida *d* da diagonal do quadrado em função da medida ℓ.

O problema pode ser formulado também da seguinte maneira: dada a medida do lado de um quadrado, calcule a medida *d* da diagonal.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *ABC*, temos: $d^2 = \ell^2 + \ell^2 \Rightarrow d^2 = 2\ell^2$

Daí:

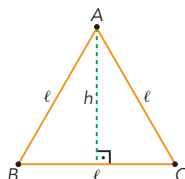
$$d = \ell\sqrt{2} \qquad \left(\sqrt{2} \simeq 1{,}41\right)$$

Por exemplo, vamos calcular a medida da diagonal de um quadrado de 6 cm de medida de lado:

$$d = \ell\sqrt{2} \Rightarrow d = 6\sqrt{2}$$

Essa diagonal mede $6\sqrt{2}$ cm (aproximadamente 8,46 cm).

Altura do triângulo equilátero

Na figura, *ABC* é um triângulo equilátero de lado medindo ℓ.

Vamos calcular a medida *h* da altura do triângulo em função da medida ℓ.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *AMC*, temos:

$$h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2 \Rightarrow h^2 = \ell^2 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4} \Rightarrow h^2 = \frac{3\ell^2}{4}$$

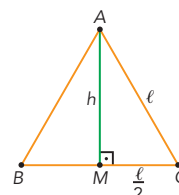
Daí:

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \qquad \left(\sqrt{3} \simeq 1{,}73\right)$$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Vamos calcular, por exemplo, a medida da altura de um triângulo equilátero de 6 cm de medida de lado.

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = \frac{6\sqrt{3}}{2} \Rightarrow h = 3\sqrt{3}$$

A altura do triângulo mede $3\sqrt{3}$ cm (aproximadamente 5,19 cm).

Proposta para o estudante

Para encontrar as fórmulas da diagonal do quadrado e da altura do triângulo equilátero, se achar pertinente, proponha uma atividade exploratória com os estudantes, de modo que eles próprios efetuem o passo a passo dos cálculos, como uma maneira de desenvolver a **CG02** e a **CEMAT02**. Nesse caso, relembre algumas operações com monômios, caso tenham dificuldades de efetuar os cálculos com as variáveis.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

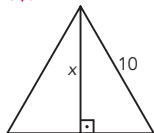
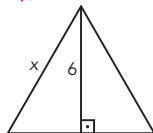
21. A diagonal de um quadrado mede $5\sqrt{2}$ cm. Determine a medida de perímetro desse quadrado. 20 cm

22. O perímetro de um retângulo mede 34 cm. Um dos lados mede 5 cm. Determine a medida da diagonal. 13 cm

23. Considerando que, em cada item há um triângulo equilátero, determine o valor de x.

a) $5\sqrt{3}$

b) $4\sqrt{3}$

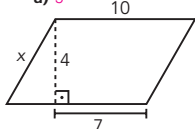
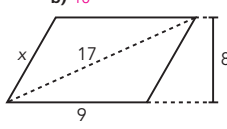
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

24. O perímetro de um triângulo equilátero mede 24 cm. Calcule a medida da altura desse triângulo. $4\sqrt{3}$ cm

25. Em um triângulo isósceles de altura medindo 8, inscreve-se uma circunferência de raio medindo 3. Calcule a medida da base do triângulo. 12

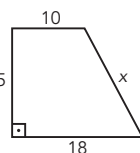
26. Determine o valor de x nos paralelogramos a seguir.

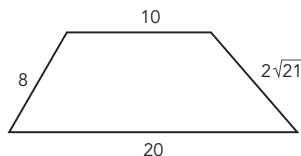
a) 5

b) 10

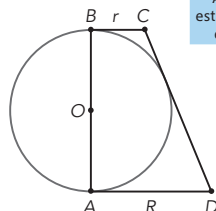
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

27. As diagonais de um losango medem 90 cm e 120 cm. Determine as medidas do lado e da distância entre dois lados paralelos. 75 cm e 72 cm

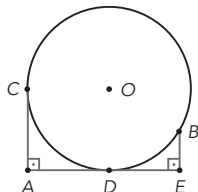
28. Um trapézio retângulo de 15 cm de medida da altura tem as bases medindo 10 cm e 18 cm. Determine a medida do lado oblíquo às bases. 17 cm

Banco de imagens/Arquivo da editora

29. Determine a medida da altura do trapézio a seguir. $4\sqrt{3}$

Banco de imagens/Arquivo da editora

30. Na figura a seguir, dada a circunferência de centro O, calcule a medida da altura do trapézio retângulo $ABCD$. $2\sqrt{Rr}$

As imagens não estão representadas em proporção.

Banco de imagens/Arquivo da editora

31. Na figura a seguir, determine a medida do raio da circunferência de centro O, sabendo que $\overline{AC}$ e $\overline{AD}$ tangenciam a circunferência nos pontos C e D, respectivamente, e que $BE = 12$ cm e $AE = 54$ cm. 30 cm

Banco de imagens/Arquivo da editora

32. Calcule a medida do raio da circunferência inscrita num triângulo retângulo de catetos que medem 6 m e 8 m. 2 m

Na olimpíada

Formiga esperta

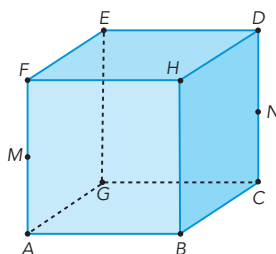
(Obmep) Uma formiga esperta, que passeia sobre a superfície do cubo [a seguir], faz sempre o menor caminho possível entre dois pontos. O cubo tem arestas de tamanho 1 cm, [e M e N são pontos médios das arestas $\overline{AF}$ e $\overline{CD}$, respectivamente].

Qual distância a formiga esperta percorrerá se ela for:

a) Do vértice A ao vértice B? 1 cm

b) Do vértice M ao vértice N? 2 cm

c) Do vértice A ao vértice D? $\sqrt{5}$ cm

Banco de imagens/Arquivo da editora

Orientações didáticas

Atividades

As atividades **21** e **22** são aplicações do teorema de Pitágoras em quadrados e retângulos. Nos casos que envolvem quadrados, lembre os estudantes que eles podem realizar uma aplicação da fórmula encontrada anteriormente.

Aplicações do teorema de Pitágoras em diferentes triângulos podem ser realizadas nas atividades **23** a **25**. Se achar pertinente, relembre as propriedades de triângulos equiláteros, isósceles e escalenos no desenvolvimento das atividades.

Destacamos a atividade **32** em que será necessário relembrar o conceito de incentro e circunferência inscrita a um triângulo.

Para realizar as atividades **26** a **30**, se achar pertinente, relembre as definições e propriedades de quadriláteros notáveis, bem como as diferenças entre os tipos de trapézio (retângulo, isósceles e escaleno). Em todos os casos, oriente-os a encontrar triângulos retângulos para que o teorema de Pitágoras possa ser aplicado.

Orientações didáticas

Na História

Na BNCC

Este seção mobiliza com maior ênfase a **CG01** e a **CEMAT01**, uma vez que apresenta a matemática como uma construção humana e histórica.

Esta seção consiste em uma rica viagem pela história do teorema de Pitágoras, desde a sua primeira aparição, sua nomeação, até as suas demonstrações mais recentes. É interessante que esse texto seja trabalhado com os estudantes a fim de que ampliem seus conhecimentos acerca do processo de construção dos conceitos matemáticos.

Teorema de Pitágoras

Em uma plaqueta de argila babilônica – provavelmente do período entre 1900 a.C. e 1600 a.C. – encontrada em Susa, no Irã atual, pode estar registrado o mais antigo exemplo conhecido do uso do **teorema de Pitágoras**. Como isso pode ser explicado se Pitágoras viveu cerca de um milênio depois dessa época?

Pitágoras. Ilustração da enciclopédia *Os ensinamentos secretos de todos os tempos*, edição inglesa de 1928. Museu Condé, França.

Reprodução/Museu Condé, Chantilly, França.

De fato, Pitágoras nasceu por volta de 572 a.C., na ilha de Samos, no mar Egeu, uma rica cidade-estado grega governada por uma classe mercantil. Aos 18 anos, Pitágoras se mudou para a ilha de Lesbos, onde estudou Filosofia por dois anos.

Depois, possivelmente visitou Tales, já idoso, em Mileto, para usufruir seu saber. A seguir, talvez orientado por Tales, foi para o Egito, onde permaneceu vários anos. Segundo um relato, quando o Egito foi conquistado pelos persas, em 525 a.C., Pitágoras – movido pelo desejo de aprender – teria, voluntariamente, se oferecido para seguir com os egípcios que foram escravizados e levados para a Babilônia. Não é certo, porém, que nesse ano ele ainda estivesse no Egito. Mas, ainda que por outras vias, é provável que Pitágoras estivesse na Babilônia, complementando sua formação científica.

Pouco tempo depois, de volta a Samos, encontrou uma situação política desfavorável a seus projetos intelectuais. Por isso, emigrou para a colônia grega de Crotona, no sul da Itália, onde fundou uma escola (*escola pitagórica*), que teria grande influência no desenvolvimento da Filosofia e da Ciência, em especial da Matemática. Uma das características da escola era a tradição oral: os ensinamentos eram passados apenas oralmente. Além disso, as realizações da escola costumavam ser atribuídas ao fundador.

Por volta do ano 500 a.C., em seu auge, a escola foi fechada, sob a acusação de ser contrária ao governo. Pitágoras refugiou-se na cidade de Metaponto, outra colônia grega no sul da Itália, onde ficou até sua morte, em 497 a.C. A escola, porém, sobreviveu por cerca de dois séculos, com seus membros dispersos pelo mundo grego.

Para a escola pitagórica, o saber por excelência era o saber matemático. Seus membros acreditavam que "o conhecimento é a maior das purificações". Assim, não é de estranhar que nessa escola tenha começado o cultivo da Matemática pela própria Matemática, ou seja, seu estudo sem visar a aplicações práticas. Além disso, os pitagóricos iniciaram a organização da Matemática – em particular da Geometria – por meio de teoremas e suas justificativas. A julgar por alguns relatos históricos, deve-se a Pitágoras (ou talvez a algum membro de sua escola) a primeira demonstração do teorema de Pitágoras (daí o nome).

A suposta demonstração de Pitágoras para esse teorema é desconhecida, mas acredita-se que tenha sido feita por comparação de áreas, como a que apresentamos a seguir, mostrada nas figuras 1 e 2.

Figura **1**

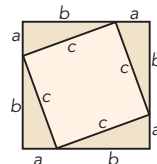
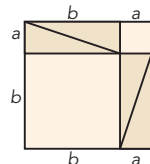



Figura **2**

Banco de imagens/Arquivo da editora

Do quadrado maior (de lado medindo $a + b$) da figura 1, retiramos os quatro triângulos retângulos congruentes de catetos medindo a e b. O que resta é um quadrado de lado medindo c. Do quadrado da figura 2, retiramos, também, os quatro triângulos retângulos de catetos medindo a e b. Restam dois quadrados de áreas medindo a^2 e b^2. Como as figuras resultantes das retiradas dos triângulos têm a mesma medida de área, então:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Centenas de demonstrações diferentes desse importante teorema já foram feitas depois de Pitágoras. O livro *The Pythagorean Proposition* [*O teorema de Pitágoras*], de E. S. Loomis (1852-1940), em edição

Proposta para o estudante

Sugerimos a leitura do livro de Roque (2012) no capítulo "Lendas sobre o início da matemática na Grécia" para aprofundar conhecimentos sobre os pitagóricos, as triplas pitagóricas e o teorema de Pitágoras.

ROQUE, T. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2012.

de 1940, traz cerca de 360 dessas demonstrações. Certamente, nenhuma delas usa menos palavras do que a do matemático hindu Bhaskara (século XII), que se limitou a desenhar a figura 3, apresentada a seguir, e a escrever junto a ela: “Veja!”. Um pouco de álgebra explica o que Bhaskara via tão facilmente.

Tomam-se quatro triângulos retângulos com hipotenusa medindo c e catetos medindo a e b, como na figura 3. A medida de área do quadrado maior, c^2, é igual à soma da medida de área do quadrado menor, $(b - a)^2$, com as medidas de área dos quatro triângulos retângulos, cada um com medida de área $\left(\frac{ab}{2}\right)$. Ou seja:

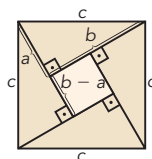



Figura **3**

Banco de imagens/ Arquivo da editora

$$c^2 = (b - a)^2 + 4 \cdot \left(\frac{ab}{2}\right) = b^2 + a^2$$

Outra interessante demonstração é creditada a um ex-presidente estadunidense, James A. Garfield (1831--1881), que, desde seus tempos de estudante, gostava de Matemática. Uma curiosidade: James A. Garfield morreu assassinado três meses depois de tomar posse. Garfield teve a ideia dessa demonstração quando ainda era membro do Congresso dos Estados Unidos, em uma conversa sobre Matemática com alguns colegas. A demonstração será feita na atividade **6** desta seção.

Assim, cabe a pergunta: É possível descobrir outras demonstrações do teorema de Pitágoras, diferentes das do livro de E. S. Loomis? Pode parecer surpreendente, mas o próprio autor afirma que sim. Certamente, muitas já foram descobertas de 1940 para cá.

Fontes dos dados: EVES, Howard. *Geometria*. Trad. de Hygino H. Domingues.São Paulo: Atual, 1992; BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. Q. *A Matemática através dos tempos*. Trad. de Elza F. Gomide e H. Castro. São Paulo: Blucher, 2010; MAOR, Eli. *The Pythagorean Theorem, a 4.000- Year History*. Nova Jersey: Princeton University Press, 2007; STILLWELL, John. *Mathematics and its History*. Nova York: Springer, 2000.

As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

1. Sabe-se que, se a, b e c são três números reais positivos, tais que $a^2 + b^2 = c^2$, então, um triângulo cujos lados medem a, b e c é retângulo, sendo c a medida da hipotenusa. Trata-se do **recíproco** do teorema de Pitágoras, o qual é verdadeiro. Com essa informação, verifique se são retângulos os triângulos de lados medindo:

a) 32, 65, 97.
b) 90, 56, 106.
c) 10, 13, 19.
d) 7, 24, 25.

2. Na plaqueta de argila referida no início do texto apresentado, é calculada a medida do raio de um círculo circunscrito a um triângulo isósceles de lados medindo 50, 50 e 60. O valor $31\frac{15}{60}$, encontrado pelo escriba para a medida do raio, é correto? Por quê?

3. Sabe-se que os arquitetos do Egito antigo usavam um triângulo cujos lados mediam 3, 4 e 5 unidades para levantar a vertical num ponto. De fato, nesse caso, o ângulo formado pelos lados que medem 3 unidades e 4 unidades é reto. Esse fato, por si só, é garantia de que eles conheciam o teorema de Pitágoras? Por quê?

4. Se as medidas dos catetos de um triângulo retângulo são números pares, a medida da hipotenusa pode ser um número ímpar? Por quê?

5. Vamos reproduzir a demonstração creditada ao ex-presidente estadunidense, James A. Garfield. Essa demonstração baseia-se no fato de que a medida de área de determinado trapézio é igual à soma das medidas de área de três triângulos, apresentados na figura 4.

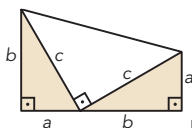



Figura **4**

Banco de imagens/ Arquivo da editora

a) Justifique matematicamente o fato de o triângulo não sombreado da figura 4 ser retângulo.

b) Considerando as medidas indicadas na figura 4, calcule a medida de área do trapézio.

c) Considerando as medidas indicadas na figura 4, calcule a soma das medidas de área dos três triângulos.

d) Considerando que a medida de área do trapézio é igual à soma das medidas de área dos três triângulos, manipule algebricamente essa igualdade para obter o teorema de Pitágoras para o triângulo retângulo com hipotenusa medindo c e catetos medindo a e b.

Orientações didáticas

Na História

As atividades que seguem o texto são oportunidades de aprofundamento do entendimento do teorema de Pitágoras. Na atividade **1**, por exemplo, é explorada a recíproca do teorema. Nesse momento, podem ser abordados, também, outros trios de números conhecidos que consistem em lados de triângulos retângulos, tais como 3, 4 e 5; 5, 12 e 13 e seus múltiplos. Essa discussão pode se relacionar com a proposta da atividade **4** desta seção.

Proposta para o estudante

Indicamos a atividade proposta por Ferreira (*s. n.*) na qual é apresentada um *applet* do GeoGebra que apresenta uma construção que mostra uma demonstração do teorema de Pitágoras realizada pelo matemático Henry Perigal (1801-1898) por meio de equivalências de áreas.

FERREIRA, M. Teorema de Pitágoras segundo Henry Perigal. *GeoGebra*. [*s. l.*]. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/xaktaxex. Acesso em: 29 jun. 2022.

Orientações didáticas

Na Unidade

Na BNCC

Esta seção favorece o desenvolvimento das habilidades exploradas ao longo de toda a Unidade e mobiliza com maior ênfase a **CEMAT02**, a **CEMAT06** e a **CG02** ao propor a resolução de atividades diversas por meio de diferentes contextos e estratégias de resolução.

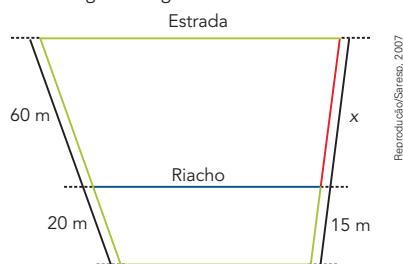
Esta seção traz atividades dos principais conteúdos abordados na Unidade que podem ser utilizadas como ferramentas de avaliação. Proponha a resolução das atividades individualmente. Acompanhe os estudantes durante a realização delas e registre avanços e dificuldades para, ao final, propor novas atividades para remediação coletiva ou individual de defasagens, conforme cada caso.

A seguir, listamos algumas sugestões e estratégias para remediação.

Para verificar se os estudantes têm condições de resolver problemas que envolvem tanto o teorema de Tales quanto os diferentes casos de semelhança de triângulos, faça uma avaliação processual utilizando as atividades **1** a **8**. Em caso de dúvidas, retome com a turma os tópicos que exploram esses conceitos.

Na Unidade

As imagens não estão representadas em proporção.

1. (Saresp) Valdemar tem um terreno na forma de um trapézio. Um riacho paralelo à estrada em que se situa divide o terreno em duas partes, como mostra a figura a seguir.

Reprodução/Saresp, 2007

Alternativa **d**.

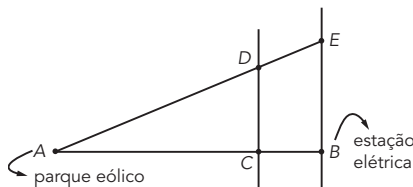
Ele já cercou quase todo o limite externo do terreno e só falta o trecho x, cuja medida em metros é:

a) 15 **b)** 20 **c)** 36 **d)** 45

2. (Etec-SP) Os parques eólicos marítimos apresentam vantagens em relação aos parques eólicos terrestres, pois nesses não há impacto sonoro e o desgaste das turbinas é menor, devido a menor turbulência do vento.

Na instalação dos parques eólicos marítimos, é preciso calcular sua distância até o continente, a fim de instalar os cabos condutores de eletricidade.

Reprodução/Etec-SP, 2016.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Observe o esquema que representa um parque eólico (A), uma estação elétrica (B) no continente e pontos auxiliares C, D e E para o cálculo da distância do parque eólico até a estação elétrica no continente.

No esquema temos:

- ponto A: parque eólico marítimo;
- ponto B: estação elétrica no continente;
- ponto C: ponto auxiliar $(C \in \overline{AB})$;
- ponto D: ponto auxiliar $(D \in \overline{AE})$;
- ponto E: ponto auxiliar;
- a medida do segmento $\overline{CD}$ é 150 metros;
- a medida do segmento $\overline{BC}$ é 100 metros;
- a medida do segmento $\overline{BE}$ é 200 metros;
- os segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{BE}$ são paralelos entre si.

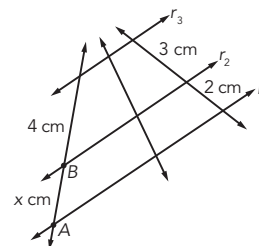
Assim sendo, é correto afirmar que a distância do parque eólico marítimo até a estação elétrica no continente é, em metros: Alternativa **d**.

a) 75 **b)** 100 **c)** 300 **d)** 400 **e)** 425

3. (Enem) Para uma atividade realizada no laboratório de Matemática, um estudante precisa construir uma maquete da quadra de esportes da escola, que tem 28 m de comprimento por 12 m de largura. A maquete deverá ser construída na escala de 1 : 250.

Que medidas de comprimento e largura, em cm, o estudante utilizará na construção da maquete? Alternativa **c**.

a) 4,8 e 11,2
b) 7,0 e 3,0
c) 11,2 e 4,8
d) 28,0 e 12,0
e) 30,0 e 70,0

4. A figura a seguir é a representação de seis ruas de uma cidade. As ruas r_1, r_2 e r_3 são paralelas entre si.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Paulo encontra-se na posição *A* da rua r_1 e quer ir para a rua r_2 até a posição *B*. Se a escala de representação for de 1 : 50 000, a medida de distância, em metros, que Paulo vai percorrer será de, aproximadamente: Alternativa **a**.

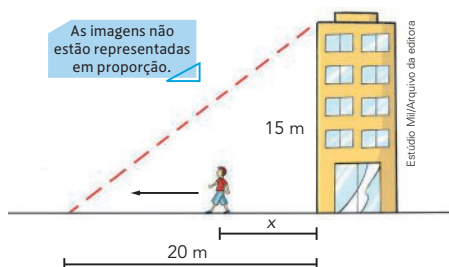
a) 1 333 **b)** 750 **c)** 945 **d)** 3 000

5. Num triângulo *ABC*, $AB = 15$ m e $AC = 20$ m. Sabendo-se que $AM = 6$ m (sobre o lado $\overline{AB}$), a medida do segmento de reta $\overline{AN}$ sobre o lado $\overline{AC}$, de modo que o segmento de reta $\overline{MN}$ seja paralelo ao lado $\overline{BC}$, é: Alternativa **d**.

a) 2 **b)** 3 **c)** 5 **d)** 8

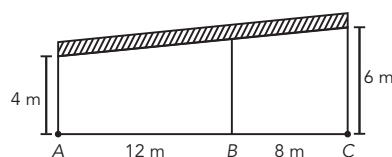
6. Os lados de um triângulo medem 7 cm, 9 cm e 14 cm. Qual é a medida de perímetro do triângulo semelhante ao informado, cujo lado maior mede 21 cm? Alternativa **a**.

a) 45 cm **b)** 55 cm **c)** 60 cm **d)** 75 cm

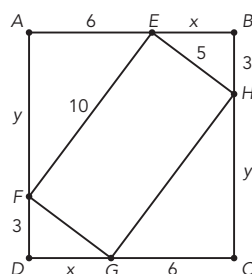
7. **(ESPM-SP)** Um prédio de 15 m de altura projeta uma sombra de 20 m de comprimento sobre um piso horizontal plano, como mostra a figura a seguir. A máxima distância que uma pessoa de 1,80 m de altura pode se afastar do prédio para que continue totalmente à sua sombra é: Alternativa **a**.

a) 17,60 m **c)** 17,40 m **e)** 18,00 m
b) 18,20 m **d)** 17,80 m

8. **(Enem)** A rampa de um hospital tem na sua parte mais elevada uma altura de 2,2 metros. Um paciente ao caminhar sobre a rampa percebe que se deslocou 3,2 metros e alcançou uma altura de 0,8 metro. A distância em metros que o paciente ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa é: Alternativa **d**.

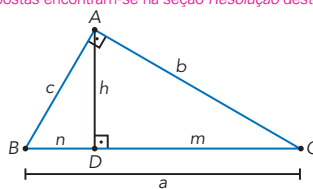
a) 1,16 metro. **d)** 5,6 metros.
b) 3,0 metros. **e)** 7,04 metros.
c) 5,4 metros.

9. **(UFPR)** Um telhado inclinado reto foi construído sobre três suportes verticais de aço, colocados nos pontos *A*, *B* e *C*, como mostra a figura a seguir. Os suportes nas extremidades *A* e *C* medem, respectivamente, 4 metros e 6 metros de altura.

A altura do suporte em *B* é, então, de: Alternativa **d**.

a) 4,2 metros. **d)** 5,2 metros.
b) 4,5 metros. **e)** 5,5 metros.
c) 5 metros.

10. **(Embraer-SP)** A figura, com dimensões indicadas em centímetros, mostra o retângulo *EFGH* sobreposto ao retângulo *ABCD*.

Nessas condições, é correto afirmar que o perímetro do retângulo *ABCD* é, em centímetros, igual a: Alternativa **a**.

a) 42 **b)** 44 **c)** 46 **d)** 50

11. Considerando o triângulo retângulo *ABC* e utilizando semelhança de triângulos, demonstre as seguintes relações métricas do triângulo *ABC*:
As respostas encontram-se na seção *Resolução* deste Manual.

a) $c^2 = a \cdot n$ **c)** $b^2 + c^2 = a^2$
b) $b^2 = a \cdot m$ **d)** $b \cdot c = a \cdot h$

Orientações didáticas

Na Unidade

Para resolver problemas utilizando as relações métricas de um triângulo retângulo, foram destacadas as atividades **9** e **10**. Para aqueles que apresentarem dificuldade, como remediação, proponha que resolvam, junto com um colega, atividades específicas de cada conceito.

Para verificar se os estudantes conseguem demonstrar as relações métricas do triângulo retângulo, indicamos a atividade **11**. Caso haja dificuldade, como remediação, proponha uma releitura do enunciado feita em pequenos grupos.

Outras dificuldades diferentes das listadas podem surgir; por isso, é importante o monitoramento individual e contínuo dos estudantes.

Orientações didáticas

Abertura

Na BNCC

A abertura da Unidade permite mobilizar com maior ênfase a **CG09**, ao explorar a necessidade da resolução de conflitos e o respeito ao outro para a prevenção da violência doméstica, mais precisamente contra crianças e adolescentes, assim como a **CEMAT05**, ao apresentar a matemática como uma ferramenta para solucionar problemas cotidianos de cunho social. Favorece ainda o desenvolvimento dos TCTs *Direito da Criança e do Adolescente* e *Vida Familiar e Social*, uma vez que permite discutir o direito da criança e do adolescente de viver em um ambiente de paz familiar, além da responsabilidade social de cada cidadão em denunciar atos de violência.

Ao explorar a abertura da Unidade, oriente os estudantes a ler o texto com atenção, além de analisar os dados apresentados no gráfico. Pergunte que opinião eles têm acerca do assunto, tomando o devido cuidado, caso exista alguém que tenha vivenciado algum caso de violência em sua própria família. Permita que eles respondam usando as próprias palavras e dê espaço para que eles debatam, caso haja diferentes pontos de vista. Traga para o debate alguns dados relevantes, como o fato de a maioria das vítimas serem meninas, a maioria dos agressores serem as mães e a maioria das vítimas serem crianças de 4 a 7 anos.

Reprodução do Livro do Estudante em tamanho reduzido.

Violência contra crianças e adolescentes: denuncie!

De acordo com o balanço anual de 2018 das denúncias de violações contra crianças e adolescentes no canal *Disque 100*, durante o ano foram realizados 76 216 registros e 152 178 tipos de violação. Em uma única denúncia pode haver 2 ou mais violações, que foram classificadas segundo o gráfico a seguir.

Além disso, a maioria das vítimas eram meninas, representando 48,16% do total de denúncias. Quanto aos agressores, a maioria eram as mães, representando 37,64%, seguidas dos pais, com 18,4% do total de denúncias. A faixa etária mais afetada foram crianças de 4 a 7 anos, com 21,48% das denúncias.

Em maio de 2021, foram divulgados os dados do *Disque 100* referentes ao período de 1º de janeiro a 12 de maio desse mesmo ano. Foram cerca de 35 mil denúncias de violência contra crianças e adolescentes, sendo 17,5% referentes à violência sexual.

A Ouvidoria Nacional de Direitos Humanos (ONDH) possui diversos canais para registro de denúncias que podem ser feitos de maneira identificada ou anônima. Cada denúncia recebe um número de protocolo para acompanhamento dos andamentos. Os principais canais são:

Tipos de violação registradas em 2018 pelo *Disque 100*

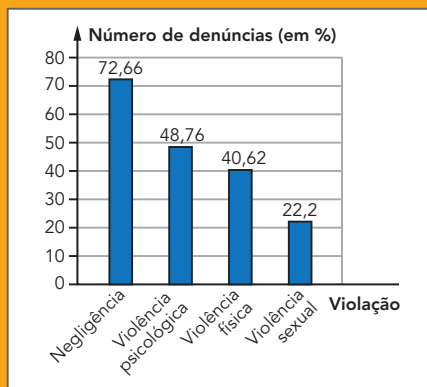
Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Mulher, da Família e dos Direitos Humanos. *Crianças e adolescentes*: Balanço do Disque 100 aponta mais de 76 mil vítimas. Brasília, DF: gov.br, 17 jun. 2019. Disponível em: https://www.gov.br/mdh/pt-br/assuntos/noticias/2019/junho/criancas-e-adolescentes-balanco-do-disque-100-aponta-mais-de-76-mil-vitimas. Acesso em: 30 abr. 2022.

- *Disque 100* – para ter acesso a informações sobre direitos de grupos vulneráveis e denúncias de violações;
- aplicativo "Direitos Humanos Brasil" – disponível em alguns sistemas operacionais, no qual é possível fazer denúncias por videochamada ou *chat*, além de oferecer uma área para atendimentos na Língua Brasileira de Sinais (LIBRAS);
- *WhatsApp* – basta enviar uma mensagem para o número (61) 99656-5008;
- Telegram – basta digitar "Direitoshumanosnobrasil" na busca do aplicativo que será enviada uma mensagem automática seguida de um atendimento especializado.

Fontes dos dados: BRASIL. Ministério da Mulher, da Família e dos Direitos Humanos. *Disque 100 tem mais de 6 mil denúncias de violência sexual contra crianças e adolescentes em 2021*. Brasília, DF: gov.br, 17 maio 2021. Disponível em: https://www.gov.br/mdh/pt-br/assuntos/noticias/2021/maio/disque-100-tem-mais-de-6-mil-denuncias-de-violencia-sexual-contra-criancas-e-adolescentes-em-2021.
BRASIL. Ministério da Mulher, da Família e dos Direitos Humanos. *Ouvidoria Nacional de Direitos Humanos*. Brasília, DF: gov.br, 29 mar. 2022. Disponível em: https://www.gov.br/mdh/pt-br/canais_atendimento/ouvidoria-do-mmfdh. Acesso em: 10 abr. 2022.

Na sua opinião, além de denúncias, que outras ações podem ser tomadas pelo governo ou sociedade para combater a violência doméstica contra crianças e adolescentes? Com auxílio do professor, organize um debate em grupos com a turma de modo que cada grupo defenda uma das propostas.

Exemplos de resposta:
- Ações que podem ser tomadas pelo governo: desenvolvimento de campanhas nacionais, capacitação de profissionais.
- Ações que podem ser tomadas pela sociedade: apoio psicológico nas escolas.

Orientações didáticas

Abertura

Promova um debate, perguntando aos estudantes: "Com relação ao período da pandemia de covid-19, vocês acham que as denúncias aumentaram ou diminuíram?" Por quê?". Algumas opiniões podem surgir, como: "as denúncias diminuíram porque a violência doméstica também diminuiu nesse período, em virtude de as famílias estreitarem laços por maior tempo de convivência, o que pode ter gerado um aumento da qualidade nas relações familiares."; "Será que, pelo fato de estarem todos juntos, no mesmo ambiente, em um maior intervalo de tempo, o(a) agressor(a) consegue elevar o nível de repressão, impedindo que a denúncia efetivamente ocorra?".

Ao final do debate, permita que os estudantes tragam outras soluções para esse problema, além dos canais de denúncia apresentados pelo texto. Esses veículos de comunicação de denúncias fazem estudos estatísticos a serem inseridos em campanhas de conscientização da população. Anote as ideias dos estudantes na lousa e permita outra discussão.

Aproveite a pergunta ao final do texto para promover práticas escritas argumentativas fundamentadas em dados científicos que contribuam para uma interação crítica com esse tema polêmico e importante para a cidadania.

Proposta para o professor

Para auxiliar na organização de um debate, é interessante assistir a esse filme. Se julgar pertinente, indique para os estudantes também assistirem. O filme conta a história de 2 estudantes que almejam ingressar em 2 das mais conceituadas universidades do mundo. Para isso, eles devem deixar de lado a maneira hostil como competem na escola e formar uma equipe de debates para disputar em um campeonato.

Reprodução/Netflix

Pôster do filme *Doce argumento* (*Candy jar*). Direção: Ben Shelton. Roteiro: Chad Klitzman. Cinematografia: Topher Osborn. Elenco: Jacob Latimore, Sami Gayle, Tom Bergeron, Helen Hunt, Paul Tigue e outros. Netflix, 2018. 1 filme (1h 32 min).

Orientações didáticas

Estatística

Na BNCC

Este capítulo favorece o desenvolvimento das habilidades: **EF09MA05**, quando a porcentagem é utilizada no cálculo das frequências relativas; **EF09MA21**, ao propor a análise e interpretação, em gráficos divulgados pela mídia, de elementos que podem induzir a erros de leitura, como escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão de informações importantes, entre outros; **EF09MA22**, quando os estudantes escolhem e constroem o gráfico mais adequado para apresentar determinado conjunto de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central; e **EF09MA23**, ao propor o planejamento e a execução de pesquisa amostral envolvendo o tema da realidade social e a comunicação dos resultados por meio de relatório contendo avaliação de medidas de tendência central e da amplitude e tabelas e gráficos construídos com o apoio de planilhas eletrônicas.

Neste tópico, vamos revisar conceitos iniciais de estatística, já trabalhados anteriormente. Comece apresentando a tabela de frequências feita com dados de uma pesquisa sobre a quantidade de irmãos dos estudantes de uma escola. Peça aos estudantes que calculem as porcentagens apresentadas na terceira coluna, para que compreendam os dados da tabela. Nesse momento, é importante relembrar com os estudantes os conceitos: variável, variável discreta, distribuição de frequências e população. Defina o que é cada conceito utilizando os dados da tabela.

Noções de Estatística

EF09MA05
EF09MA21
EF09MA22
EF09MA23

Estatística

Vamos revisar alguns conceitos básicos de Estatística que estudamos em anos anteriores.

Os irmãos dos estudantes

Foi feita uma pesquisa sobre o número de irmãos de cada estudante, em uma turma de 25 estudantes. O resultado foi o seguinte: há 2 estudantes que não têm irmãos, 8 que têm 1 irmão cada um, 11 que têm 2 irmãos cada um, 2 que têm 3 irmãos cada um, 1 com 4 irmãos e 1 com 5 irmãos.

Vamos organizar esses dados em uma tabela:

Número de irmãos dos estudantes

Número de irmãos	Frequência	Frequência relativa (em %)
0	2	8
1	8	32
2	11	44
3	2	8
4	1	4
5	1	4
Total	**25**	**100**

Dados elaborados para fins didáticos.

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Vamos aprender a lidar com esses dados e conhecer outras formas de representá-los.

Distribuição de frequências

A tabela anterior é denominada **distribuição de frequências**. Ela resultou de uma pesquisa sobre a **variável** número de irmãos na **população** formada pelos 25 estudantes da turma.

Denominamos **frequência** de um valor da variável o número de vezes que esse valor é observado na população. Há também a chamada **frequência relativa**, que é obtida dividindo-se a frequência propriamente dita pela quantidade de elementos da população. A frequência relativa costuma ser apresentada na forma de taxa percentual.

No estudo da Estatística, aprendemos a organizar dados resumindo-os em tabelas e gráficos que facilitem a sua análise.

População e variável

O termo "população" refere-se ao conjunto dos elementos sobre os quais desejamos pesquisar alguma característica. Essa característica deve variar de elemento para elemento da população, sendo, portanto, a variável estudada. Assim, por exemplo, não é interessante fazer estatística a respeito do número de aulas semanais dos estudantes de uma turma do 9º ano se todos os estudantes dessa turma tiverem o mesmo número de aulas semanais. Mas, nessa população determinada, podemos considerar muitas outras variáveis, como: número de irmãos, medida da altura, medida da massa, nota de uma prova de Matemática, esporte preferido, mês do nascimento, medida de tempo gasto em uma corrida de 100 metros, número de acertos em 10 lances livres de basquete, etc.

Proposta para o estudante

Peça aos estudantes que pesquisem em jornais ou na internet alguma tabela com dados estatísticos de assuntos relevantes e atuais, anotem os dados no caderno e depois, compartilhem com os colegas.

Proposta para o professor

Esse livro apresenta os princípios básicos de estatística de maneira contextualizada, com exemplos em diversas áreas, como economia, pedagogia, demografia e psicologia.
VIEIRA, Sônia. *Fundamentos de estatística*. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2018.

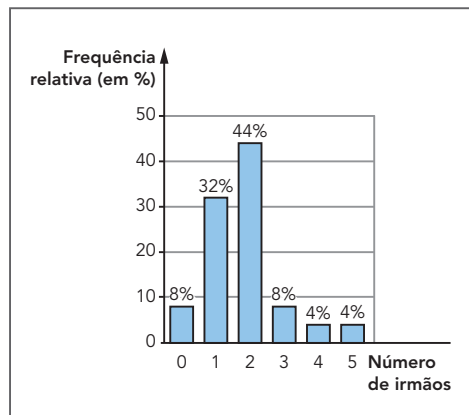
Variáveis discretas

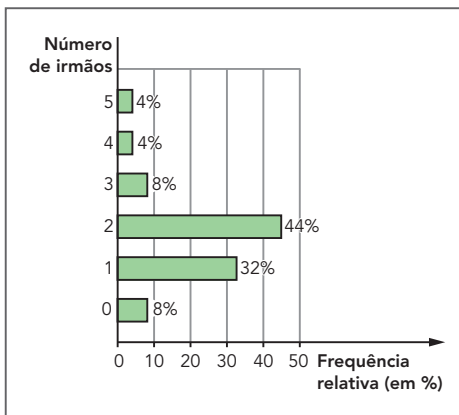
Uma variável que associa a cada elemento da população um número resultante de contagem é exemplo de **variável discreta**. Nas variáveis discretas, os possíveis valores podem ser dispostos sucessivamente, como x_1, x_2, x_3, x_4, ... São variáveis discretas, por exemplo, o número de irmãos de cada estudante de uma turma, o número de telefonemas recebidos por uma pessoa em cada dia de um mês, o número de acidentes que ocorrem por mês em uma rodovia.

Representação gráfica

Podemos representar a distribuição de frequências do número de irmãos em um gráfico de barras ou de colunas ou de setores. Esse tipo de representação por meio de gráficos permite uma melhor visualização dos dados a serem avaliados.

No gráfico de colunas ou no de barras, desenhamos todas elas com as mesmas medidas da largura e com medidas de comprimento proporcionais à frequência.

Número de irmãos dos estudantes – Gráfico de colunas

Dados elaborados para fins didáticos.

Número de irmãos dos estudantes – Gráfico de barras

Dados elaborados para fins didáticos.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

No caso do gráfico de setores, a medida de área de cada setor é proporcional à frequência. Para determinar cada setor, calculamos a medida do ângulo central aplicando a frequência relativa ao total de 360°.

Considere a tabela:

Número de irmãos dos estudantes

Número de irmãos	Frequência relativa	Medida do ângulo central
0	0,08	$0,08 \cdot 360° = 28,8°$
1	0,32	$0,32 \cdot 360° = 115,2°$
2	0,44	$0,44 \cdot 360° = 158,4°$
3	0,08	$0,08 \cdot 360° = 28,8°$
4	0,04	$0,04 \cdot 360° = 14,4°$
5	0,04	$0,04 \cdot 360° = 14,4°$

Dados elaborados para fins didáticos.

Número de irmãos dos estudantes – Gráfico de setores

Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

Orientações didáticas

Variáveis discretas

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA22** e a **CEMAT06** ao apresentar dados de variáveis discretas representados em diversos tipos de gráfico.

O tópico começa com o conceito de variável discreta, que está relacionado com a contagem de cada elemento da população considerada.

Os dados da tabela de frequências apresentada no início do capítulo são agora representados na forma de gráfico. Analise com os estudantes os gráficos propostos, diferenciando os tipos: de colunas, de barras e de setores. Demonstre como os gráficos foram concebidos e construídos, se possível com o auxílio de uma ferramenta digital, como uma planilha eletrônica, ou um simulador na internet para criação de gráficos estatísticos.

É possível relacionar o título dos gráficos “Número de irmãos dos estudantes” com o conceito de planejamento familiar, trabalhando de maneira interdisciplinar com o componente curricular **Geografia**.

Proposta para o estudante

Peça aos estudantes que pesquisem em jornais ou na internet algum gráfico com dados estatísticos de assuntos relevantes e atuais, anotem os dados no caderno e depois, compartilhem com os colegas.

Proposta para o professor

A publicação a seguir traz um curso rápido que ensina o passo a passo para se confeccionar um gráfico no Excel.
FREIRE, Yhara. Como fazer gráfico no Excel? Aprenda com o passo a passo. *Sesi Senai*, 2021. Disponível em: https://blog.sesisenai.org.br/como-fazer-grafico-no-excel/. Acesso em: 26 jun. 2022.

Orientações didáticas

Atividades

As atividades **1** a **4** pretendem fazer com que os estudantes manipulem alguns dados estatísticos, representando-os em tabelas de frequências, gráficos de coluna e de setores, além de propor a análise de alguns gráficos já prontos, buscando os dados ao interpretá-los.

A atividade **2**, em particular, favorece o trabalho com o TCT *Educação para o Consumo*, uma vez que os dados apresentados mostram um aumento na venda de passagens aéreas devido a um evento. Proponha aos estudantes uma pesquisa sobre os impactos negativos e positivos das copas do mundo na economia brasileira. Permita que exponham o que descobriram em suas pesquisas e deem suas opiniões, escrevendo-as na lousa para que outros colegas também comentem.

A atividade **4** pode ensejar o contexto do agronegócio brasileiro, de importância estratégica mundial para a segurança alimentar das populações.

1. As notas dos 40 estudantes de uma turma em uma prova de Matemática que valia 4 pontos são:

3, 2, 2, 1, 4, 1, 0, 4, 3, 2, 3, 3, 4, 1, 1, 2, 2, 2, 0, 4, 1, 2, 3, 3, 3, 3, 1, 4, 0, 2, 2, 4, 3, 0, 2, 2, 2, 3, 2, 2.

a) Faça a tabela de distribuição de frequências.

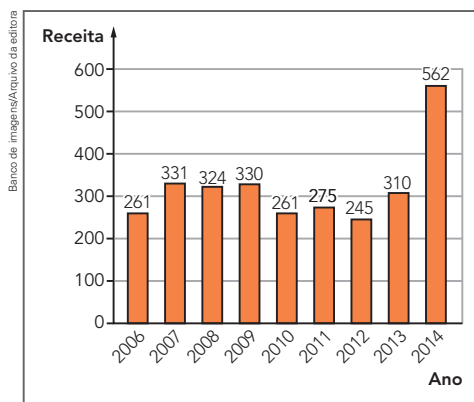
b) Represente as notas em um gráfico de colunas.

As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

2. Leia o texto a seguir:

Em 2014, as companhias aéreas brasileiras tiveram uma receita de 562 milhões de dólares (o que correspondia a 1,6 bilhão de reais) na venda de passagens no exterior com destino ao Brasil; esse valor equivale a uma alta de 81,4% em relação a 2013.

O aumento nas vendas ocorreu, em grande parte, pela realização da Copa do Mundo de Futebol no país. Apenas entre maio e julho de 2014, as companhias aéreas registraram 189 milhões de dólares (535 milhões de reais) na venda de passagens.

Receita (em milhões de dólares) de passagens aéreas no exterior com destino ao Brasil

Fonte dos dados: FRIAS, Maria C. Aéreas faturam US$ 562 mi com voos do exterior para o Brasil. *Folha de S.Paulo*, B2 mercado, 13 fev. 2015. Disponível em: https://acervo.folha.com.br/leitor.do?numero=20134&keyword=companhias%2Caereas&anchor=5980461&origem=busca&originURL=&pd=1f323289efa4a46eb7b3c57fffaca8. Acesso em: 30 abr. 2022.

a) Que porcentagem da receita de 2014 corresponde às vendas entre maio e julho, de acordo com o texto? Aproximadamente 34%.

b) Nos últimos 3 anos indicados no gráfico houve um crescimento nessa receita. Considerando apenas esses 3 últimos anos, represente esses dados em um gráfico de setores.

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

3. Na tabela a seguir estão os salários dos 25 funcionários de uma loja.

Salário dos funcionários

Salário (em R$)	Frequência	
2.000,00	3	12%
2.700,00	5	20%
3.200,00	4	16%
3.300,00	10	40%
5.000,00	2	8%
8.000,00	1	4%

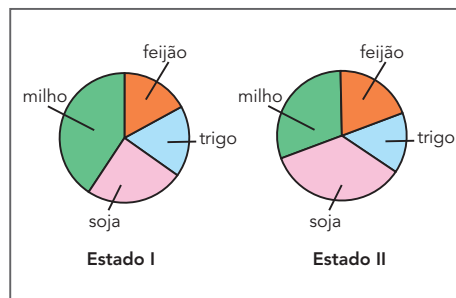
Dados elaborados para fins didáticos.

a) Refaça a tabela no caderno acrescentando as frequências relativas.

b) Escolha e construa um gráfico adequado para representar esses dados.

As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

4. Em certo ano, 2 estados produziram os mesmos tipos de grãos. Os gráficos de setores a seguir ilustram a relação entre a produção de cada tipo de grão e a produção total desses estados.

Produção anual de grãos

Dados elaborados para fins didáticos.

a) Determine que porcentual da produção de grãos do estado **II** representa, nesse ano, as produções de soja e de trigo, juntas. 50%

b) Pode-se dizer que, nesse ano, o estado **I** produziu uma quantidade total de milho maior que a do estado **II**? Por quê?

Não. Porque não sabemos qual foi a produção em números absolutos de cada estado.

Variáveis contínuas

Uma variável que associa a cada elemento da população um número resultante de uma mensuração (medição) é, geralmente, uma **variável contínua**. Nas variáveis contínuas, os possíveis valores são todos os números reais da reta numérica, de uma semirreta ou de um segmento de reta dela. São variáveis contínuas, por exemplo, a medida de tempo de cada participante em uma maratona, a medida da duração de cada jogo em um torneio de tênis, a medida da estatura de cada atleta em uma competição de salto, etc.

Distribuição de frequências por classes

Para elaborar a distribuição de frequências de uma variável contínua, os dados são agrupados em classes (ou intervalos) de valores possíveis da variável, como no exemplo a seguir.

A Maratona de Nova York, disputada no dia 3 de novembro de 2019, foi vencida em 2 h 8 m 13 s de prova pelo queniano Geoffrey Kamworor, que já havia vencido essa prova em 2017. Albert Korir, também do Quênia, ficou em segundo lugar, com a medida de tempo de 2 h 8 m 38 s.

Fonte dos dados: QUENIANOS dominam e vencem a 49ª edição da Maratona de Nova York. *Metrópoles*, [*s. l.*], 3 nov. 2019. Disponível em: https://www.metropoles.com/esportes/quenianos-dominam-e-vencem-a-49a-edicao-da-maratona-de-nova-york. Acesso em: 30 abr. 2022.

Dessa prova participaram 53 520 atletas de todo o mundo, e as medidas de tempo dos 40 primeiros colocados foram:

2:08:13	2:08:36	2:08:38	2:09:20	2:10:39	2:10:45	2:11:11	2:11:18	2:11:34	2:12:07	2:12:57	2:13:09	2:13:35	2:14:10
2:14:13	2:14:16	2:14:24	2:15:38	2:16:10	2:16:34	2:16:38	2:16:58	2:17:50	2:18:20	2:19:41	2:19:52	2:21:26	2:21:29
2:21:55	2:22:27	2:22:38	2:23:04	2:23:04	2:23:32	2:23:55	2:24:01	2:25:06	2:25:37	2:25:51	2:26:17		

Para representar esses dados em um gráfico, vamos transformá-los em minutos aproximando por uma casa decimal (2 h são 120 min, e os segundos transformamos em minutos dividindo por 60):

128,2	128,6	128,6	129,3	130,7	130,8	131,2	131,3	131,6	132,1	133,0	133,2	133,6	134,2	134,2	134,3	134,4	135,6	136,2	136,6
136,6	137,0	137,8	138,3	139,7	139,9	141,4	141,5	141,9	142,5	142,6	143,1	143,1	143,5	143,9	144,0	145,1	145,6	145,9	146,3

Para agrupar esses dados em uma tabela, escolhemos a quantidade de intervalos e amplitude de cada um deles. Em geral, usam-se de 5 a 12 classes.

Nesse exemplo, podemos notar que:

- o menor valor observado é 128,2; e o maior, 146,3;
- a diferença $146,3 - 128,2 = 18,1$ representa a **amplitude** dos dados;
- escolhendo 7 classes de amplitude 3, cobriremos todos os dados, uma vez que $7 \cdot 3 = 21$.

Assim, formamos a tabela representada, contando o número de atletas em cada intervalo determinado.

O símbolo ⊢ indica que o valor à esquerda é incluído nesse intervalo, mas o da direita não. Por exemplo, o valor 133 não é contado na classe 130 ⊢ 133, mas, sim, na seguinte, 133 ⊢ 136.

As distribuições de frequência por classes também podem ser feitas para variáveis discretas quando a lista de valores é grande.

Medida de tempo dos atletas na maratona

Medida de tempo (em min)	Frequência (nº de atletas)	Frequência relativa (em %)
127 ⊢ 130	4	10
130 ⊢ 133	6	15
133 ⊢ 136	8	20
136 ⊢ 139	6	15
139 ⊢ 142	5	12,5
142 ⊢ 145	7	17,5
145 ⊢ 148	4	10
Total	**40**	**100**

Fonte dos dados: QUENIANOS dominam e vencem a 49ª edição da Maratona de Nova York. *Metrópoles*, [*s. l.*], 3 nov. 2019. Disponível em: https://www.metropoles.com/esportes/quenianos-dominam-e-vencem-a-49a-edicao-da-maratona-de-nova-york. Acesso em: 30 abr. 2022.

Orientações didáticas

Variáveis contínuas

Este tópico apresenta o conceito de variável contínua, que está relacionado com medição.

Destaque que as faixas de dados (classes) são associadas a intervalos reais, como subconjuntos da reta numérica. Utilize o exemplo dos tempos dos corredores da maratona de Nova York para criar com os estudantes alguns intervalos de tempo específicos, de modo que se possa classificar os dados em função dos intervalos. Peça a eles que transformem os tempos em minutos no formato decimal, explicando que isso deve ser feito por causa dos segundos. Depois, peça que calculem a amplitude, ou seja, o intervalo máximo entre a diferença dos tempos, criando uma estratégia para obter subintervalos de tempo usados para classificar o tempo de cada corredor. Construa na lousa a tabela com os resultados, calculando as frequências relativas em porcentagem.

Esse texto favorece o trabalho com a **CEMAT05**, uma vez que a Matemática é utilizada como uma ferramenta importante no controle do desempenho dos atletas, assim como na organização do evento e seus resultados práticos.

Proponha uma pesquisa aos estudantes acerca da utilização da Matemática nas estatísticas esportivas, explicando inclusive que existem profissionais especializados em gerar e avaliar esses dados em diversas modalidades. Essa pesquisa favorece o trabalho com o TCT *Ciência e Tecnologia*, uma vez que a Matemática se apresenta como uma ferramenta conceitual e tecnológica de controle e aumento de produtividade nos esportes.

Orientações didáticas

Histograma

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA22** e a **CEMAT06**, ao apresentar dados de variáveis contínuas representados em histograma.

Explique aos estudantes que mesmo os dados estando divididos em intervalos reais, podem ser representados como um gráfico adequado, que é o histograma. Utilize o gráfico apresentado para explicar cada elemento de um histograma e como os dados estão arranjados nesse tipo de representação gráfica.

Apresente aos estudantes outros exemplos de histogramas, explicando-os e demonstrando principalmente que as colunas representam intervalos de dados de variável contínua, enquanto os gráficos de colunas apresentam dados pontuais de variável discreta.

Ainda em relação ao contexto da maratona de atletas, pode ser discutida a importância de se praticar um esporte e fazer exercícios físicos, mobilizando assim o TCT *Saúde*.

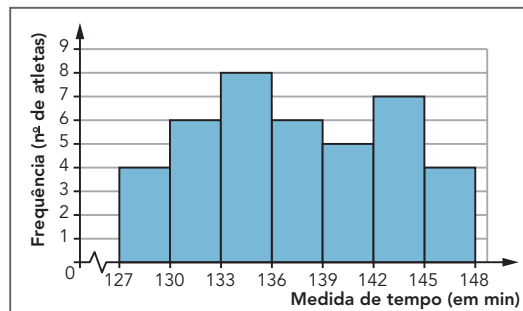
Atividades

As atividades **5** e **6** exploram a interpretação dos dados das tabelas, assim como a criação de classificações dentro da amplitude dos dados e a confecção de histogramas, de maneira a fixar os conteúdos. Essas atividades favorecem o trabalho com a **CEMAT06**, uma vez que a Matemática auxilia na resolução de um problema imaginado, com a utilização de linguagem própria, e registros por meio de gráficos e tabelas. Em ambas as atividades, a interpretação correta dos intervalos é de suma importância para que os estudantes confeccionem corretamente o gráfico, além de realizar os cálculos de porcentagem envolvidos.

Na atividade **7**, além de construir o histograma e efetuar os cálculos solicitados, os estudantes devem também preencher a tabela de distribuição de frequências. Oriente-os a seguir a sequência de intervalos de modo proporcional, distribuindo as notas dos 50 estudantes coerentemente.

Histograma

Histograma é a representação gráfica de uma distribuição de frequência por classes. É construído marcando-se em um dos eixos os intervalos considerados e tomando-se cada um como referência para a coluna de medida de área proporcional à frequência (ou à frequência relativa). Caso sejam intervalos de mesma amplitude, desenhamos colunas com medidas de altura proporcionais às frequências.

Medida de tempo dos atletas na maratona

Dados elaborados para fins didáticos.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

5. O professor de Cálculo de uma faculdade aplicou uma prova de 4 horas. Os 80 estudantes presentes gastaram as medidas de tempo indicadas na tabela. Faça o histograma correspondente, indicando as porcentagens de cada classe.

Medidas de tempo na prova

Medida de tempo (em min)	Nº de estudantes
180 ⊢ 190	4
190 ⊢ 200	8
200 ⊢ 210	10
210 ⊢ 220	20
220 ⊢ 230	26
230 ⊢ 240	12
Total	**80**

Dados elaborados para fins didáticos.

6. Com relação à atividade anterior, considere a tabela a seguir, que apresenta as notas obtidas pelos 80 estudantes.

Notas dos estudantes

Nota	Nº de estudantes
0 ⊢ 0,2	14
2,0 ⊢ 4,0	20
4,0 ⊢ 6,0	20
6,0 ⊢ 8,0	16
8,0 ⊢⊣ 10	10
Total	**80**

Dados elaborados para fins didáticos.

Note que o último intervalo de notas é 8,0 ⊢⊣ 10. O símbolo ⊢⊣ indica que nele estão computadas todas as notas de 8,0 a 10, inclusive essas 2.

a) Faça o histograma indicando as porcentagens de cada classe. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

b) Faça uma estimativa da porcentagem de estudantes que tiraram nota igual ou superior a 5,0. 45%

7. Esta é a lista das notas de 50 estudantes em uma prova de Ciências:

6,7	8,0	4,5	6,8	5,8
8,3	3,7	8,2	5,5	6,5
8,3	6,5	10,0	6,5	8,1
4,0	9,5	9,5	7,2	3,5
7,5	4,5	4,5	3,4	9,6
4,4	7,3	5,1	6,9	8,5
6,0	7,5	10,0	5,0	7,1
5,9	3,0	6,5	7,3	5,2
5,4	3,5	8,1	4,5	6,5
6,5	7,3	6,0	5,0	7,4

a) Copie e complete a tabela no caderno com as frequências das notas dos estudantes dessa turma.

Notas dos estudantes

Nota	Frequência (nº de estudantes)	Frequência relativa
3,0 ⊢ 4,0	//////////	//////////
4,0 ⊢ 5,0	//////////	//////////
⋮	⋮	⋮

Dados elaborados para fins didáticos.

b) Construa o histograma dessa distribuição.

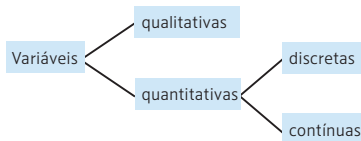
c) Estime, a partir do histograma, a porcentagem de estudantes que tiraram nota 7,5 ou mais. 32%

a) e **b)** As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Proposta para o estudante

Peça aos estudantes que elaborem uma situação-problema que envolva variável contínua, como tempo de corrida ou maratona, que possa ser classificada em intervalos. Depois, peça a eles que construam uma tabela e um histograma com os dados levantados.

Classificação das variáveis

As variáveis que resultam em números – ditas discretas ou contínuas – são as **variáveis quantitativas**. Podemos também fazer estatísticas a respeito de **variáveis qualitativas**, que classificam os elementos da população segundo alguns tipos ou atributos como sexo biológico, cor, cidade onde nasceu, posicionamento favorável, contrário ou neutro na votação de uma proposta em uma assembleia, etc.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Amostra

Muitas vezes, uma estatística é feita colhendo-se dados apenas de uma parte da população. Nesse caso, dizemos que foi escolhida uma **amostra** da população. Portanto, amostra é um subconjunto da população.

Faça as atividades no caderno.

8. Em uma pesquisa de opinião a respeito de um filme sobre um fato histórico recente, foi perguntado: "O filme retratava adequadamente o fato ocorrido?". Uma amostra de 800 pessoas que assistiram ao filme apresentou os seguintes resultados:

SIM ⟶ 360 NÃO ⟶ 280 NÃO SEI ⟶ 160

Represente os dados obtidos em um gráfico que você considere adequado para essa pesquisa.

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

9. A pesquisa Origem e Destino, realizada pela Companhia do Metropolitano de São Paulo (Metrô), é realizada a cada 10 anos, com o objetivo de detalhar os tipos de deslocamento na Região Metropolitana de São Paulo (RMSP). Trata-se de um dos principais levantamentos sobre mobilidade urbana do país. A Pesquisa de Mobilidade 2017, também realizada pelo Metrô, teve a intenção de averiguar possíveis alterações dos dados coletados em 2007.

Delfim Martins/Pulsar Imagens

Linha amarela do metrô de São Paulo (SP). Foto de 2019.

Entre os diversos dados obtidos nessa pesquisa vamos destacar os seguintes:

Banco de imagens/Arquivo da editora

As imagens não estão representadas em proporção.

Fonte dos dados: SÃO PAULO (Estado). Secretaria dos Transportes Metropolitanos. *Pesquisa origem e destino 2017 – 50 anos* – Relatório Síntese. São Paulo: Secretaria dos Transportes Metropolitanos; Metrô, ago. 201, p. 56. Disponível em: https://transparencia.metrosp.com.br/sites/default/files/S%C3%8DNTESE_OD2017_ago19.pdf. Acesso em: 6 abr. 2022.

Orientações didáticas

Classificação das variáveis

Este tópico apresenta uma nova classificação para as variáveis de uma pesquisa, ressignificando a classificação anterior como uma subclassificação, em que os conceitos de variáveis contínuas e discretas passam a ser tipos das variáveis quantitativas, ou seja, que envolvem valores numéricos, seja por contagem ou medição. Além disso, os conceitos de variável qualitativa e amostra são apresentados.

Proponha aos estudantes um debate sobre algumas variáveis qualitativas que possam ser citadas e escreva na lousa o que eles disserem, identificando que assuntos podem ser pesquisados envolvendo essas variáveis. Pergunte se algumas delas podem ser contínuas para que eles percebam que somente variáveis quantificáveis podem ser classificadas dessa forma.

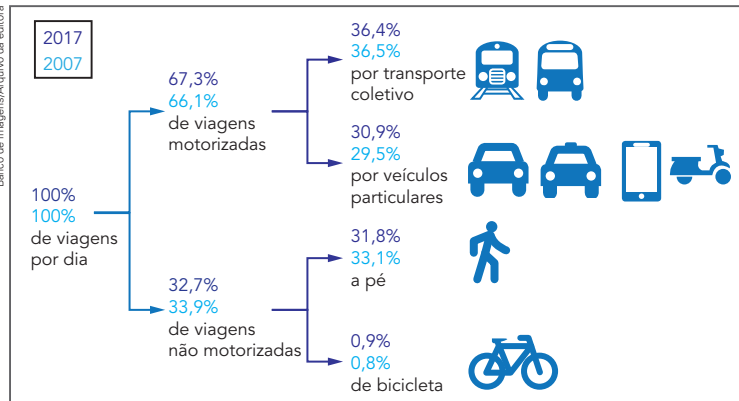
Amostra

Na BNCC

A seção *Atividades* deste tópico favorece o desenvolvimento do TCT *Educação para o Trânsito* ao explorar questões relacionadas à mobilidade urbana na cidade de São Paulo.

Um exemplo muito frequente de amostra, que é relevante ser lembrado, é o das pesquisas de opinião em uma cidade grande ou em um país. Como é impraticável registrar as respostas de todas as pessoas, é escolhida uma fração aleatória da população e os resultados para essa amostra são considerados representativos do todo.

Atividades

A atividade **8** explora uma pesquisa com dados qualitativos, em que os estudantes devem encontrar a melhor solução para que os dados estejam claramente representados em um gráfico. É importante que eles percebam que podem usar o gráfico de colunas ou de barras para esse caso, mas se as frequências relativas forem calculadas é possível usar também um gráfico de setores.

Orientações didáticas

Atividades

A atividade **9** propõe um estudo acerca de dados estatísticos sobre a mobilidade urbana na cidade de São Paulo de 1967 a 2017.

Essa atividade favorece o trabalho com o TCT *Educação para o Trânsito*, uma vez que a Matemática se apresenta como ferramenta para compreender a dinâmica de mobilidade de uma cidade grande ao longo das décadas e como isso afeta o trânsito. Essa atividade também favorece o trabalho com a questão da importância da cidadania e de convívio nas grandes cidades, uma vez que a Matemática nos mostra, por meio da Estatística, maneiras de criarmos soluções para os problemas de mobilidade urbana, fazendo com que o convívio social seja melhor em todos os sentidos. Mobilidade urbana é um tema de muita relevância social. Aproveite o contexto para discutir com os estudantes como se dá a mobilidade urbana na região ou na cidade que residem. Ajude-os a perceber que, em função da diversidade demográfica, social e econômica do Brasil, há diferentes realidades.

Reforce com os estudantes o uso do símbolo de descontinuidade nos gráficos (linha em ziguezague próxima à origem dos eixos) para indicar que os dados nos eixos não seguem a escala desde o zero.

Gráfico de linha

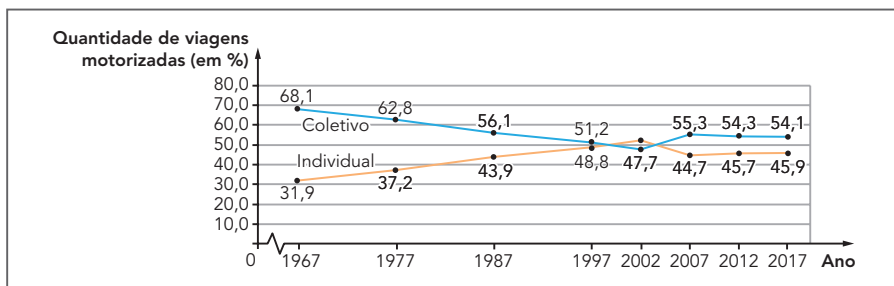
Na BNCC

A seção *Atividades* deste tópico favorece o desenvolvimento do TCT *Educação Financeira* ao explorar questões relacionadas às exportações brasileiras. Mobiliza com maior ênfase a **CEMAT03** ao relacionar diferentes campos da Matemática.

Este tópico apresenta um novo tipo de gráfico, mais eficiente quando se quer demonstrar uma variação dos dados ao longo do tempo.

É importante frisar para os estudantes essa característica utilizando o exemplo proposto. Essa introdução favorece o trabalho com a argumentação fundamentada em dados científicos, uma vez que dados sobre a população mundial são apresentados para mostrar o crescimento exponencial da quantidade de pessoas no mundo. Os estudantes podem ser desafiados a discutir sobre os desafios que essa população poderá enfrentar no futuro caso esse crescimento continue acontecendo. Esse assunto também favorece o trabalho com a interdisciplinaridade, uma vez que o componente curricular **Geografia** pode ser acionado para auxiliar a Matemática.

Na divisão modal das viagens motorizadas, continuaram predominando em 2017 as viagens por modo coletivo (54%) sobre o individual (46%). Essa predominância foi observada ao longo dos 50 anos da pesquisa, com exceção de 2002, quando se identificou uma vantagem do modo individual sobre o coletivo.

Divisão modal das viagens motorizadas – 1967 a 2017

Fonte dos dados: SÃO PAULO (Estado). Secretaria dos Transportes Metropolitanos. *Pesquisa origem e destino 2017 – 50 anos – Relatório Síntese*. São Paulo: Secretaria dos Transportes Metropolitanos; Metrô, ago. 2019, p. 57. Disponível em: https://transparencia.metrosp.com.br/sites/default/files/S%C3%8DNTESE_OD2017_ago19.pdf. Acesso em: 6 abr. 2022.

Repare que se omitiu o trecho do eixo horizontal entre 0 e 1967 anos (indicado por), portanto a escala se aplica aos anos acima de 1967. Usamos o símbolo de descontinuidade para dar mais evidência na variação dos dados.

a) Justifique a afirmação: Na divisão modal das viagens motorizadas, continuaram predominando em 2017 as viagens por modo coletivo (54%) sobre o individual (46%).

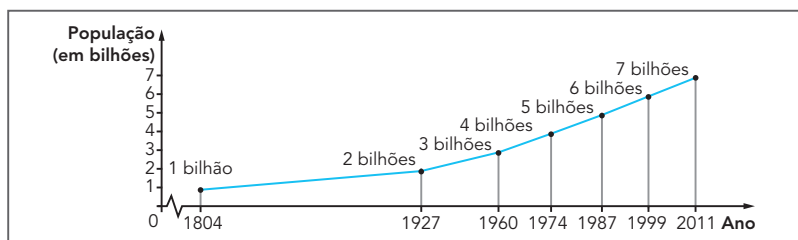
b) Considerando os dados do gráfico, faça uma análise sobre o hábito de usar transporte coletivo. Resposta pessoal.

c) Quanto tempo você gasta em deslocamento para ir e retornar à escola? Você acha esse tempo adequado? Resposta pessoal.

a) Exemplo de resposta: Pela leitura do gráfico, acompanhando o ano de 2017, percebe-se que a porcentagem de viagens coletivas (54,1%) é maior do que a de viagens individuais (45,9%), como ocorreu nas duas pesquisas anteriores.

Gráfico de linha

O gráfico a seguir mostra a evolução da população humana na Terra. Em 2011 atingimos 7 bilhões de pessoas.

População humana na Terra

Fonte dos dados: ONU. Departamento de Assuntos Econômicos e Sociais. *Dinâmica de População*. [*s. l.*], c2021. Disponível em: https://population.un.org/wpp/Graphs/DemographicProfiles/Line/900. Acesso em: 30 abr. 2022.

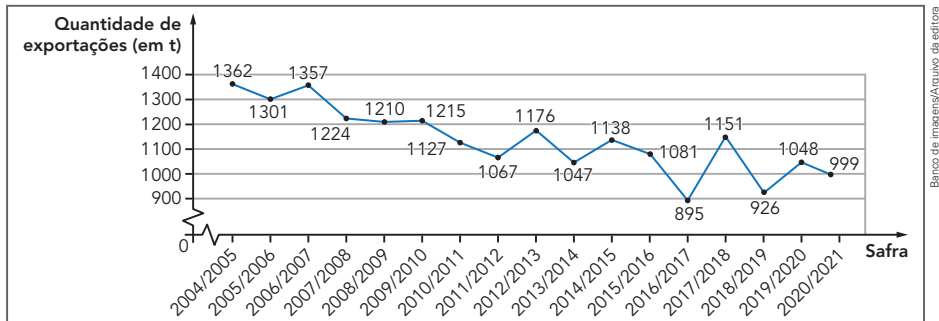
Esse é um exemplo de **gráfico de linha**.

Os gráficos de linha são os mais eficientes quando queremos mostrar a variação (crescimento e decrescimento) de dados observados ao longo do tempo. Repare que, na atividade **9**, foram representadas 2 linhas no mesmo gráfico a fim de fazer a comparação entre os 2 modos de viagens motorizadas ao longo do tempo.

Faça as atividades no caderno.

10. As exportações brasileiras de suco de laranja se enfraqueceram na parcial da temporada 2021/22 (julho/21 a novembro/21). Após uma safra 2020/21 com embarques lentos, o movimento esperado pelo setor era de retomada na temporada atual, para recomposição dos estoques das engarrafadoras internacionais. Porém, diante de mais uma safra nacional com baixa produção de laranjas, os envios externos seguem limitados por mais um ano. [...]

CEPEA. *Citros/Cepea*: com menor produção de laranjas exportação do suco brasileiro recua. Piracicaba: USP/Esalq, 10 dez. 2021. Disponível em: https://www.cepea.esalq.usp.br/br/diarias-de-mercado/citros-cepea-com-menor-producao-de-laranjas-exportacao-do-suco-brasileiro-recua.aspx. Acesso em: 30 abr. 2022.

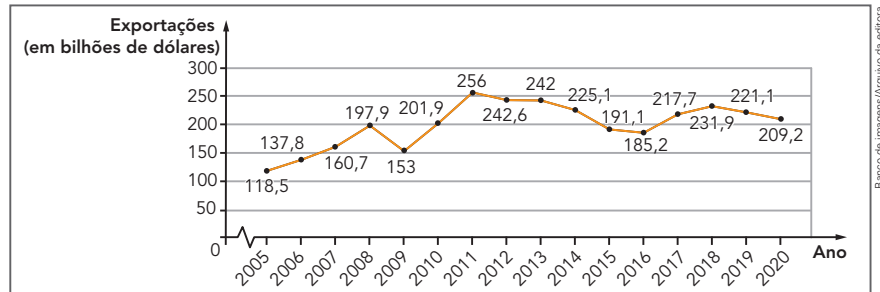
Exportações brasileiras de suco de laranja entre as safras 2004/2005 e 2020/2021

Fonte dos dados: CITRUS BR. *Exportações de suco*. [*s. l.*], c2021. Disponível em: https://citrusbr.com/estatisticas/exportacoes/. Acesso em: 11 fev. 2022.

Considerando os dados do gráfico, responda:

a) Qual safra teve a maior exportação de suco de laranja? Quantas toneladas foram? Safra 2004/2005; 1,362 milhão de toneladas.

b) A exportação em 2017/2018 foi de quantas toneladas a mais do que a da safra anterior? Em termos percentuais, quanto aumentou em relação à anterior? 256 mil toneladas; aproximadamente 28,6%.

11. Analise o gráfico a seguir.

Exportações brasileiras

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Indústria, Comércio Exterior e Serviços. *Brasil*: importações, exportações e balança comercial. Brasília, DF: ComexVis, c2020. Disponível em: http://comexstat.mdic.gov.br/pt/comex-vis. Acesso em: 02 maio 2022.

a) Entre 2005 e 2020, em quais períodos houve crescimento nas exportações? 2005 a 2008; 2009 a 2011; 2016 a 2018.

b) No gráfico, a informação da quantidade de dólares da exportação se refere ao dólar americano. Pesquise o valor do dólar americano (comercial) na data de hoje. Quanto somaram, em reais, as exportações de 2020 ao preço de hoje? Resposta pessoal.

Orientações didáticas

Atividades

A atividade **10** propõe um estudo sobre o enfraquecimento das exportações de suco de laranja na safra 2021/2022, em que os estudantes são desafiados a buscar as respostas solicitadas em um gráfico de linha. Essa atividade favorece o trabalho com as fontes diversificadas de informação, uma vez que dados reais acerca das exportações desse setor são obtidos de um *site*.

A atividade **11** traz uma proposta parecida com a atividade **10**, em que os estudantes devem buscar os dados pedidos em um gráfico de linha. No item **b** é solicitada uma pesquisa sobre o valor corrente do dólar americano, para que a conversão seja feita. Esse item favorece o trabalho com o TCT *Educação Financeira*, uma vez que a pesquisa feita pelo estudante o insere no universo do câmbio monetário e suas variações. Você pode propor essa atividade em semanas diferentes para que os estudantes percebam as oscilações do mercado financeiro, assim como propor um debate sobre a dependência que o preço de certos produtos tem da cotação da moeda americana.

Orientações didáticas

Atividades

A atividade **12** também propõe a busca de dados em um gráfico de linha, porém com uma proposta adicional de comparar os valores por meio de uma razão. Essa atividade favorece o trabalho com a **CEMAT03**, uma vez que ela relaciona dois campos da matemática: a Aritmética e a Estatística.

Outros tipos de gráfico

Na BNCC

Os contextos das questões propostas em *Atividades* permitem mobilizar com maior ênfase a **CEMAT02** e a **CEMAT04**.

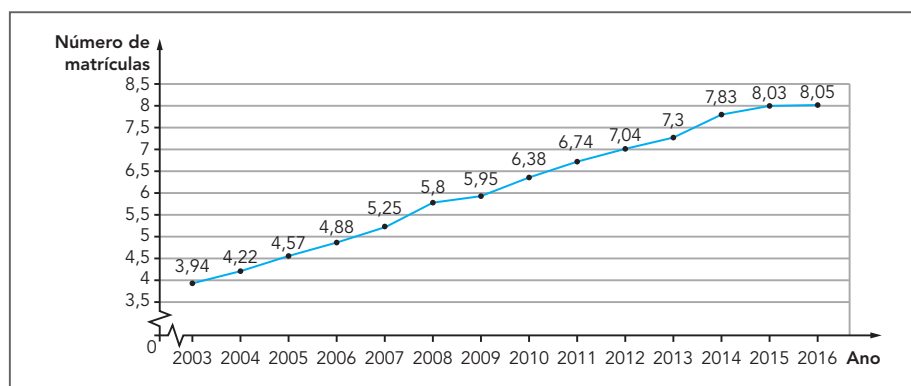
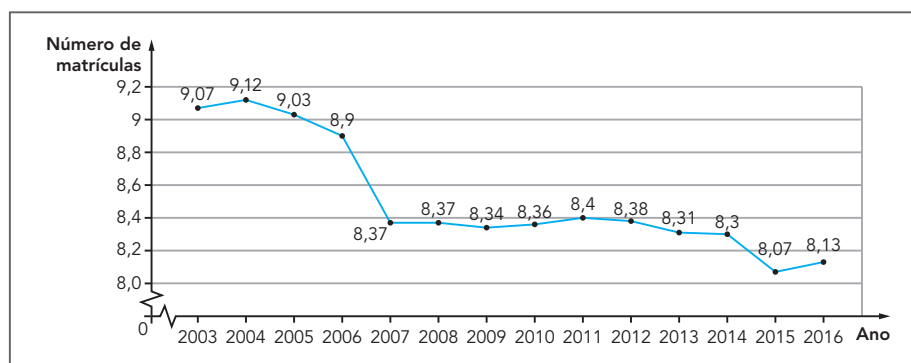
Gráficos de múltiplas colunas

Este tópico apresenta um tipo diferente de gráfico de colunas, em que podemos apresentar mais de uma categoria em momentos diferentes em uma mesma representação gráfica. No exemplo, as categorias masculino e feminino, dadas pelo número de homens e de mulheres, respectivamente, estão no mesmo gráfico, aparecendo 2 vezes cada, pois estão sendo considerados 2 anos diferentes. Esse exemplo favorece o trabalho com a questão do papel da mulher na sociedade, uma vez que pode ser proposta uma discussão sobre a participação da mulher na composição do fluxo de pessoas no cotidiano da cidade, além da questão da violência contra a mulher nos transportes urbanos.

Compare os resultados dos 2 primeiros gráficos com os estudantes, realizando depois a comparação final em um gráfico único. Verifique se os estudantes percebem um crescimento mais acentuado na utilização do metrô por mulheres nos últimos 10 anos. Discuta com os estudantes o que pode ter favorecido esse crescimento perguntando: “O aumento da participação das mulheres no mercado de trabalho pode ter promovido esse aumento também?”; “O aumento da segurança e limpeza nos trens do metrô fizeram com que as mulheres se sentissem mais confortáveis para usá-los?”.

12. Os gráficos a seguir representam os números de matrículas no Ensino Superior e no Ensino Médio no Brasil, em milhões.

Número de matrículas (em milhões) no Ensino Superior

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Número de matrículas (em milhões) no Ensino Médio

Fonte dos dados dos gráficos: BRASIL. Ministério da Educação. *Pesquisas estatísticas e indicadores educacionais*. Brasília, DF: MEC/Inep/Deed, c2017. Disponível em: https://www.gov.br/inep/pt-br/areas-de-atuacao/pesquisas-estatisticas-e-indicadores. Acesso em: 2 maio 2022.

a) Qual é a razão $\frac{\text{número de matrículas no Ensino Superior}}{\text{número de matrículas no Ensino Médio}}$ em 2003? Expresse aproximando por uma razão entre 2 números inteiros. E em 2013? 4 : 9; 7 : 8

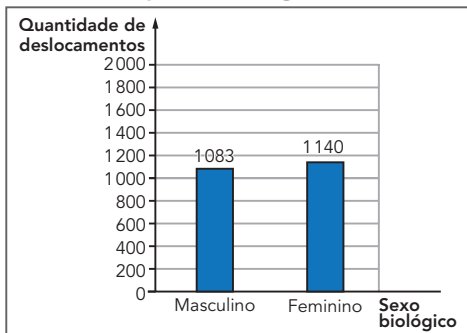
b) Como se interpretam essas razões? A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

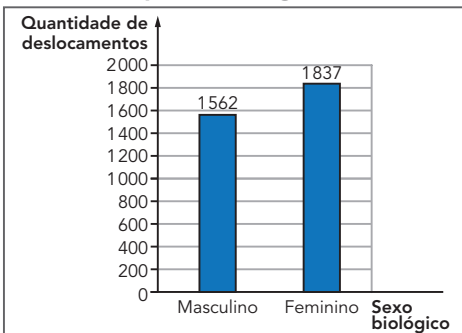
Outros tipos de gráfico

Gráficos de múltiplas colunas

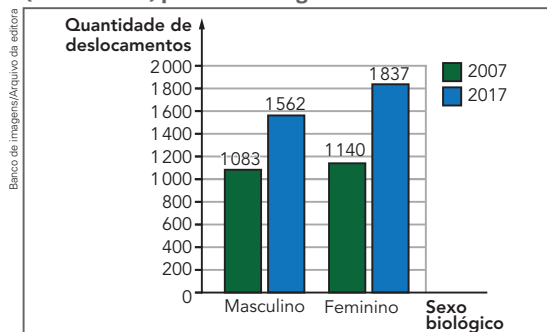
Da pesquisa *Origem e destino* realizada em 2017 na Região Metropolitana de São Paulo, vamos destacar agora alguns gráficos referentes à caracterização socioeconômica a respeito da quantidade de deslocamentos por modo de transporte.

A quantidade de deslocamentos de metrô por sexo biológico (masculino-feminino) apresentou os resultados mostrados nos 2 gráficos a seguir, em 2007 e em 2017, respectivamente.

Quantidade de deslocamentos de metrô (em milhares) por sexo biológico – RMSP – 2007

Quantidade de deslocamentos de metrô (em milhares) por sexo biológico – RMSP – 2017

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

A fim de comparar os dados de 2007 com os de 2017, um novo gráfico foi apresentado, juntando as colunas dos 2 anos para cada sexo biológico. Obtemos assim um gráfico de duplas colunas, que são diferenciadas pelas cores: uma cor para o ano 2007 e outra para o ano 2017.

Analisando esse último gráfico, podemos concluir, por exemplo, que de 2007 para 2017 o uso do metrô cresceu mais para o sexo feminino do que para o masculino.

Quantidade de deslocamentos de metrô (em milhares) por sexo biológico – RMSP – 2007 e 2017

Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados dos gráficos: SÃO PAULO (Estado). Secretaria dos Transportes Metropolitanos. *Pesquisa origem e destino 2017*. São Paulo: [Metrô], [2017?]. Disponível em: https://web.archive.org/web/20220403215402if_/https://www.metro.sp.gov.br/pesquisa-od/arquivos/Caracteriza%C3%A7%C3%A3o_Socioecon%C3%B4mica_dos_Deslocamentos_2017.pdf. Acesso em: 6 abr. 2022.

Pictogramas

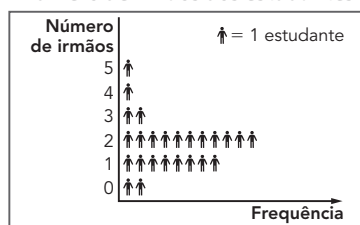
Voltando à distribuição do número de irmãos de cada estudante, vamos analisar uma maneira diferente de representá-la graficamente.

Número de irmãos dos estudantes

Número de irmãos	Frequência
0	2
1	8
2	11
3	2
4	1
5	1
Total	**25**

Dados elaborados para fins didáticos.

Representando cada estudante por um símbolo, por exemplo 🚹, teremos:

Número de irmãos dos estudantes

Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados par fins didáticos.

Orientações didáticas

Pictogramas

Continuando este tópico, é apresentado um tipo de gráfico estatístico que utiliza figuras para representar os dados. Mostre aos estudantes que elementos gráficos como cores, tamanhos e formatos podem ser utilizados para diferenciar e classificar algumas variáveis.

Proposta para o estudante

Peça aos estudantes que elaborem uma situação-problema que envolva uma variável que possa ser classificada em mais de uma categoria. Depois, peça a eles que construam um pictograma para representar essa situação.

Orientações didáticas

Pictogramas

Outro exemplo de pictograma é apresentado no texto utilizando-se da temática dos Jogos Olímpicos. Pode-se promover um debate acerca do incentivo financeiro, tanto do setor público, quanto do setor privado, que é dedicado a atletas da Educação Básica em nosso país. Faça com os estudantes uma pesquisa, comparando a quantidade de atletas enviados por outros países à mesma competição, e peça que produzam um texto sobre o assunto. Essa atividade favorece o trabalho com a **CEMAT02**, uma vez que os estudantes usam a investigação para gerar argumentação sobre o incentivo ao esporte para estudantes da Educação Básica.

Atividades

A atividade **13** favorece o trabalho com a aplicação dos conteúdos estudados no capítulo a uma situação do cotidiano, uma vez que a Matemática, mais especificamente a Estatística, é utilizada para avaliar a evolução (aumento ou diminuição) da utilização dos transportes públicos, em função da idade dos usuários, com dados reais.

A questão solicita a determinação dos aumentos porcentuais de cada faixa etária. Para tanto, basta usar a fórmula para calcular o aumento percentual (i) já estudado neste capítulo:

$$i = \left(\frac{(\text{valor novo} - \text{valor antigo})}{\text{valor antigo}}\right) \cdot 100\%$$

sendo o valor novo de 2017 e o valor antigo de 2007.

Vale a pena mencionar que aumentos podem ser superiores a 100%; isso equivale a dizer que a grandeza aumentou mais que 2 vezes em relação ao valor original.

Este é um exemplo de **pictograma** ou gráfico pictórico.

Pictograma é uma representação gráfica em que os dados são representados por pequenas figuras (ícones). Um cuidado a ser tomado nesse tipo de gráfico é definir o que cada ícone representa (pode ser uma ou mais de uma unidade) e dispô-los de modo que o visual transmita corretamente a quantidade de dados permitindo comparações entre eles.

Vamos analisar outro exemplo. Nos Jogos Olímpicos de Tóquio-2020, a delegação do Brasil tinha em torno de 300 atletas, 170 homens e 130 mulheres. Vamos representar esses dados em um pictograma:

Atletas do Brasil nos Jogos Olímpicos de Tóquio-2020 por sexo biológico

TÓQUIO 2021: quem são os 11 atletas olímpicos brasileiros mais seguidos no Instagram. *BBC News Brasil*. 28 jul. 2021. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/geral-57961703. Acesso em: 2 maio 2022.

Faça as atividades no caderno.

13. A partir dos gráficos a seguir, construa, no caderno, um gráfico de duplas colunas para analisar a evolução da quantidade de deslocamentos de metrô por faixa etária de 2007 para 2017. Em que faixa etária ocorreu o maior aumento porcentual dos deslocamentos de 2007 para 2017?

O gráfico encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual. De 60 a 69 anos.

Quantidade de deslocamentos de metrô (em milhares) por faixa etária – RMSP – 2007

Quantidade de deslocamentos de metrô (em milhares) por faixa etária – RMSP – 2017

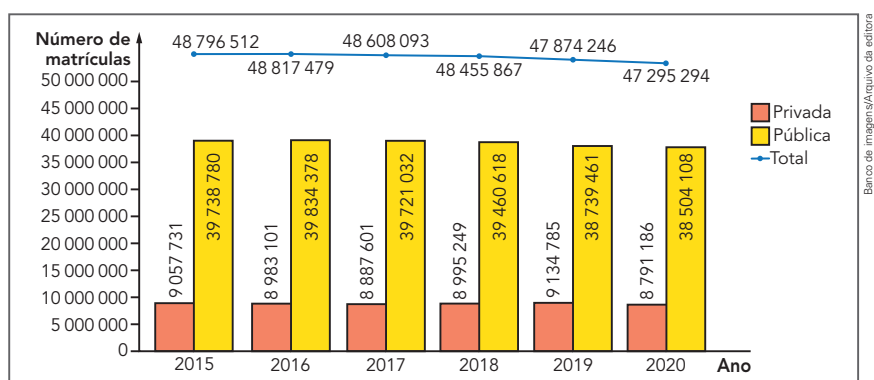
Fonte dos dados dos gráficos: SÃO PAULO (Estado). Secretaria dos Transportes Metropolitanos. *Pesquisa origem e destino 2017*. São Paulo: [Metrô], [2017?]. Disponível em: http://www.metro.sp.gov.br/pesquisa-od/arquivos/Caracteriza%C3%A7%C3%A3o_Socioecon%C3%B4mica_dos_Deslocamentos_2017.pdf. Acesso em: 6 abr. 2022.

14. Analisando o gráfico a seguir, redija uma frase sobre a evolução da quantidade de deslocamentos por automóvel de 2007 a 2017, segundo o grau de escolaridade. Resposta pessoal.

Quantidade de deslocamentos (em milhares) por automóvel segundo o grau de escolaridade – RMSP – 2007 e 2017

Fonte dos dados: SÃO PAULO (Estado). Secretaria dos Transportes Metropolitanos. *Pesquisa origem e destino 2017.* São Paulo: [Metrô], [2017?]. Disponível em: http://www.metro.sp.gov.br/pesquisa-od/arquivos/Caracteriza%C3%A7%C3%A3o_Socioecon%C3%B4mica_dos_Deslocamentos_2017.pdf. Acesso em: 6 abr. 2022.

15. Analise o gráfico a seguir e o comentário apresentado pelos pesquisadores.

Evolução do total de matrículas na Educação Básica por rede de ensino – 2015-2020

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Censo Escolar 2020* – Divulgação dos resultados. Brasília, DF: Ministério da Educação, 29 jan. 2021. Disponível em: https://download.inep.gov.br/censo_escolar/resultados/2020/apresentacao_coletiva.pdf. Acesso em: 6 abr. 2022.

Em 2020, foram contabilizadas 47,3 milhões de matrículas nas 179,5 mil escolas de Educação Básica no Brasil, cerca de 579 mil matrículas a menos em comparação com o ano de 2019, o que corresponde a uma redução de 1,2% no período.

BRASIL. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. *Censo Escolar 2020* – Divulgação dos resultados. Brasília, DF: Ministério da Educação, 29 jan. 2021. Disponível em: https://download.inep.gov.br/censo_escolar/resultados/2020/apresentacao_coletiva.pdf. Acesso em: 6 abr. 2022.

Responda no caderno: A redução do número de matrículas em 2020, relativamente a 2019, foi percentualmente maior na rede privada ou na pública? Na rede privada.

16. Planeje e execute uma pesquisa sobre os estudantes da turma escolhendo um tema de interesse social e comunique os resultados por meio de um gráfico pictórico. Resposta pessoal.

Orientações didáticas

Atividades

A atividade **14** propõe uma interpretação do gráfico seguido da expressão de uma opinião acerca dos dados. Oriente os estudantes a encontrar uma relação entre a utilização de veículos e o grau de escolaridade dos usuários.

A atividade **15** traz uma proposta que favorece o trabalho com a **CEMAT04**, uma vez que, por meio de observações sistemáticas, pode-se propor uma discussão com os estudantes acerca do motivo pelo qual as matrículas caíram em número do ano de 2019 para o ano de 2020, inclusive traçando um paralelo com a pandemia da covid-19.

A atividade **16** favorece a prática de pesquisa de campo, uma vez que os estudantes farão uma pesquisa no ambiente escolar. Proponha algum assunto de relevância social ou relacionado à cultura juvenil, que possa ser representado por figuras para construir um pictograma. Se julgar adequado, explore a ascendência dos estudantes, favorecendo assim o trabalho com a multiplicidade étnica.

Se necessário, retome as etapas de elaboração de pesquisa já exploradas nos volumes anteriores e, também, neste volume.

Orientações didáticas

Análise de gráficos

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA21**, ao propor a análise de gráficos identificando se há elementos que podem induzir a erros de interpretação.

Atividades

A atividade **17** propõe a análise do gráfico com dados acerca do impacto econômico causado pela cultura do medo instaurada pelo terrorismo ao redor do mundo. Para calcular o custo econômico, os estudantes precisam realizar a conversão entre as moedas brasileira e norte-americana. Estimule--os a pesquisar na internet os maiores atentados terroristas da história, se possível dando ênfase ao ataque às torres gêmeas do World Trade Center, em Nova York, EUA, em 21 de setembro de 2001. Essa atividade permite interdisciplinaridade, uma vez que pode ser trabalhada em parceria com o professor de **História**.

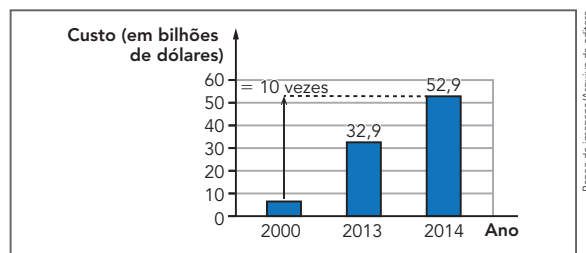
As atividades **18** e **19** permitem promover positivamente o papel da mulher na sociedade, uma vez que propõem um estudo estatístico acerca da participação da mulher no eleitorado brasileiro. Reforce o que é solicitado no item **b** da atividade **18**: o gráfico apresenta escala inapropriada no eixo dos anos.

Análise de gráficos

Nas atividades seguintes, analise os gráficos e faça as propostas. Alguns deles apresentam elementos que podem induzir a erros de leitura ou de interpretação. Portanto, analise-os cuidadosamente.

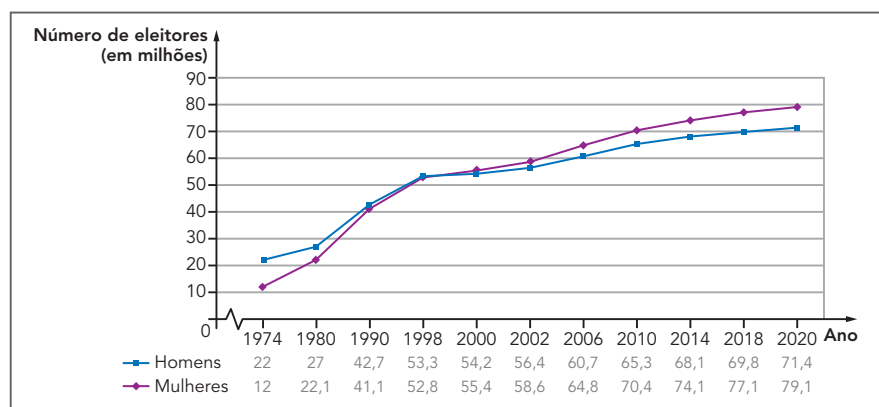
Faça as atividades no caderno.

17. Analise o gráfico de colunas a seguir, publicado pelo periódico português *Jornal de Negócios*, que traz um levantamento desenvolvido pelo Instituto de Economia e Paz sobre os prejuízos econômicos causados por ataques terroristas.

Custos econômicos do terrorismo disparam

VERÍSSIMO, André. O terrorismo global em cinco gráficos. *Jornal de Negócios*, [*s. l.*], 19 nov. 2015. Disponível em: https://www.jornaldenegocios.pt/economia/detalhe/o_terrorismo_global_em_cinco_graficos. Acesso em: 6 abr. 2022.

Considerando as informações do gráfico, determine o custo econômico com terrorismo no ano 2000.
5,29 bilhões de dólares.

18. As mulheres brasileiras conquistaram o direito de voto em 1932. Analise o gráfico de linhas sobre a evolução do eleitorado brasileiro a partir de 1974.

Crescimento do número de eleitores e feminilização do eleitorado brasileiro: 1974-2020

ALVES, José Eustáquio D. O perfil do eleitorado brasileiro por idade e sexo em 2020. *EcoDebate*, [*s. l.*], [20--?]. Disponível em: https://www.ecodebate.com.br/2020/10/21/o-perfil-do-eleitorado-brasileiro-por-idade-e-sexo-em-2020/. Acesso em: 6 abr. 2022.

a) A partir de que ano o número de mulheres superou o número de homens no eleitorado brasileiro? 2000

b) Aponte uma correção a ser feita no gráfico para dar uma ideia mais precisa sobre o ritmo de crescimento do eleitorado no período considerado. O espaçamento entre os anos não está proporcional no gráfico. Por exemplo, de 1980 a 1990 decorrem 10 anos; de 2018 a 2020, apenas 2 anos.

c) Você sabe a porcentagem de parlamentares mulheres na Câmara Federal? E na Câmara de seu estado? Converse com os colegas sobre a opinião de vocês a respeito dessa porcentagem.

Resposta pessoal. Em 2018, a bancada feminina Câmara dos Deputados era de apenas 15%. (Fonte dos dados: https://www.camara.leg.br/noticias/550935-bancada-feminina-na-camara-sera-composta-por-77-deputadas-na-nova-legislatura/. Acesso em: 11 jun. 2022.)

Proposta para o estudante

Esse livro narra o episódio da queda das torres do World Trade Center provocada por um atentado terrorista.
MEIHY, José Carlos Sebe Bom. *11 de setembro de 2001 – A queda das Torres Gêmeas de Nova York*. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 2005 (Lazuli Rupturas).

19. Considere os gráficos de colunas a seguir sobre o perfil do eleitorado brasileiro.

Gráfico I

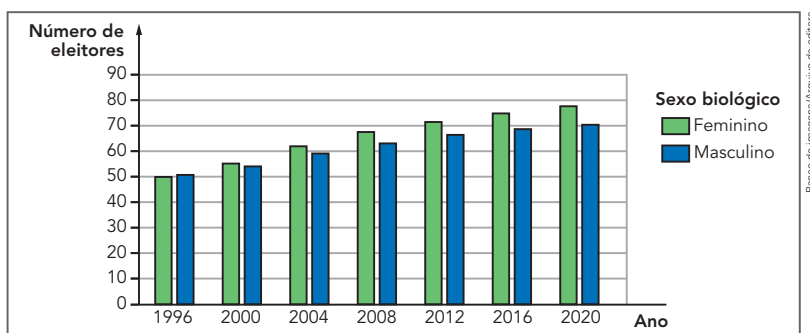
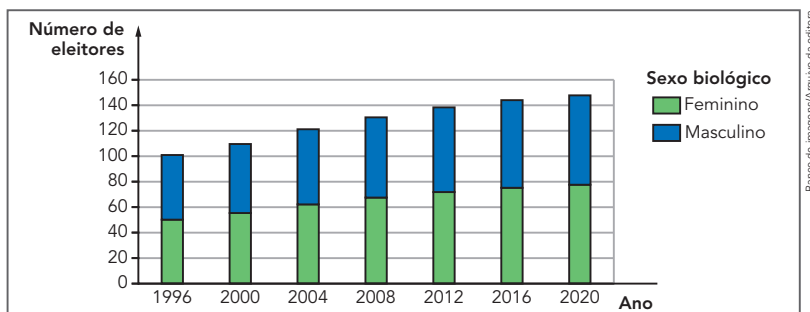
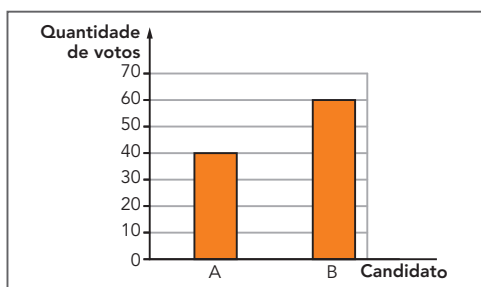



Gráfico II

Fonte dos dados dos gráficos: BRASIL. Tribunal Superior Eleitoral. *Estatísticas do eleitorado*. Brasília, DF: TSE, [20--?]. Disponível em: https://www.tse.jus.br/eleitor/estatisticas-de-eleitorado. Acesso em: 30 jul. 2021.

Na sua opinião, qual deles permite uma melhor comparação entre o número de mulheres e o de homens no eleitorado deste país? Resposta esperada: O gráfico I.

20. Dois candidatos, A e B, disputavam a eleição para prefeito em uma cidade. Em uma pesquisa realizada com os eleitores, sobre em que candidato pretendiam votar, o resultado foi o seguinte:

Resposta esperada: Faltam o título do gráfico e a fonte dos dados.

a) Você considera que essa representação gráfica comunica de maneira completa as informações sobre a pesquisa? Se não, quais informações estão faltando?

Orientações didáticas

Atividades

Promova um debate entre os estudantes sobre a importância da participação das mulheres na vida política do país, assim como da conscientização política dos próprios estudantes, que são jovens, e em breve poderão exercer seu direito ao voto.

Comente que o segundo tipo de gráfico apresentado na atividade **19** também é utilizado no cotidiano; porém, a visualização fica mais efetiva se as 2 categorias da mesma coluna tiverem uma grande diferença entre suas alturas.

A atividade **20** propõe uma interpretação de gráfico, também explorando o tema eleições. Nessa representação, faltam informações importantes como: o título do gráfico e a fonte dos dados. Destaque para a turma que utilizar erradamente a escala no eixo vertical pode prejudicar o candidato menos votado. Essa manipulação em um gráfico, às vezes, pode ser feita propositadamente, o que gera prejuízo visual, influenciando o leitor a acreditar em *fake news*.

Orientações didáticas

Atividades

A atividade **21** propõe a interpretação de gráficos reconstruídos a partir dos dados apresentados nos gráficos da atividade anterior. Aqui, os estudantes devem reconhecer em qual dos gráficos não existe um prejuízo visual para o candidato A, no tocante à representação de seu desempenho no resultado da pesquisa. Espera-se que os estudantes percebam que a proporção das dimensões das barras e dos setores dos gráficos são essenciais para que a informação seja corretamente representada.

A atividade **22** propõe a interpretação de um gráfico com informações sobre estudantes que concluíram algum dos cursos no Ensino Superior. Analise com os estudantes as informações contidas no gráfico e inicie uma discussão sobre os motivos pelos quais alguns estudantes não concluem seus cursos. Essa discussão favorece o trabalho com a competência **CEMAT02**, quando os estudantes desenvolvem a capacidade de produzir argumentos convincentes recorrendo à Matemática para compreender e atuar na sociedade.

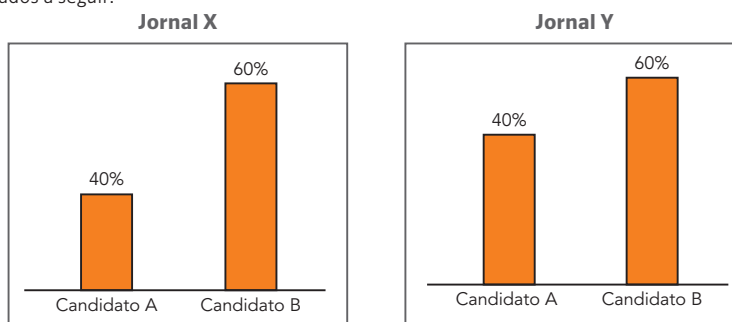
20. b) A medida da altura da primeira barra deveria ser $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ da medida da altura da segunda. No gráfico do jornal X essa razão é menor do que $\frac{2}{3}$; então o candidato B está sendo favorecido. No gráfico do jornal Y, essa razão é maior do que $\frac{2}{3}$; então o candidato A está sendo favorecido.

Faça as atividades no caderno.

b) Os jornais X e Y, ao divulgarem essa pesquisa, apresentaram gráficos com erros. Analise os gráficos divulgados a seguir.

Jornal X

Jornal Y

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

Levando em conta o impacto visual causado pelas alturas das colunas, um leitor menos atento pode ser induzido a erros sobre o resultado da pesquisa. Leitores mais atentos criticam os jornais alegando prejuízo visual que pode influenciar a opinião de eleitores indecisos.

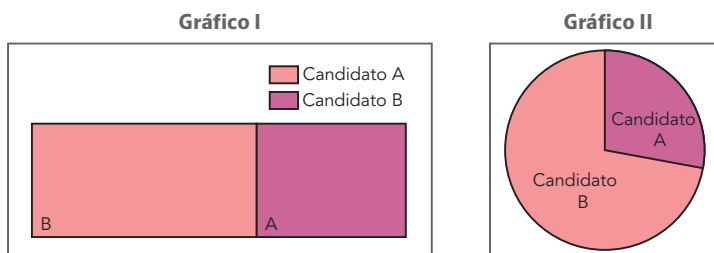
Comparando com o resultado real da pesquisa, que candidato está favorecido pelo visual do gráfico do jornal X? E do Y? Justifique.

21. Sobre a atividade anterior, na sua opinião haveria algum prejuízo visual para algum candidato caso os resultados fossem apresentados conforme algum gráfico a seguir?

No gráfico I, não haveria prejuízo visual se a legenda estivesse correta, pois as cores estão trocadas. Já no gráfico II, o candidato A tem prejuízo visual.

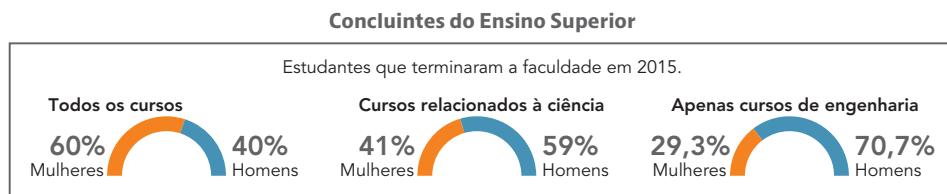
Gráfico I

Gráfico II

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

22. Analise o gráfico publicado por um jornal.

Concluintes do Ensino Superior

Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados: BRASIL. Ministério da Educação. *Resumo técnico – Censo da educação Superior 2015.* 2 ed. Brasília, DF: Inep/Deed, 2018. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_superior/censo_superior/resumo_tecnico/resumo_tecnico_censo_da_educacao_superior_2015.pdf. Acesso em: 2 maio 2022.

a) Sobre a construção desse gráfico, na sua opinião ele apresenta os dados com clareza? Se você tivesse de apresentar esses dados, escolheria outro tipo de gráfico? Qual? Respostas pessoais.

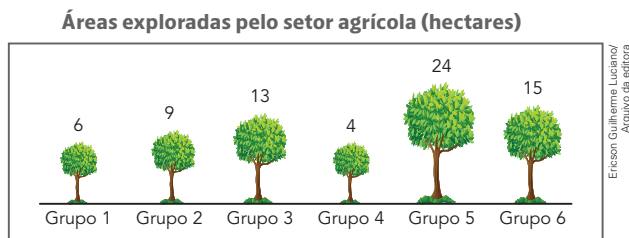
b) Converse com os colegas sobre ações que podem ser tomadas para aumentar a participação de mulheres nos cursos relacionados à ciência e aos cursos de engenharia. Respostas pessoais.

23. O pictograma a seguir representa uma comparação entre áreas exploradas no setor agrícola por diferentes grupos.

Áreas exploradas pelo setor agrícola (hectares)

6 9 13 4 24 15

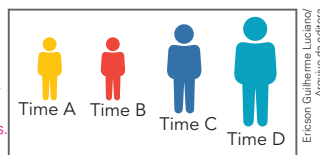
Grupo 1 Grupo 2 Grupo 3 Grupo 4 Grupo 5 Grupo 6

Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Dados elaborados para fins didáticos.

A comparação realizada no pictograma não apresenta precisão, pois ele não segue uma escala, e pode causar erro de interpretação do leitor.

Sobre essa representação, é possível uma comparação precisa entre os valores apresentados na forma de um pictograma?

24. O pictograma a seguir apresenta uma comparação entre as torcidas de 4 times de futebol de uma cidade.

Sobre o pictograma, responda.

a) Qual é o time com maior torcida? O time D é o que apresenta a maior torcida.

b) Qual é o time com menor torcida? Os times A e B parecem apresentar as menores torcidas, porém não é possível afirmar qual tem a menor torcida em valores absolutos.

c) É possível ter precisão sobre o tamanho das torcidas com o pictograma? Justifique.

Quantidade de torcedores de cada time

Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

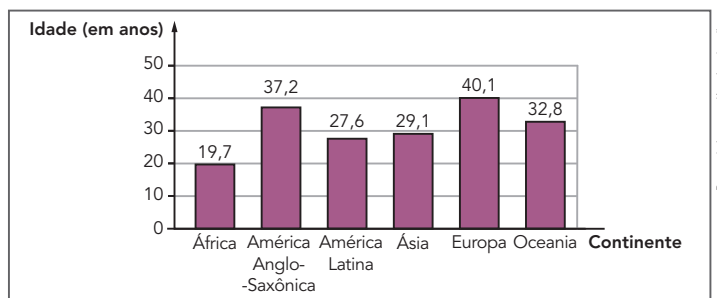
Dados elaborados para fins didáticos.

25. Em 2020, cerca de 64% da matriz elétrica brasileira correspondiam à energia hidráulica, e 9%, à energia eólica. Se esses dados forem representados em uma sequência de círculos e a energia eólica estiver representada por um círculo com medida do raio 3 cm, qual deve ser a medida do raio do círculo que representa a energia hidráulica? 8 cm

24. c) Não é possível ter precisão sobre a quantidade de torcedores de cada time, pois o pictograma não apresenta uma escala bem definida e pode induzir a erro quando comparamos as dimensões das figuras.

Média, mediana e moda

Idade mediana da população mundial – 2010

Banco de imagens/Arquivo da editora

Fonte dos dados: IBGE, Censo Demográfico 2010; e Urban agglomerations with 750,000 inhabitants or more in 2011. *In: World population prospects*: the 2010 revision. New York: United Nations, Dept. of Economic and Social Affairs, 2011. Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv64529_cap1.pdf. Acesso em: 6 abr. 2022.

A idade mediana é aquela que divide a população em 2 partes de igual tamanho, isto é, existem tantas pessoas com idades da mediana para cima como dela para baixo. A Europa, com 40,1 anos, e a América Anglo-Saxônica, com 37,2 anos, são as regiões com as maiores idades medianas, caracterizando estruturas etárias bastante envelhecidas. Por outro lado, a África, com 19,7 anos, possui uma população bastante jovem.

Orientações didáticas

Atividades

A atividade **23** propõe uma análise sobre a eficácia do gráfico do tipo pictograma em representar determinados dados. Espera-se que os estudantes percebam que esse tipo de gráfico não é adequado quando precisamos de informações mais precisas do ponto de vista quantitativo.

A atividade **24** propõe a interpretação de um gráfico do tipo pictograma. Espera-se que os estudantes percebam que esse tipo de gráfico permite responder questões qualitativas, porém não é adequado para responder questões quantitativas que demandem precisão.

A atividade **25** favorece o trabalho com o TCT *Educação Ambiental*. Promova uma discussão com os estudantes acerca da utilização de fontes de energia renováveis, além do impacto negativo gerado pelo uso de combustíveis fósseis ocasionando o aquecimento global e suas consequências para o futuro da humanidade.

Média, mediana e moda

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento das habilidades: **EF09MA22** e **EF09MA23**, ao propor a avaliação de medidas de tendência central de dados apresentados em tabelas e gráficos.

Os conceitos de média, mediana e moda, já estudados anteriormente, são agora retomados com o intuito de que essas medidas sejam avaliadas em pesquisas estatísticas.

Este tópico inicia com um exemplo de gráfico de colunas que traz a idade mediana da população mundial, apresentada em uma classificação dividida por continentes. Esse assunto pode render um debate acerca dos motivos pelos quais a África tem a menor mediana de idade entre os continentes, favorecendo o trabalho com diversidade social, histórica, política, econômica, demográfica e cultural de diferentes povos.

Orientações didáticas

Média

Na exposição do conceito de média, desenvolva o raciocínio matemático com os estudantes, refazendo todos os cálculos, e se necessário, criando novas situações para efetuar cálculos diferentes. Discuta com os estudantes a importância do cálculo da média para uma pesquisa estatística, destacando que essa medida mostra uma tendência central.

Mediana

Explique o conceito de mediana desenvolvendo o exemplo na lousa e, se necessário, crie outros para fixar bem o conceito. Espera-se que os estudantes compreendam a diferença entre média e mediana, entendendo que a mediana, ainda que seja uma grandeza de medida central, diferentemente da média, marca exatamente a posição central quando os dados estão em ordem monótona não decrescente.

Moda

Espera-se também que os estudantes compreendam que a moda demonstra o dado que mais apareceu em uma amostra experimental.

A média, a mediana e a moda são medidas estatísticas que estudamos no 8º ano. Elas são associadas a variáveis quantitativas.

Vamos recordá-las retomando o exemplo inicial do número de irmãos dos 25 estudantes de uma turma.

Número de irmãos dos estudantes

Número de irmãos	Frequência
0	2
1	8
2	11
3	2
4	1
5	1
Total	**25**

Dados elaborados para fins didáticos.

Média

É a média aritmética (M_a) do número de irmãos dos 25 estudantes observados:

$$M_a = \frac{0+0+1+1+1+1+1+1+1+1+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+2+3+3+4+5}{25}$$

É o mesmo que pensarmos na média ponderada do número de irmãos 0, 1, 2, 3, 4 e 5 tomando como peso de cada um desses números a frequência com que foi observado:

$$M_a = \frac{0 \cdot 2 + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 11 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1}{\underbrace{25}_{\text{soma dos pesos}}} = \frac{45}{25} = 1{,}8$$

A média do número de irmãos dos estudantes da turma é 1,8. Em média, cada estudante tem 1,8 irmão.

A média pode ser um número não observado na amostra (ninguém tem 1,8 irmão!). O que ela indica? Ela indica que, se os 45 irmãos estivessem divididos igualmente entre os 25 estudantes, cada um teria 1,8 irmão.

Mediana

Para obter a mediana, escrevemos os 25 valores observados, do menor para o maior, com todas as repetições (ordem monótona não decrescente):

$$\underbrace{0-0-1-1-1-1-1-1-1-1-2-2}_{12\text{ termos}} - \underset{\substack{\downarrow \\ \text{termo central}}}{2} - \underbrace{2-2-2-2-2-2-2-2-3-3-4-5}_{12\text{ termos}}$$

A mediana é o valor que fica na posição central.

A mediana do número de irmãos é 2.

O que representa a mediana? Ela divide ao meio os dados observados: metade deles tem valor igual ou menor do que a mediana, e metade tem valor igual ou maior do que ela.

Quando há uma quantidade par de dados observados, a mediana é a média aritmética dos 2 termos centrais. Por exemplo:

$$\underbrace{0-0-1-1-1}_{5\text{ termos}} - \underbrace{1-2}_{\text{termos centrais}} - \underbrace{2-2-3-4-6}_{5\text{ termos}}$$

A mediana nesse caso é: $\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$

Moda

É o valor observado com maior frequência, o que aparece mais vezes.

No exemplo, o número de irmãos que aparece mais vezes é 2, que foi observado 11 vezes. Portanto, nesse caso, a moda é 2 irmãos.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

26. Calcule a média, a mediana e a moda das notas dos estudantes da atividade **1** deste capítulo. 2,2; 2; 2.

27. Na atividade **3** qual é o salário médio dos funcionários? E o mediano? Qual é a moda? R$ 3.332,00; R$ 3.300,00; R$ 3.300,00.

28. Em distribuições de frequências por classes (ou intervalos), para obter a média consideramos os pontos médios das classes com as respectivas frequências. Copie e complete a tabela a seguir com os valores corretos de ponto médio e produto. Em seguida, calcule a medida de tempo médio gasto pelos estudantes na prova. As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual. 155 min

Medida de tempo de cada estudante na prova

Medida de tempo gasta (em min)	Ponto médio	Nº de estudantes	Produto
100 ⊢ 120	110	12	1 320
120 ⊢ 140	130	20	2 600
140 ⊢ 160		16	
160 ⊢ 180		14	
180 ⊢ 200		8	
200 ⊢ 220		6	
220 ⊢ 240		4	
Total		**80**	

Dados elaborados para fins didáticos.

29. No histograma sobre o tempo dos primeiros 40 maratonistas no tópico "Histograma", em que lugar devemos traçar uma reta vertical de modo a dividir a área total do histograma ao meio?
Na abscissa 137 min (a mediana da medida de tempo gasta determinada a partir do histograma, pois deixa 50% deles abaixo e 50% acima).

30. Retomando o gráfico da abertura desta Unidade, com os tipos de violação registrados em 2018 pelo *Disque 100*, responda:

a) Os mesmos dados poderiam ser divulgados em um gráfico de setores? Justifique. Não, pois as porcentagens ultrapassam 100%.

b) Qual foi a moda dos tipos de violação que ocorreram no período? Violação por negligência.

Dispersão de dados: amplitude

Uma média enganosa

A tira a seguir é de Mauricio de Sousa:

© Mauricio de Sousa/Mauricio de Sousa Editora Ltda.

SOUSA, Mauricio de. *Tira Turma da Mônica nº 7 440.* Banco de Imagens MSE – Mauricio de Sousa Editora Ltda.

Orientações didáticas

Atividades

As atividades **26** a **29** propõem cálculos de média, mediana e moda de exemplos anteriormente trabalhados na teoria e em algumas atividades. Na atividade **28**, em especial, oriente os estudantes a buscarem na atividade **5** as informações para completar a tabela.

Na atividade **30**, é necessário orientar os estudantes a buscar os dados na atividade de abertura da Unidade. Ajude-os a construir outros tipos de gráficos com as informações do gráfico original, se possível dividindo a turma em grupos e pedindo para que cada grupo faça um tipo diferente de gráfico.

Dispersão de dados: amplitude

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento das habilidades: **EF09MA22** e **EF09MA23**, ao propor a avaliação da amplitude como medida de dispersão de dados apresentados em tabelas e gráficos. O contexto da atividade **33** permite explorar o TCT *Trabalho*. O boxe *Participe* mobiliza com maior ênfase a **CEMAT05**, a **CEMAT07** e a **CEMAT08**, enquanto em *Na Olimpíada* mobiliza-se a **CEMAT02** e a **CEMAT03**.

Este tópico sugere a insuficiência que a média de uma amostra estatística tem em demonstrar com precisão os dados obtidos em uma pesquisa. Utilize os exemplos apresentados para enfatizar com os estudantes que 2 situações com médias iguais podem ter distribuições diferentes de dados. Explique, a partir desse ponto de vista, a importância de se conhecer a amplitude dos dados, ou seja, o intervalo entre o menor e o maior valor de uma amostra.

Orientações didáticas

Dispersão de dados: amplitude

O conceito de amplitude é trabalhado por meio de um exemplo real que retrata a altura do homem mais alto do mundo e do homem mais baixo do mundo (em 2014). Demonstre aos estudantes como o valor médio (1,528 m) entre as medidas das alturas desses 2 homens não é capaz de retratar a altura média das pessoas adultas do mundo, pois as alturas desses 2 homens estão muito afastadas da média. Então, a medida de dispersão amplitude retrata melhor a medida de altura de uma pessoa adulta (1,964 m). Enfatize o fato de que é necessário conhecer a média, a mediana e a moda para que a análise de um experimento estatístico tenha precisão adequada.

O assunto abordado no último gráfico pode render a retomada da discussão sobre a comparação do dado da África com os dados dos outros continentes.

Magali comeu 3 *pizzas*. Mônica e Cebolinha, nenhuma.

- Em média, quantas *pizzas* cada um comeu?
- Saíram todos satisfeitos da pizzaria?

Dividindo o número de *pizzas* pelo número de pessoas, 3, obtemos a média de 1 *pizza* por pessoa.

Se nos informarem que 3 pessoas saíram de uma pizzaria tendo comido, em média, 1 *pizza* cada uma, não devemos nos iludir achando que todas tenham saído satisfeitas. Que o digam a Mônica e o Cebolinha, não é?

A informação estatística da média, sozinha, não revela como variam os dados, como eles estão espalhados em torno dela. Analise este exemplo com as notas da Camila e do André em 5 disciplinas:

Notas de Camila

Matemática	Português	Ciências	História	Geografia
5	5,5	6	6,5	7
$M_a = 6$				

Notas de André

Matemática	Português	Ciências	História	Geografia
3	4	5	8	10
$M_a = 6$				

Dados elaborados para fins didáticos.

Pelas tabelas, notamos que ambos têm a mesma média. Porém, as notas da Camila são mais concentradas em torno da média, e as do André são mais espalhadas. Então, podemos dizer que a Camila tem um desempenho mais homogêneo.

Em Estatística, existem medidas para dar ideia de dispersão dos dados observados. A mais simples é a **amplitude** dos dados, que é a diferença entre o maior e o menor valor observado (como você já estudou ao trabalhar com distribuições de frequências por classes). Por exemplo, a amplitude das notas da Camila é: $7 - 5 = 2$. A das notas do André é $10 - 3 = 7$.

A foto mostra o encontro do turco Sultan Kosen (1982-), o homem mais alto do mundo (com 2,51 m), com o nepalês Chandra Bahadur Dangi (1939-2015), à época o mais baixo do mundo (com 54,6 cm), ocorrido em Londres, na Inglaterra, em 13 de novembro de 2014.

$$2{,}51 \text{ m} - 0{,}546 \text{ m} = 1{,}964 \text{ m}$$

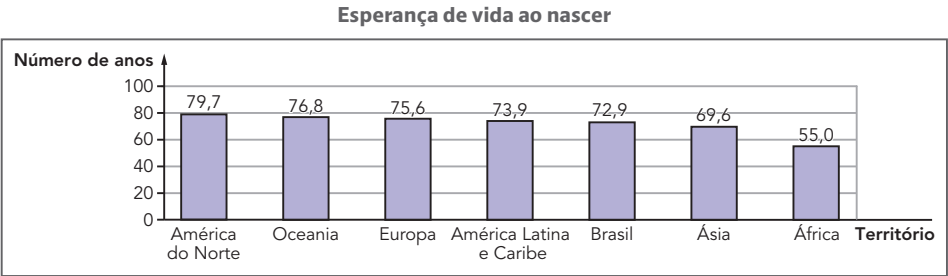
O que representa essa diferença?

A amplitude das medidas de altura (conhecidas) das pessoas adultas da Terra.

Andrew Cowie/AFP

Chandra e Sultan em Londres (Inglaterra). Foto de 2014.

O gráfico a seguir foi publicado pelo IBGE e baseia-se em dados de uma pesquisa da ONU. Nele está representado qual era a medida de tempo de vida médio, em anos, em várias regiões do mundo. Esse é um indicador muito utilizado para verificar o nível de desenvolvimento dos países. Europa e Oceania apresentam médias bem próximas uma da outra; para comparar esses continentes seria interessante conhecer outros dados.

Esperança de vida ao nascer

Fonte dos dados: World population prospects: the 2008 revision. *In*: ONU. *Population Division Population Database*. New York, 2010. Disponível em: https://biblioteca.ibge.gov.br/visualizacao/livros/liv45700.pdf. Acesso em: 6 abr. 2022.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

31. Qual é a amplitude das notas da atividade **7** deste capítulo? 7,0

32. As medidas da altura de 5 estudantes do 6º ano, em centímetros, são: 148, 152, 153, 153 e 154.

a) Calcule a média e a amplitude. 152 cm; 6 cm.

b) Se daqui a um ano todos crescerem exatamente 4 centímetros, qual será a nova média? E a nova amplitude? 156 cm; 6 cm.

33. Analise a tabela a seguir:

Tabela salarial – 2022 (em R$)

Nível superior	Menor valor	Maior valor	Média dos salários
Bibliotecário	3.744,90	5.940,46	3.930,88
Biomédico	2.533,35	4.018,60	2.659,16
Contador	4.062,52	6.444,28	4.264,26
Diretor de *marketing*	16.764,79	26.593,63	17.597,34

Fonte dos dados: TABELA Cargos e Salários 2022 – Piso salarial das profissões. *Salário*, São Paulo, [200–?]. Disponível em: https://www.salario.com.br/tabela-salarial/. Acesso em: 6 abr. 2022.

a) Em qual categoria de trabalhadores é maior a amplitude dos salários? Diretor de *marketing*.

b) Em quais categorias a média dos salários é menor do que a média do menor e do maior valor? Em todas as categorias.

Texto para a atividade **34**:

Quando ordenamos os dados de uma pesquisa quantitativa em uma sequência não decrescente, sabemos que a mediana é o valor central ou a média aritmética dos valores centrais, caso se tenha uma quantidade ímpar ou uma quantidade par de dados, respectivamente. Intuitivamente, a mediana divide a sequência dos dados ao meio. Os números que dividem a sequência dos dados em 4 partes iguais são chamados **quartis** e são numerados como Q_1, Q_2 e Q_3.

Q_1 deixa $\frac{1}{4}$ dos dados à esquerda e $\frac{3}{4}$ à direita.

Q_2 deixa $\frac{2}{4}$ dos dados à esquerda e $\frac{2}{4}$ à direita.

Q_3 deixa $\frac{3}{4}$ dos dados à esquerda e $\frac{1}{4}$ à direita.

Note que Q_2 é a mediana.

Assim como a amplitude dos dados, o comprimento do intervalo de Q_1 a Q_3, igual a $Q_3 - Q_1$, também é uma medida de dispersão, que chamamos de **intervalo interquartil**.

34. As notas de 31 estudantes de uma turma em uma prova de Matemática composta de 10 testes de múltipla escolha, cada um valendo 1 ponto, estão relacionadas a seguir:

2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 9, 9, 10

a) Determine os quartis dessa distribuição de notas. $Q_1 = 4$; $Q_2 = 5$ e $Q_3 = 7$.

b) Compare a média e a mediana das notas e responda: Qual é maior? Média: aproximadamente 5,45; mediana: 5; a média.

c) Calcule a amplitude desse conjunto de notas e o intervalo interquartil. 8 e 3.

Orientações didáticas

Atividades

Na atividade **32**, espera-se que os estudantes percebam que no item **b** a média sofrerá alteração, mas a amplitude será exatamente a mesma, uma vez que todos os dados serão igualmente alterados.

Na atividade **33** é apresentada uma tabela de salários. Espera-se que os estudantes percebam que a média isoladamente não mostra a precisão das informações. Proponha uma pesquisa acerca da média salarial de profissões escolhidas pelos próprios estudantes. Estimule um debate sobre as profissões do futuro e suas peculiaridades, favorecendo o TCT *Trabalho*, uma vez que o estudante é desafiado a conhecer o mundo do trabalho atual com suas remunerações, assim como entender o futuro das profissões, percebendo quão dinâmica é a variação de demandas do mercado de trabalho no tocante ao surgimento de novas profissões.

Para a atividade **34**, trabalhe o texto, explicando na lousa os conceitos de quartil e interquartil e utilizando outros exemplos se possível. Essa atividade desafia o estudante a fazer os cálculos de média, mediana e amplitude utilizando esses novos conceitos.

Orientações didáticas

Atividades

A atividade **35** propõe um estudo acerca da idade média da população de São Paulo classificada por faixa etária. Essa atividade também propõe a avaliação do grau de espalhamento dos dados em torno das medidas centrais por meio dos quartis e do intervalo interquartil.

Participe

Incentive que os estudantes realizem a prática de pesquisa proposta neste boxe em grupos de até 3 integrantes. Essa proposta mobiliza a **CEMAT05**, quando propõe a utilização de planilhas eletrônicas, e a **CEMAT08**, uma vez que a interação em grupo de maneira cooperativa no planejamento e desenvolvimento da pesquisa permite discussões respeitosas e aprendizados coletivos. O tema a ser escolhido, preferivelmente, deve ter relevância social na região da escola, para que favoreça também o trabalho com a **CEMAT07**.

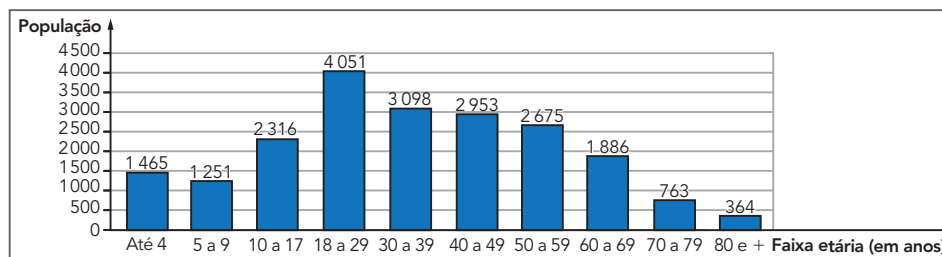
Na olimpíada

Esta questão favorece o desenvolvimento do raciocínio lógico e articula os campos da Matemática Aritmética e Estatística, mobilizando a **CEMAT02** e a **CEMAT03**.

Faça as atividades no caderno.

35. Em pesquisa realizada em 2017, apurou-se que a Região Metropolitana de São Paulo contabilizava 20,8 milhões de habitantes, que estavam distribuídos por faixa etária de acordo com o seguinte gráfico:

População (em milhares de habitantes) por faixa etária na Região Metropolitana de São Paulo – 2017

Banco de imagens/Arquivo da editora

A idade média da população correspondeu a 35 anos. Abaixo de ////// anos situavam-se 25% da população; abaixo de 34 anos, que correspondeu à mediana, 50%; e abaixo de 51 anos, 75% da população.

MOBILIDADE da população por faixas etárias na Região Metropolitana de São Paulo. [São Paulo]: DE/GPA/PAP/CPA, out. 2020. Disponível em: https://web.archive.org/web/20220403215420if_/https://www.metro.sp.gov.br/pesquisa-od/arquivos/Mobilidade_Faixas_Etarias.pdf. Acesso em: 9 abr. 2022.

a) Que número estava escrito em lugar de //////? Que medida estatística ele representa? 18; 1º quartil.

b) Calcule o intervalo interquartil das idades dos habitantes da região pesquisada. 33 anos.

Participe

Faça as atividades no caderno.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Prática de pesquisa

As planilhas eletrônicas são tabelas de cálculos que podem ser utilizadas para representar dados de uma pesquisa estatística, permitindo a construção de diferentes gráficos estatísticos.

Nesta atividade investigativa, você realizará uma pesquisa amostral. Para isso, siga a sequência didática proposta a seguir:

a) Escolha do tema
Escolha um tema de interesse social para ser investigado.

b) Escolha da amostra
Procure selecionar uma amostra casual simples, em que todos os elementos da população tenham a mesma probabilidade de ser sorteados para fazer parte dela. Por exemplo, se realizar uma pesquisa sobre os estudantes do 9º ano da escola, você pode fazer uma lista de chamada única para todas as turmas e sortear os números dos que comporão a amostra.

c) Coleta dos dados
Crie um questionário com perguntas sobre o tema escolhido, selecionando variáveis qualitativas ou quantitativas.

d) Organização dos dados
Com os questionários preenchidos, organize esses dados na forma de uma tabela, utilizando para isso uma planilha eletrônica. Após a organização dos dados, represente-os na forma de um gráfico adequado. Elabore um relatório para comunicar os resultados – ele deve conter sua avaliação das medidas de tendência central e da amplitude.

Resposta pessoal.

Na olimpíada

Faça as atividades no caderno.

Os números esquecidos

(Obmep) Luciano queria calcular a média aritmética dos números naturais de 1 a 15. Ao calcular a soma desses números, ele esqueceu de somar dois números consecutivos. Após dividir a soma dos treze números por 15, obteve 7 como resultado. Qual é o produto dos números que Luciano esqueceu de somar? Alternativa **b**.

a) 30 **b)** 56 **c)** 110 **d)** 182 **e)** 210

Educação financeira

Faça as atividades no caderno.

Quanto custa ter um carro?

Embora ter um carro seja o sonho de muita gente, antes de comprar um é preciso avaliar bem se o investimento compensa. As despesas decorrentes do uso, as taxas e os impostos, os tipos de financiamento, entre outros, são os assuntos desta seção. As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

I. Descubra ao menos 3 formas de adquirir um carro.

II. Quanto existe de imposto no preço de um carro novo?

III. Como funciona um consórcio para aquisição de um carro?

IV. Como é possível adquirir um carro financiado (com pagamento parcelado)?

V. Existem empresas que alugam carros, denominadas "locadoras". Como funciona a locação de um carro?

Tiago Donizete Leme/Arquivo da editora

VI. Quando alguém compra um carro, tem de pagar algumas taxas para poder utilizá-lo: IPVA, taxa de licenciamento, seguro obrigatório. Pesquise como é calculada cada uma dessas taxas e para que elas servem.

VII. Se alguém adquire um carro por meio de consórcio ou de um financiamento, pode optar por fazer um seguro para proteger-se contra roubo, incêndio ou acidente com o veículo. Pesquise como é feito o cálculo de valor do seguro de um carro.

VIII. Ao utilizar um carro, o dono tem de arcar com algumas despesas que variam de um mês para outro: combustível, manutenção, estacionamento, pedágios, lavagens, etc. Pesquise com algum proprietário de carro qual é o valor mensal dessas despesas.

1. Debata com os colegas as vantagens e as desvantagens de adquirir um carro por meio de consórcio. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

2. Debata com os colegas as vantagens e as desvantagens de adquirir um carro financiado. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

3. Após a realização da pesquisa sobre as despesas decorrentes do uso, as taxas e os impostos sobre um carro novo, construa uma tabela como a do modelo, em uma planilha eletrônica, sobre os custos para manter por 1 ano um carro novo no valor de R$ 40.000,00, supondo que ele tenha sido pago à vista e esteja segurado. Resposta pessoal.

Ao final, divida o valor total por 12 e descubra o custo mensal.

Custos para manter um carro novo

Despesa/ Imposto/Taxa	Valor (em R$)
Licenciamento	▨
IPVA	▨
Seguro	▨
Manutenção preventiva	▨
Gastos inesperados (manutenção, multas)	
Combustível	▨
Total	▨

4. Uma pessoa adquiriu um carro de R$ 40.000,00 por meio de um financiamento pagando 36 parcelas mensais de R$ 1.980,00. Quanto essa pessoa terá pago de juro ao quitar o financiamento? R$ 31.280,00

5. Supondo que essa mesma pessoa tivesse aplicado os R$ 40.000,00 em uma caderneta de poupança que rende 9% ao ano, a compra do carro "retirou" que valor da renda anual da família do comprador? R$ 43.600,00

Orientações didáticas

Educação financeira

Na BNCC

Esta seção favorece o desenvolvimento das habilidades: **EF09MA05**, ao realizar cálculos envolvendo porcentagem na resolução de problemas no contexto da educação financeira; e **EF09MA22**, ao propor a construção de tabela em um *software* de planilha eletrônica e o cálculo da média. Os debates sugeridos permitem o desenvolvimento de argumentos baseados em dados pesquisados em fontes confiáveis, mobilizando a **CG07**. A própria finalidade da seção favorece o TCT *Educação Financeira* e o assunto sobre o custo de um carro, o TCT *Educação para o Consumo*.

Esta seção propõe um estudo acerca dos custos gerados em média para se adquirir e manter um automóvel. Espera-se que os estudantes compreendam que a compra de um carro simplesmente pelo conforto pode não ser tão vantajoso, uma vez que outras opções de mobilidade são possíveis.

Os estudantes podem se dividir em grupos, em que cada um deve escolher um modelo de carro para realizar as etapas dessa atividade. Algumas informações devem ser pesquisadas. Oriente os estudantes a acessarem *sites* oficiais como: https://www.ipva.fazenda.sp.gov.br/ipvanet/valorvenal.aspx e https://veiculos.fipe.org.br/ (acessos em: 26 jun. 2022).

Orientações didáticas

Princípios da contagem

Na BNCC

Este capítulo favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA20**, ao propor o reconhecimento, em experimentos aleatórios, de eventos independentes e dependentes e o cálculo da probabilidade de ocorrência desses eventos. Mobiliza-se com maior ênfase a **CEMAT03** e a **CEMAT06**.

O tópico inicia com uma pergunta que deve permear todo o estudo das probabilidades: "De quantos modos?". Espera-se que os estudantes percebam a importância das probabilidades na capacidade de se fazer previsões matemáticas reais acerca de fenômenos naturais, tendências financeiras, tendências sociais de diversas ordens, etc.

Apesar de os estudantes já terem tido contato anterior com o princípio fundamental da contagem, apresente o exemplo do livro, permitindo que eles tentem chegar à conclusão antes de construir a árvore de possibilidades e de nomear esse princípio, também chamado de princípio multiplicativo. Permita que os estudantes expliquem como chegaram ao resultado expondo na lousa. Depois, construa a árvore para que façam as correções dos próprios cálculos se necessário.

Destaque a diferença entre o princípio aditivo (ou) e o princípio multiplicativo (e).

Contagem e Probabilidade

Princípios da contagem

De quantos modos?

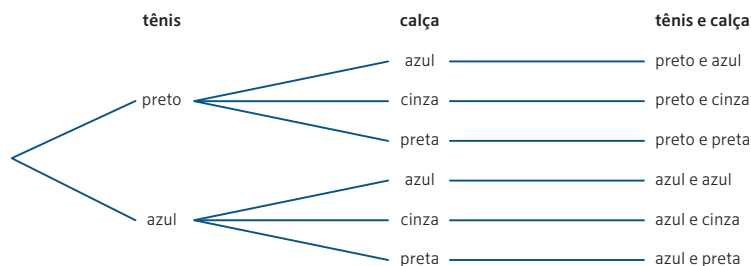
Para ir à festa de aniversário de uma colega, Marco está em dúvida sobre que roupa usar.

1. Ele já decidiu que usará uma das 4 camisas polo que possui ou uma das 8 camisetas. De quantos modos ele pode fazer essa escolha?

O número de possibilidades para escolher essa peça é:

$$4 + 8 = 12$$

2. Além disso, Marco já decidiu que vai usar uma calça e um par de tênis. Ele dispõe de 2 pares de tênis, um preto e um azul, e de 3 calças, uma azul, uma cinza e uma preta. De quantos modos ele pode escolher o conjunto de tênis e calça para ir à festa?

Ele tem 2 possibilidades de escolha do tênis e, para cada uma delas, 3 possibilidades de escolha da calça. Vamos montar uma **árvore de possibilidades**:

Portanto, são 6 os modos de escolher o tênis e a calça, nesta ordem: preto e azul, preto e cinza, preto e preta, azul e azul, azul e cinza, azul e preta.

Sem montar a árvore, como seria possível descobrir o total de possibilidades?

Como são 2 possibilidades de escolha do tênis e, para cada uma delas, 3 possibilidades de escolha da calça, o total de possibilidades de formar o par tênis-calça é:

$$2 \cdot 3 = 6$$

3. Se ele decidir que vai de camiseta, de quantos modos poderá escolher a vestimenta tênis-calça-camiseta?

Como o par tênis-calça pode ser escolhido de 6 modos e, para cada um deles, há 8 possibilidades para a escolha da camiseta, o total de possibilidades de formar o conjunto das 3 peças é:

$$6 \cdot 8 = 48$$

Note que o número de possibilidades de formar o conjunto tênis-calça-camiseta, dispondo de 2 pares de tênis, 3 calças e 8 camisetas, é:

$$2 \cdot 3 \cdot 8 = 48$$

Nos itens **2** e **3** tratamos de ações compostas de mais de uma etapa: escolha do tênis, escolha da calça, escolha da camiseta. Nesta situação utilizamos o **princípio fundamental da contagem**, estudado anteriormente.

> Se uma ação é composta de 2 etapas sucessivas, em que a primeira pode ser realizada de m modos distintos e, para cada um deles, a segunda pode ser realizada de n modos distintos, então o total de modos distintos de realizar a ação é $m \cdot n$.

Esse princípio pode ser estendido a ações compostas de mais de 2 etapas.

No item **1**, temos uma ação simples: escolha de uma peça, que pode ser a camisa polo ou a camiseta. Nesse caso, aplicamos o **princípio aditivo**.

> Se uma ação pode ser realizada de m modos distintos ou de n outros modos distintos, então a ação pode ser realizada de $m + n$ modos distintos.

O **princípio aditivo** é relacionado ao conectivo **ou** na descrição dos modos de ocorrência da ação, que é uma ação simples: Marco vai escolher uma camisa polo **ou** uma camiseta.

O princípio fundamental da contagem, ou **princípio multiplicativo**, é relacionado ao conectivo **e**, em uma ação composta: Marco vai escolher o tênis **e** a calça **e** a camiseta.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. Em uma sorveteria, podemos escolher uma taça de sorvete de fruta ou de sorvete cremoso. Há 6 sabores de sorvete de fruta e 8 sabores de sorvetes cremosos. Além disso, pode-se escolher entre uma cobertura de calda de chocolate ou de morango ou de caramelo.

a) De quantos modos pode ser escolhida a taça simples com 1 sabor de sorvete? 14 modos.

b) De quantos modos pode ser escolhida a taça com 1 sabor de sorvete cremoso e 1 cobertura? 24 modos.

c) De quantos modos pode ser escolhida a taça com 1 sabor de sorvete de fruta e outro cremoso? 48 modos.

d) De quantos modos pode ser escolhida a taça com 1 sabor de sorvete cremoso e 2 coberturas? 24 modos.

2. Para ir de São Paulo ao Rio de Janeiro há 5 companhias de viação aérea e 6 companhias rodoviárias.

a) De quantos modos podemos escolher uma companhia aérea ou rodoviária para viajar de São Paulo ao Rio de Janeiro? 11 modos.

b) De quantos modos podemos escolher uma companhia rodoviária para ir e uma aérea para voltar? 30 modos.

3. Em uma urna há 3 bolas idênticas, numeradas de 1 a 3. Retiram-se 2 bolas sucessivamente e os números são registrados formando um par ordenado (número da 1ª bola, número da 2ª bola).

Quantos pares podem ser formados se:

a) for uma extração com reposição (a primeira bola retirada é devolvida à urna antes da segunda extração)? 9 pares.

b) for uma extração sem reposição (a primeira bola retirada não é devolvida à urna)? 6 pares.

4. Jogando-se um dado 2 vezes, quantos pares ordenados (pontos do 1º lançamento, pontos do 2º lançamento) podem ser formados? 36 pares.

5. Em 3 lançamentos de uma moeda, quantas sequências de resultados podem ser formadas? 8 sequências.

Orientações didáticas

Atividades

As atividades **1** a **6** têm seus dados melhor visualizados por meio da árvore de possibilidades e as resoluções feitas pelo princípio multiplicativo, pois são situações-problema envolvendo contagem, com dados fictícios. Essas atividades favorecem o trabalho com a **CEMAT06**, uma vez que a Matemática é apresentada como ferramenta para solucionar situações imaginadas.

Especialmente na atividade **6**, encontramos uma proposta que articula Números e Geometria, mobilizando a **CEMAT03**. Os resultados encontrados nessa atividade poderão ser usados para ampliar o escopo do problema articulando também o tema Probabilidade, que será estudado em seguida.

Orientações didáticas

Probabilidade

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA20**, ao propor o cálculo da probabilidade de ocorrência de eventos em experimentos aleatórios. Mobiliza com maior ênfase a **CEMAT01**.

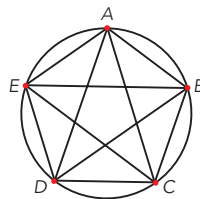
Este tópico traz, inicialmente, algumas informações históricas sobre a probabilidade matemática, os jogos de azar e a Estatística e, por isso, favorece o trabalho com a História da Matemática. Mobiliza, assim, a **CEMAT01**, uma vez que a Matemática é apresentada como um conhecimento historicamente construído para solucionar problemas da sociedade em diferentes momentos.

Experimento aleatório, espaço amostral e evento

Explique aos estudantes os conceitos de experimento aleatório, espaço amostral e evento utilizando os exemplos propostos, classificando cada um.

Neste tópico são utilizados 2 exemplos clássicos de experimento aleatório: lançamento de uma moeda cujas faces chamamos comumente de cara e coroa e de um dado de 6 faces. Esses exemplos servem para apresentar aos estudantes os conceitos de espaço amostral e evento.

Se possível, leve para a sala de aula um dado e uma moeda, e faça esses experimentos, solicitando aos estudantes que anotem os eventos que acontecerem nos lançamentos sucessivos. Faça quantos lançamentos achar necessário, registrando os resultados também na lousa. Após esse momento, explique os conceitos utilizando os próprios dados obtidos no experimento.

6. Com extremidades em 2 de 5 pontos escolhidos em uma circunferência, podemos traçar 10 segmentos de reta (cordas).

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Se forem 10 pontos, quantos serão os segmentos de reta? 45 segmentos de reta.

b) Para 120 segmentos de reta, quantos pontos são necessários? 16 pontos.

Probabilidade

Uma das primeiras publicações em que se falou em probabilidade matemática tratava de jogos de azar: um folheto intitulado *Sobre o raciocínio em jogos de dados*, de 1657. Um francês, conhecido como Chevalier de Méré, teria ganhado dinheiro apostando que, em 4 lançamentos de um dado, pelo menos uma vez ocorre o resultado "6 pontos". Leia mais sobre Probabilidade e jogos na seção *Na História* deste capítulo, em que é apresentado o texto "Cara ou coroa e Probabilidade". Nele consta o "problema dos pontos", de 1494.

Os jogos forneceram boas questões e discussões que propiciaram o desenvolvimento da teoria das probabilidades. A Estatística, importantíssima nos mais diversos ramos de atividade, apoia-se fortemente nessa teoria. Ao tomar uma decisão baseada em resultados de uma amostra, é por meio da teoria das probabilidades que se estabelece, por exemplo, o risco da decisão tomada.

Há algum tempo você tem se deparado com situações que envolvem noções de probabilidade. Vamos recordar alguns desses conceitos e apresentar outros.

Experimento aleatório, espaço amostral e evento

Jogando uma moeda para cima, sempre da mesma maneira, no mesmo lugar, deixando-a cair sobre uma superfície plana e registrando a face que fica voltada para cima após parar, não somos capazes de prever a cada lançamento qual será exatamente esse registro, se vai ser cara ou coroa.

Este é um exemplo de **experimento aleatório**.

Um experimento é dito aleatório quando, repetido em condições idênticas, pode apresentar resultados diferentes. A variabilidade do resultado deve-se ao que chamamos **acaso**.

Os resultados possíveis de um experimento aleatório formam um conjunto que chamamos **espaço amostral** do experimento. Cada subconjunto (ou parte) do espaço amostral é chamado de **evento**.

Por exemplo:

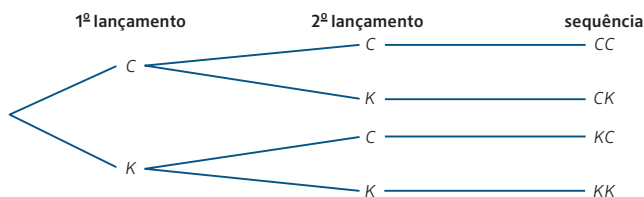
- No lançamento de uma moeda e registro da face superior, o espaço amostral é: $\{\text{cara, coroa}\}$.

  Representando cara por C, coroa por K e o espaço amostral por S, temos:

  $$S = \{C, K\}$$

  O conjunto $\{C\}$ é um evento. Dizemos que esse evento ocorre se o resultado do experimento for "cara".

- No lançamento de um dado de 6 faces, considerando o número de pontos indicado na face virada para cima, o espaço amostral é: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Esse espaço amostral tem 6 elementos; indicamos: $n(S) = 6$. O evento $A = \{2, 4, 6\}$ ocorre se o resultado for um número par de pontos; temos que $n(A) = 3$.

- Se uma moeda é lançada 2 vezes e registramos a sequência de resultados de cada lançamento, temos os seguintes resultados possíveis:

Portanto, o espaço amostral para esse experimento é:

$$S = \{CC, CK, KC, KK\}$$

O evento descrito por "ocorrer a face cara pelo menos uma vez" é $A = \{CC, CK, KC\}$.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

Para cada experimento aleatório das atividades **7** a **9**, responda quantos são os resultados possíveis, qual é o espaço amostral S e quais são os elementos dos eventos descritos.

7. Retirar uma bola de uma sacola não transparente que contém 10 bolas numeradas de 1 a 10 e registrar o número anotado na bola sorteada. $S = \{1, 2, 3, ..., 10\}$; 10 resultados possíveis.

Evento A: sair um número maior do que 8. $A = \{9, 10\}$

Evento B: sair um número primo. $B = \{2, 3, 5, 7\}$

8. Sortear um papel de um envelope que contém 7 papéis, em que foram anotados os dias da semana, e registrar o dia que foi sorteado. S = {domingo, segunda-feira, terça-feira, ..., sábado}; 7 resultados possíveis.

Evento A: sair um dia que comece pela letra **d**. A = {domingo}

9. Retirar, sem reposição, 2 bolas de uma urna que contém 4 bolas idênticas, numeradas de 1 a 4, e registrar a sequência de números observados.

$S = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), ..., (4, 3)\}$; 12 resultados possíveis.
$A = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$
$B = \{(1, 3), (3, 1)\}$
$C = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$
$D = \{(1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)\}$

Evento A: sair o número 4 em alguma das retiradas.

Evento B: sair apenas números ímpares.

Evento C: na segunda retirada sair um número maior do que na primeira.

Evento D: a soma dos números retirados é um número par.

Cálculo de probabilidade

Quando lançamos uma moeda construída de modo que a massa dela seja homogeneamente distribuída no espaço que ocupa, acreditamos que os resultados cara e coroa sejam equiprováveis (apresentam a mesma probabilidade de ocorrência). Nesse caso, dizemos que a moeda é **não viciada**.

Por serem 2 resultados possíveis, cada um deles tem probabilidade de ocorrer igual a $\frac{1}{2}$. Indicando por $P(C)$ a probabilidade de ocorrer cara e por $P(K)$ a de ocorrer coroa, temos: $P(C) = \frac{1}{2}$ e $P(K) = \frac{1}{2}$.

Em 2 lançamentos sucessivos de uma moeda não viciada, os 4 resultados possíveis são igualmente prováveis. A sequência CC é 1 resultado em 4 possíveis, logo tem probabilidade de ocorrer igual a $\frac{1}{4}$. O mesmo vale para as sequências CK, KC e KK:

$$P(CC) = \frac{1}{4} \qquad P(CK) = \frac{1}{4} \qquad P(KC) = \frac{1}{4} \qquad P(KK) = \frac{1}{4}$$

Orientações didáticas

Atividades

As atividades **7** a **9** são exercícios de aplicação, em que os estudantes devem identificar os resultados possíveis, e demonstrar o espaço amostral das situações propostas. Essas situações compreendem experimentos aleatórios imaginados, elaborados para fins didáticos.

Cálculo de probabilidade

Inicie este tópico explicando o que é um dado não viciado ou uma moeda não viciada; esses objetos precisam ter densidade uniforme, para que o potencial gravitacional não faça o dado ou a moeda cair sempre na mesma posição em função do centro de massa deslocado, do contrário, serão viciados.

Explique também que em uma moeda com cara e coroa, temos 2 possibilidades de resultado equiprováveis, ou seja, ambos os resultados têm a mesma chance de ocorrer, por isso, dizemos que suas probabilidades estão equiparadas. Depois dessa explicação, apresente o conceito com a linguagem matemática específica.

Orientações didáticas

Atividades

As atividades **10** a **17** apresentam experimentos aleatórios imaginados, em que o estudante deve calcular as probabilidades de determinadas ocorrências, assim como a soma de probabilidades. Oriente os estudantes a primeiro criar o conjunto do espaço amostral, para facilitar a compreensão dos detalhes do experimento, antes de se efetuar os cálculos das probabilidades.

Nas atividades **10** e **11** é estimulado o raciocínio lógico por analogia, ao solicitar o aproveitamento de informações prévias para realizar o solicitado.

Na atividade **15**, item **c**, o evento "cara no máximo uma vez" inclui estes resultados possíveis: $\{(\text{cara, coroa, coroa}), (\text{coroa, cara, coroa}), (\text{coroa, coroa, cara}), (\text{coroa, coroa, coroa})\}$. Os estudantes não podem se esquecer da opção de nenhuma cara nos 3 lançamentos.

Nesse experimento, a probabilidade de obter cara em pelo menos um dos lançamentos é a probabilidade de ocorrer o evento $A = \{CC, CK, KC\}$. Temos, portanto, 3 resultados desejados em um total de 4 possíveis e equiprováveis. A probabilidade de ocorrer o evento A é $\frac{3}{4}$. Indicamos $P(A) = \frac{3}{4}$. Essa probabilidade também pode ser expressa como número decimal, $P(A) = 0{,}75$, ou como taxa percentual, $P(A) = 75\%$.

Em um experimento aleatório com n resultados possíveis e equiprováveis:

- a probabilidade de ocorrer cada um dos resultados é $\frac{1}{n}$;
- a probabilidade de ocorrer um evento A, constituído de d resultados desejados, é: $P(A) = \frac{d}{n}$.

Atividades

11. $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{6}$; $P(C) = \frac{1}{2}$; $P(D) = \frac{1}{3}$.

Faça as atividades no caderno.

15. a) As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

10. Considerando as informações apresentadas na atividade **7**, calcule $P(A)$ e $P(B)$. $P(A) = \frac{1}{5}$; $P(B) = \frac{2}{5}$.

11. Considerando as informações apresentadas na atividade **9**, calcule $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ e $P(D)$.

12. Considere o experimento aleatório: "lançar um dado de 6 faces não viciado e registrar o número de pontos na face voltada para cima". Responda:

a) Qual é o espaço amostral? $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

b) Qual é a probabilidade de sair cada resultado possível? $\frac{1}{6}$

c) Qual é a soma das probabilidades de cada resultado possível? 1

d) Qual é a probabilidade de o dado mostrar um número de pontos maior do que 2? $\frac{2}{3}$

13. Considere o experimento aleatório: retirar uma bola de um saco não transparente que contém 20 bolas idênticas numeradas de 1 a 20 e registrar o número da bola sorteada. Responda:

a) Qual é a probabilidade de sair um número múltiplo de 3? $\frac{3}{10}$

b) Qual é a probabilidade de não sair um número primo? $\frac{3}{5}$

14. No experimento aleatório que consiste em sortear um papel de um envelope que contém 7 papéis idênticos, em que cada papel tem anotado um dia da semana, qual é a probabilidade de:

a) ser sorteado o domingo? $\frac{1}{7}$

b) ser sorteado um dia que começa pela letra **q**? $\frac{2}{7}$

15. Considere o experimento aleatório que consiste em lançar uma moeda não viciada 3 vezes e registrar a sequência de resultados de cada lançamento.

a) Faça a árvore de possibilidades e escreva o espaço amostral desse experimento.

b) Qual é a probabilidade de ser mostrada a mesma face nos 2 primeiros lançamentos? $\frac{1}{2}$

c) Qual é a probabilidade de ser mostrada a face cara no máximo uma vez? $\frac{1}{2}$

16. O setor de inspeção de qualidade de uma fábrica de lâmpadas fez um teste com um lote de 250 lâmpadas produzidas em certo dia e encontrou 4 lâmpadas defeituosas. Se for selecionada ao acaso uma lâmpada desse lote, qual é a probabilidade, em porcentagem, de ser selecionada uma lâmpada não defeituosa? 98,4%

17. Conforme você estudou em anos anteriores, em muitas situações, para atribuir uma probabilidade de ocorrência de um evento, utiliza-se a frequência relativa da ocorrência dele em uma quantidade consideravelmente grande de realizações do experimento.

Foi feita uma pesquisa em 300 edições de um jornal e verificou-se erro na primeira página em 12 dessas edições. Com esses dados, qual é a probabilidade atribuída à ocorrência de erro na primeira página desse jornal? Dê o valor em porcentagem. 4%

Propriedades da probabilidade

Considere o sorteio de um número natural de 1 a 10. Qual é a probabilidade:

a) de ser sorteado um número maior do que 12?

b) de ser sorteado um número menor do que 12?

Considerando que, nesse experimento, os resultados são igualmente prováveis, o espaço amostral será:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

Vamos verificar o que acontece em cada um dos casos:

a) Nesse espaço amostral não há número maior do que 12. Assim, pede-se a probabilidade de ocorrência de um evento sem elementos (conjunto vazio). Essa probabilidade é zero.

O **evento impossível** é representado pelo conjunto vazio ($\varnothing$) e tem probabilidade: $\boldsymbol{P(\varnothing) = 0}$.

b) Todos os resultados possíveis desse experimento são números menores do que 12. Assim, pede-se a probabilidade de ocorrência de um evento igual ao próprio espaço amostral. Essa probabilidade é 1 (ou 100%).

O espaço amostral é um evento chamado **evento certo** e tem probabilidade: $\boldsymbol{P(S) = 1}$.

A probabilidade em um experimento aleatório de espaço amostral $S = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ apresenta as seguintes propriedades:

- A probabilidade de ocorrer um evento impossível é 0:
$$P(\varnothing) = 0$$
- A probabilidade de ocorrer um evento certo é 1:
$$P(S) = 1$$
- Para todo evento A, a probabilidade de ocorrer A é um número que vai de 0 a 1:
$$0 \leq P(A) \leq 1$$
- A soma das probabilidades de cada resultado possível é 1:
$$P(a_1) + P(a_2) + P(a_3) + \ldots + P(a_n) = 1$$
- A probabilidade de um evento ocorrer é igual à soma das probabilidades dos resultados que o compõem.

Evento complementar

Considere um experimento que consiste no sorteio de um número natural de 1 a 50. Qual é a probabilidade de não sair um múltiplo de 15?

Nesse experimento, o espaço amostral é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 48, 49, 50\}$.

O evento formado pelos múltiplos de 15 é $A = \{15, 30, 45\}$.

O evento formado pelos números não múltiplos de 15 é chamado **evento complementar** de A, e o indicamos por $\overline{A}$. Como em S há 50 elementos e em A há 3 elementos, em $\overline{A}$ há $(50 - 3) = 47$; 47 elementos. Daí:

$$\overline{A} = \{1, 2, 3, \ldots, 14, 16, \ldots, 29, 31, \ldots, 44, 46, \ldots, 50\},\ n(\overline{A}) = 47 \text{ e } P(\overline{A}) = \frac{47}{50}.$$

A probabilidade de não sair um múltiplo de 15 é $\frac{47}{50}$.

Como $P(A) = \frac{3}{50}$ e $P(\overline{A}) = \frac{47}{50}$, segue que $P(A) + P(\overline{A}) = \frac{3}{50} + \frac{47}{50} = \frac{50}{50} = 1$. Logo, $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Como vimos anteriormente, essa relação é sempre verdadeira:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

Note que o evento $\overline{A}$ ocorre quando A não ocorre. Por isso, também dizemos que $\overline{A}$ é o evento **não A**.

A probabilidade de ocorrer o evento **não A** é 1 menos a probabilidade de ocorrer o evento A.

Orientações didáticas

Propriedades da probabilidade

Os estudantes do 9º ano estão prestes a iniciar a etapa do Ensino Médio. Dentro da nova etapa, eles estarão constantemente em contato com questões envolvendo porcentagem, principalmente nas ciências da natureza, em que eles deverão compreender a ideia do número 1 representando a totalidade de uma amostra experimental.

Explique aos estudantes os conceitos de evento impossível e evento certo, se possível criando algum exemplo prático, além do exemplo proposto. Eliminar as impossibilidades em uma pesquisa estatística que lide com um volume muito grande de dados pode ser importante para a economia de tempo. O conceito de evento impossível, portanto, é de grande valia para a pesquisa científica.

Evento complementar

Neste tópico é evidenciada a existência de eventos complementares – opções muito úteis na determinação da probabilidade de um evento, quando o complemento pode ser mais facilmente determinado.

Orientações didáticas

Atividades

As atividades **18** a **23** são propostas de aplicação das propriedades da probabilidade para calcular as chances de ocorrência de eventos em situações-problema do cotidiano. Oriente os estudantes a primeiro criarem o conjunto espaço amostral, assim como o conjunto de eventos complementares, para só então efetuar o cálculo da probabilidade pedido em cada situação. Espera-se que eles consigam desenvolver os cálculos de probabilidade, além de utilizar com segurança os conceitos de fração e razão.

Faça as atividades no caderno.

18. Um prêmio será sorteado entre os 32 estudantes de uma turma, dos quais 4 são canhotos. Qual é a probabilidade de que o prêmio saia para um estudante não canhoto? $\frac{7}{8}$

19. Em 3 lançamentos sucessivos de uma moeda não viciada, calcule a probabilidade de:

a) não ocorrerem 3 coroas; $\frac{7}{8}$

b) ocorrer cara em pelo menos um dos lançamentos. $\frac{7}{8}$

20. O serviço meteorológico anuncia a previsão do tempo para amanhã:

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Considerando verdadeiras as previsões, qual é a probabilidade de:

a) não chover na região Sul? 30%

b) não chover no Nordeste? 100%

21. O dono de uma lanchonete pesquisou por vários dias a clientela. Agora já sabe: 70% colocam mostarda no lanche, 50% colocam *ketchup* e 30% colocam ambos os molhos. Qual é a probabilidade de que um cliente, escolhido ao acaso, não coloque molho algum? E a de que coloque apenas um dos molhos? 10%; 60%.

22. Responda no caderno:

a) Um casal pretende ter 2 filhos. Admitindo probabilidades iguais para ambos os sexos, qual é a probabilidade de terem 2 meninas? $\frac{1}{4}$ (ou 25%)

b) Considerando todas as famílias de 4 pessoas – casal e 2 filhos –, qual é aproximadamente a porcentagem daquelas formadas por casal e 2 filhas? 25%

23. Um prêmio será sorteado entre os estudantes das 3 turmas do 9º ano.

Quantidade de estudantes do 9º ano

Sexo biológico \ Turma	9º A	9º B	9º C
Menino	15	18	17
Menina	22	20	23

Dados elaborados para fins didáticos.

Calcule a probabilidade de que o ganhador seja:

a) um estudante do 9º A, menino ou menina; $\frac{37}{115}$

b) um menino do 9º B; $\frac{18}{115}$

c) uma menina. $\frac{13}{23}$

Noções de probabilidade condicional e de independência

Leia atentamente os exemplos 1, 2 e 3 e os conceitos introduzidos a seguir:

Exemplo 1: No lançamento de um dado não viciado, sabe-se que saiu um número par de pontos.
Qual é a probabilidade de ter saído mais do que 3 pontos?

Nesse lançamento há 6 resultados possíveis equiprováveis: 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Com a informação de que saiu um número par de pontos, ficam reduzidos a 3 os resultados possíveis: 2, 4 ou 6 pontos.

Nesse caso, a probabilidade de ter saído mais de 3 pontos é a probabilidade de ter saído 4 ou 6 pontos, ou seja, temos 2 possibilidades em 3. Essa probabilidade é, portanto, $\frac{2}{3}$.

Esse é um exemplo de **probabilidade condicional**. Utilizamos a informação (ou condição) de que no lançamento do dado saiu um número par de pontos.

Para calcular uma probabilidade condicional, consideramos como resultados possíveis aqueles que satisfazem a condição dada sobre o resultado do experimento aleatório.

Vamos nomear os eventos de tais experimentos:

Espaço amostral: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Evento A: o resultado é um número par de pontos: $A = \{2, 4, 6\}$.

Evento B: o resultado é maior do que 3 pontos: $B = \{4, 5, 6\}$.

A probabilidade de ocorrer B, sem nenhuma outra informação, é:

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Com a informação de que o evento A ocorreu, a probabilidade de ocorrer B se torna $\frac{2}{3}$. Essa é a probabilidade condicional de ocorrer B tendo ocorrido A, que vamos indicar por $P(B|A)$; lemos: P de B dado A.

Há casos em que a informação de ter ocorrido um evento A não altera a probabilidade de ocorrer o evento B, isto é, a probabilidade condicional de ocorrer B tendo ocorrido A é igual à probabilidade de ocorrer B.

Exemplo 2: Em 2 lançamentos de um dado não viciado, qual é a probabilidade de obter 6 pontos no segundo lançamento sabendo que saiu 6 pontos no primeiro lançamento?

O espaço amostral do experimento é constituído pelos 36 pares ordenados igualmente prováveis:

$$\begin{matrix} (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6) \\ (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6) \\ (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6) \\ (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6) \\ (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6) \\ (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) \end{matrix}$$

Se no evento A sair 6 pontos no primeiro lançamento e no evento B sair 6 pontos no segundo lançamento, temos:

$$A = \{(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$$
$$B = \{(1, 6), (2, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6)\}$$

Sabendo que ocorreu o evento A, os resultados possíveis ficam reduzidos aos 6 pares de A. Nesse caso, para ocorrer B há um único resultado desejado: o par ordenado $(6, 6)$.

Orientações didáticas

Noção de probabilidade condicional e de independência

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA20**, ao propor o reconhecimento, em experimentos aleatórios, de eventos independentes e dependentes e o cálculo da probabilidade de ocorrência desses eventos.

O exemplo **1** é um experimento aleatório em que é explorado um evento condicionado a outro, ou seja, a ocorrência de um depende de ter ocorrido o outro. Já no exemplo **2**, os eventos são independentes, ou seja, eles ocorrem sem que haja interferência de um sobre o outro.

Desenvolva na lousa com os estudantes os exemplos, reforçando a diferença entre eventos dependentes e eventos independentes. Proponha aos estudantes que elaborem experimentos aleatórios criando exemplos desses tipos de eventos, escreva as ideias na lousa e permita uma discussão para analisar as relações de dependência e calcular as probabilidades.

Orientações didáticas

Multiplicação de probabilidades

Antes de apresentar a regra da multiplicação, desenvolva o exemplo **3** com os estudantes na lousa e demonstre que eventos quando condicionados, ou seja, dependentes entre si, podem ser calculados por meio da multiplicação da probabilidade do primeiro evento pela probabilidade do segundo evento tendo ocorrido o primeiro. Se julgar necessário, crie outro exemplo ou, então, desafie os estudantes a criarem um.

O cálculo para eventos independentes entre si deve ser considerado como uma situação especial da regra geral da probabilidade da intersecção de eventos, abordada no parágrafo anterior. Reforce a identificação entre a intersecção de eventos e o uso do conectivo "e" nos enunciados dos problemas.

Então, a probabilidade condicional de ocorrer B tendo ocorrido A é: $P(B \mid A) = \frac{1}{6}$. E a probabilidade de ocorrer B sem a informação da ocorrência de A é $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Portanto, a probabilidade de ocorrer B com ou sem a informação de que A tenha ocorrido é a mesma. Dizemos, por isso, que os eventos A e B são **eventos independentes**.

Dois eventos, A e B, são independentes quando a probabilidade condicional de ocorrer B tendo ocorrido A é igual à probabilidade de ocorrência de B, isto é, quando:

$$P(B \mid A) = P(B)$$

Quando 2 eventos não são independentes, dizemos que eles são **eventos dependentes**. É o caso do exemplo 1:

$$P(B \mid A) = \frac{2}{3} \text{ e } P(B) = \frac{1}{2}$$

Como $P(B \mid A) \neq P(B)$, A e B são eventos dependentes.

Multiplicação de probabilidades

Exemplo 3: No experimento do exemplo 2, qual é a probabilidade de obter 6 pontos em ambos os lançamentos?

A probabilidade de obter 6 pontos em cada lançamento é a probabilidade de ocorrer o par ordenado $(6, 6)$.

Portanto, temos 1 resultado desejado em 36 possíveis e equiprováveis, ou seja, a probabilidade é $\frac{1}{36}$.

Considerando os eventos A e B descritos no exemplo 2, a probabilidade de obter 6 em ambos os lançamentos é a probabilidade de que ambos os eventos, A e B, ocorram, o que vamos indicar por $P(A \cap B)$; lemos: "P de A e B". Então:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

Como $P(A) = \frac{1}{6}$ e $P(B) = \frac{1}{6}$, note nesse exemplo que:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(B)$$

A probabilidade de que ocorram 2 eventos independentes é igual ao produto das probabilidades de ocorrência de cada um deles.

Sendo A e B eventos independentes, temos:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

A regra geral conhecida como **regra da multiplicação** de probabilidades estabelece que:

A probabilidade de que ocorram 2 eventos, A e B, é igual à probabilidade de A multiplicada pela probabilidade condicional de B tendo ocorrido A:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$$

Essa regra decorre do conceito de probabilidade condicional. Por exemplo, note que, no experimento do exemplo 1, ocorrem ambos os eventos, *A* e *B*, se o resultado do lançamento for 4 ou 6, portanto são 2 resultados desejados em 6 possíveis e equiprováveis. Temos:

$$P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Por outro lado:

$$P(A) \cdot P(B \mid A) = \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Logo, nesse exemplo:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$$

Se *A* e *B* são independentes, temos $P(B \mid A) = P(B)$ e, então, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Experimentos independentes

Há situações em que podemos perceber, antes de calcular as probabilidades, que 2 eventos são independentes. Por exemplo, no experimento constituído por 2 lançamentos de um dado, cada lançamento pode ser considerado um experimento. O resultado do segundo lançamento não depende do resultado do primeiro, por isso dizemos que os 2 lançamentos são **experimentos independentes**.

Se um evento *A* está relacionado apenas ao primeiro lançamento e *B*, apenas ao segundo, os eventos *A* e *B* são independentes.

Outra situação comum de experimentos independentes é o modelo de retiradas de bolas de uma urna se forem retiradas com reposição, pois nesse caso, como a bola retirada é devolvida à urna antes da próxima retirada, o resultado de cada retirada não depende dos resultados das demais retiradas.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

24. No sorteio de um número natural de 1 a 20, sabe-se que saiu um número de 2 algarismos. Qual é a probabilidade de que tenha saído um múltiplo de 3? $\frac{3}{11}$

25. Em uma urna há 3 bolas vermelhas, 4 azuis e 5 pretas, idênticas a não ser pela cor. Duas bolas serão sorteadas, sem reposição. Calcule a probabilidade de sair:

a) bola azul na primeira retirada; $\frac{1}{3}$

b) bola azul na segunda retirada sabendo que saiu azul na primeira; $\frac{3}{11}$

c) bola azul em ambas as retiradas. $\frac{1}{11}$

26. Resolva os mesmos itens da atividade anterior supondo que há reposição das bolas. **a)** $\frac{1}{3}$; **b)** $\frac{1}{3}$; **c)** $\frac{1}{9}$.

27. Considere 2 lançamentos sucessivos de um dado não viciado. Calcule a probabilidade de sair um número maior do que 3 em ambos os lançamentos. $\frac{1}{4}$

28. Em uma urna há 3 bolas idênticas, de cores diferentes: uma branca, uma preta e uma vermelha. Duas bolas serão retiradas sucessivamente. Considere os eventos: *A*, sair a bola branca na primeira retirada; e *B*, sair a bola branca na segunda retirada.

Calcule $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$ nos casos:

a) retiradas com reposição; $P(A) = \frac{1}{3}$; $P(B) = \frac{1}{3}$; $P(A \cap B) = \frac{1}{9}$.

b) retiradas sem reposição. $P(A) = \frac{1}{3}$; $P(B) = \frac{1}{3}$; $P(A \cap B) = 0$.

Orientações didáticas

Experimentos independentes

Explique aos estudantes o conceito de experimentos independentes, demonstrando, se possível, o experimento dos dados em sala de aula. Enfatize que um condicionamento pode ser criado, mas que individualmente não existe relação entre o resultado do segundo lançamento e o do primeiro, ou seja, não existe influências mútuas entre os experimentos (lançamentos).

Para criar um exemplo antagônico, utilize o jogo de bingo, em que, ao sortear determinado número, entende-se que o mesmo número não poderá ser novamente sorteado, causando uma dependência entre os 2 eventos, uma vez que consideramos os 2 sorteios subsequentes como eventos distintos.

Atividades

As atividades requerem o conhecimento de eventos dependentes (atividades **24**, **25**, **28b**) e eventos independentes (atividades **26**, **27**, **28a**), nas quais o estudante deve primeiramente identificar o conjunto espaço amostral, assim como os conjuntos complementares, para só então efetuar os cálculos de probabilidades.

Nas atividades **27** e **28** deve ser aplicada a regra da multiplicação de probabilidades.

Na História

Na BNCC

Esta seção favorece o desenvolvimento da **CG01** e da **CEMAT01** e do TCT *Diversidade Cultural*, ao valorizar conhecimentos matemáticos construídos por pessoas de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos.

O texto apresenta informações sobre a história da probabilidade sob o ponto de vista cultural e até religioso. Leia o texto com os estudantes e promova um debate acerca de práticas atuais de adivinhação utilizando números, como: numerologia, cartas, búzios etc., tomando o devido cuidado para não ofender a crença de nenhum estudante. É importante que nesse debate fique bem clara a diferença entre previsões estatísticas utilizadas na ciência, baseadas em fatos, e a utilização dos números em processos de adivinhações, ou probabilidades não baseadas em fatos.

Cara ou coroa e Probabilidade

Curiosamente, quase todas as civilizações, em diferentes épocas, envolveram-se com algum tipo de jogo de dados. Além de servir de recreação para crianças e adultos (inclusive com apostas), é possível que, em algumas épocas, o jogo tivesse ligações com rituais religiosos.

De fato, como nos primeiros tempos nada era considerado aleatório (e até o formato irregular dos primeiros dados contribuía para isso), supunha-se que o resultado do lançamento de um ou mais dados dependia apenas da sorte ou de alguma interferência religiosa.

Bem, mas como eram os dados primitivos? Eram astrágalos (osso entre a perna e o pé), que em alguns animais, como o carneiro e a cabra, têm alguma semelhança com o cubo. Mas, por causa do formato, o astrágalo somente assenta em 4 das faces dele, 2 largas e 2 estreitas. Um jogo comum na Grécia Antiga era lançar simultaneamente 4 astrágalos, e o resultado que tinha valor maior era aquele em que os 4 astrágalos mostravam faces diferentes.

Com dados atuais, não viciados, a jogada análoga seria lançar 6 dados simultaneamente e cada um dos dados mostrar uma face diferente da dos outros.

Somente no Renascimento (séculos XV e XVI) os elementos iniciais do estudo da Probabilidade começaram a se formar, quando a noção de equiprobabilidade, ou seja, regularidade dos eventos aleatórios em condições ideais, superaria o determinismo de fundo religioso que permeava o pensamento até então, inclusive de um número muito grande de cientistas e acadêmicos da época. O primeiro livro razoavelmente bem fundamentado cientificamente sobre o assunto, *Liber de ludo aleae* (*Livro sobre os jogos de azar*), do médico e matemático Girolamo Cardano (1501-1576), foi escrito nesse período. De acordo com dados históricos, Cardano era um jogador muito assíduo.

Rodval Matias/Arquivo da editora

Ilustração do astrágalo de um carneiro.

Ilustração do astrágalo de um cão.

Bible Land Pictures/akg/Album/Fotoarena

Dados feitos de osso e pedra de um jogo das Antigas Roma e Grécia. O material foi descoberto no ano 1400.

Faça as atividades no caderno.

No entanto, entre as "questões incomuns" da obra *Summa de arithmetica, geometrica, proportioni e proportionalita (Conhecimentos de Aritmética, Geometria, proporção e proporcionalidade)*, de Luca Pacioli (c. 1445-1517), publicada em 1494, havia um problema que teria papel muito especial nas primeiras pesquisas sobre Probabilidade: o chamado "problema dos pontos", aqui enunciado em uma versão simplificada e atualizada:

"Dois irmãos gêmeos, Aldo e Bruno, decidiram apostar figurinhas da Copa do Mundo. Começam um jogo de 'cara ou coroa' com uma moeda não viciada, estabelecidas as seguintes regras: I – os 2 se alternarão no lançamento da moeda; II – o jogador que obtiver coroa no lançamento ganha 1 ponto, mas, se obtiver cara, o adversário é quem ganha 1 ponto; III – ganhará o jogo aquele que fizer 3 pontos primeiro; IV – cada um aposta 10 figurinhas. O jogo foi interrompido quando Aldo estava com 2 pontos e Bruno com 1, e era a vez de Aldo lançar a moeda. Então, como dividir as apostas equitativamente?".

drawhunter/Shutterstock

Ilustração artística de Girolamo Cardano.

Cardano descobriu que a resolução dada por Pacioli ao problema proposto na época estava errada. (De acordo com a solução de Pacioli, Aldo deveria ficar com o dobro de figurinhas com que ficaria Bruno.) Mas a solução alternativa proposta por Cardano também estava errada.

No século XVII, alguns problemas envolvendo a probabilidade de ganho em jogos de azar foram propostos ao matemático Blaise Pascal (1623-1662), entre os quais o problema dos pontos. Tão entusiasmado ficou Pascal com as questões que iniciou uma rica correspondência com o compatriota Pierre de Fermat (1601-1665) sobre elas, na qual ambos resolveram o problema dos pontos acertadamente, cada um à sua maneira. E foram além, ao resolverem generalizações do problema e estenderem as pesquisas a outros jogos de azar. Baseando-se nessa correspondência, o físico e matemático holandês Christiaan Huygens (1629-1695) escreveu em 1657 *De ratiociniis in aleae ludo* (*Sobre o raciocínio em jogos de azar*), o primeiro tratado formal sobre Probabilidade.

Marusya Chaika/Shutterstock

Ilustração artística de Blaise Pascal.

Fonte dos dados: VIEIRA, Sonia. *Estatística básica*. São Paulo: Cengage Learning, 2018; LIMA, E. L. *et al. A Matemática do Ensino Médio*. Rio de Janeiro: SBM, 1998. v. 2; MORGADO, A. C. *et al. Análise combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro: SBM, 1991.

- Nos itens a seguir, copie no caderno e complete as frases substituindo ////////// pelas informações corretas.
  - **a)** Se o jogo tivesse prosseguido e, no lançamento da moeda, Aldo tivesse obtido coroa, ele ficaria com ////////// ponto(s) e, portanto, Bruno com ////////// ponto(s). Logo, a divisão das apostas seria: //////////. 3; 1; 20 e 0.
  - **b)** Mas, se Aldo tivesse obtido cara, ele ficaria com ////////// pontos e Bruno ficaria com ////////// pontos. Logo, a divisão seria //////////. 2; 2; 10 e 10.
  - **c)** Assim, pode-se concluir que, quando da interrupção do jogo, Aldo já fizera jus a ////////// figurinhas. 10
  - **d)** Mas, se o jogo prosseguisse, quando Aldo lançasse a moeda, a probabilidade de sair cara ou coroa é a mesma, portanto o restante das apostas (10 figurinhas) deveria ser dividido igualmente, da seguinte maneira: //////////. 5 e 5.
  - **e)** Logo, a divisão das apostas, ao ser interrompido o jogo, deve ser a seguinte: Aldo → ////////// figurinhas; Bruno → ////////// figurinhas. 15; 5.

Orientações didáticas

Na História

Esse texto traz a versão atualizada de um problema antigo chamado "problema dos pontos". Desenvolva o raciocínio do jogo entre os irmãos Aldo e Bruno junto com os estudantes. Se possível, crie um jogo com os estudantes para que eles possam calcular as probabilidades das jogadas e dos resultados, utilizando dados, moedas ou então sorteadores digitais, amplamente disponíveis na internet.

O restante do texto deve ser explorado para esclarecer que conquistas científicas são fruto do trabalho de muitas pessoas, durante muitos anos. Desenvolva estratégias de leitura que ajudem os estudantes a realizar inferências e a argumentar. Uma possibilidade é elaborar esquemas para relacionar fatos, datas e personagens citados no texto.

Orientações didáticas

Na mídia

Na BNCC

Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Ciência e Tecnologia*, ao abordar a criação de senhas seguras amplamente utilizadas em serviços apoiados por tecnologia digital.

O texto apresenta uma questão atual e importante: a segurança no ciberespaço ou ambiente virtual que inclui, por exemplo, a internet e os celulares. Explore o texto com os estudantes e proponha uma pesquisa na internet sobre como é feita a criptografia das senhas nos diversos serviços digitais que usamos.

A atividade **1** requer interpretação do texto.

As atividades **2** e **3** envolvem princípios da contagem e permitem desenvolver o raciocínio lógico, o pensamento computacional e a cultura digital tão presente no cotidiano dos estudantes.

Promova um debate acerca do futuro da segurança na internet, em função do surgimento de novas tecnologias, principalmente a computação quântica e a unidade quântica de armazenamento de informação (*qubit* ou *bit* quântico) oriundas do conceito físico da sobreposição quântica. Oriente os estudantes a pesquisarem sobre o assunto em canais do YouTube que tenham seriedade na transmissão de conteúdos científicos, explicitando o cuidado para que não absorvam informação de canais sensacionalistas ou conspiracionistas. Essa pesquisa pode favorecer o trabalho com a questão das *fake news* e do negacionismo científico, além de promover o entendimento de que as ciências dito puras geram aplicações práticas por mais teóricos que sejam seus escopos de pesquisa.

Faça as atividades no caderno.

Senhas seguras

1. As novas recomendações para criação de senha são a utilização de uma sentença com mais palavras que façam sentido ao usuário e que não sejam diretamente ligadas a ele. A modificação do modelo de "senha segura" se deve à constatação de que frases como as recomendadas no texto demorariam muito mais tempo para serem quebradas por um *hacker*.

Guia de como criar e manter uma boa senha

Por mais incômodo que possa ser a utilização de senhas, essa é ainda a forma mais utilizada de autenticação, para garantir que apenas pessoas autorizadas possam acessar serviços tais como os oferecidos [...] por bancos, servidores de *e-mails*, etc. Escolher uma boa senha e usar as já conhecidas boas práticas no seu uso, é fundamental nesse processo.

[...]

O que NÃO fazer ao se criar uma senha

[...]

- NÃO use o nome da sua conta [...]
- NÃO use nada relacionado a quaisquer dados pessoais [...]
- NÃO use nomes próprios [...]
- NÃO use sequências de caracteres triviais de serem decifradas [...]
- NÃO use nenhum nome ou termo que esteja em algum dicionário [...]
- EVITE modificar palavras **apenas** substituindo "i" por "1", "o" por "0", "e" por "3", etc. [...]

UFRGS. Time de resposta a incidentes de segurança. *Guia de como criar e manter uma boa senha*. Disponível em: http://www.ufrgs.br/tri/Documentos/guia-de-como-criar-e-manter-uma-boa-senha. Acesso em: 20 abr. 2022.

Criador de regras seguras para senhas se arrepende de dicas pouco práticas

Você já ouviu falar das regras básicas para ter uma senha segura: alternar letras maiúsculas e minúsculas, usar caracteres esquisitos e não se esquecer de incluir números. No entanto, o responsável por ter criado essas dicas se arrepende de ter estabelecido diretivas tão pouco práticas para os usuários.

A pessoa em questão é o norte-americano Bill Burr, 72, que trabalhava no Nist (Instituto Nacional de Padrões e Tecnologia, um órgão de padronização dos EUA).

Em 2003, ele foi incumbido de escrever regras para criação de senhas [...].

Para exemplificar seu arrependimento, ele cita a necessidade de se trocar a senha a cada três meses. No fim das contas, as pessoas acabam fazendo poucas alterações, o que não dificulta muito o trabalho de cibercriminosos. Para ele parte dos conselhos acabaram sendo usados de forma incorreta.

Novas regras

O próprio Nist, em suas novas diretivas, deixou as duas políticas citadas acima de lado. Agora, o órgão estadunidense só recomenda troca de senhas em caso de suspeita de invasão de sistema e não é mais compulsório ter caracteres especiais.

Em vez disso, é aconselhável usar uma sentença com mais palavras (quatro, por exemplo) e que seja fácil de lembrar. Inclusive, a entidade sugere o uso de espaço ou hifens no lugar de caracteres especiais.

CRIADOR de regras seguras para senhas se arrepende de dicas pouco práticas. *Tilt UOL*, São Paulo, 9 ago. 2017. Disponível em: https://www.uol.com.br/tilt/noticias/redacao/2017/08/08/criador-de-regras-para-senhas-virtuais-se-arrepende-de-dicas-pouco-praticas.htm. Acesso em: 20 abr. 2022.

1. De acordo com o texto, as "senhas seguras" eram aquelas em que o usuário utilizava letras, números e caracteres especiais. Entretanto, esse conceito de recomendação foi modificado. Qual é a nova recomendação e por que o modelo se modificou?
2. Carolina escolheu uma senha de 5 caracteres, em determinada ordem e sem repetição, para efetuar o cadastro de acesso em um *site*. Com o tempo, esqueceu a ordem em que eles foram digitados. Qual é o número máximo de tentativas que ela terá de fazer até obter acesso ao *site*, considerando que no *site* não há limite do número de tentativas? 120 tentativas.
3. De quantos modos uma pessoa pode definir uma senha para bloqueio de celular composta de 6 algarismos escolhidos entre os algarismos de 0 até 9? 1 000 000 de senhas possíveis.

Rawpixel.com/Shutterstock

Criar e manter uma boa senha é importante para tentar garantir a inviolabilidade.

Proposta para o professor

Este vídeo traz informações sobre a história, as aplicações, o funcionamento e as partes principais de um computador quântico.

BÓSON Treinamentos. O que é um Computador Quântico – Conceitos e Funcionamento. *YouTube*. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=s9MyPVujd7E. Acesso em: 26 jun. 2022.

Na Unidade

Faça as atividades no caderno.

Enunciado referente às atividades **1** e **2**:

Foi perguntado a cada estudante quantas horas por dia assiste à TV. Com as respostas, elaborou-se o seguinte gráfico:

Horas de TV por dia

Dados elaborados para fins didáticos.

1. Quantos estudantes participaram da pesquisa? Alternativa **d**.

a) 5 b) 12 c) 16 d) 20

2. Em média, quantas horas por dia cada estudante assiste à TV? Alternativa **c**.

a) 2,75 b) 2,85 c) 2,95 d) 3,05

3. **(Enem)** O resultado de uma pesquisa eleitoral, sobre a preferência dos eleitores em relação a dois candidatos, foi representado por meio do Gráfico **1**.

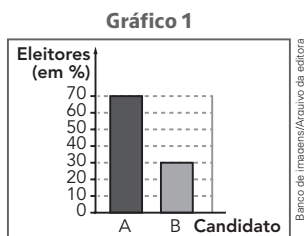



Gráfico 1

Ao ser divulgado esse resultado em jornal, o Gráfico **1** foi cortado durante a diagramação, como mostra o Gráfico **2**.

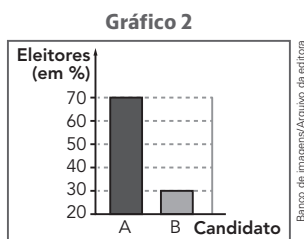



Gráfico 2

Apesar de os valores apresentados estarem corretos e a largura das colunas ser a mesma, muitos leitores criticaram o formato do Gráfico **2** impresso no jornal, alegando que houve prejuízo visual para o candidato **B**. A diferença entre as razões das medidas de altura da coluna **B** pela coluna **A** nos gráficos 1 e 2 é: Alternativa **e**.

a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{2}{15}$ e) $\frac{8}{35}$

4. O número de erros na primeira página de um jornal diário de grande circulação, em 200 dias pesquisados, está na tabela a seguir.

Número de erros na primeira página

Número de erros	Número de dias
0	170 85%
1	18 9%
2	10 5%
3	2 1%

Dados elaborados para fins didáticos.

a) Refaça a tabela no caderno acrescentando as frequências relativas. **b)** A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

b) Represente os dados em um gráfico de setores.

5. **(Fuvest-SP)** Cada uma das cinco listas dadas é a relação de notas obtidas por seis alunos de uma turma em uma certa prova. Assinale a única lista na qual a média das notas é maior do que a mediana. Alternativa **d**.

a) 5, 5, 7, 8, 9, 10

b) 4, 5, 6, 7, 8, 8

c) 4, 5, 6, 7, 8, 9

d) 5, 5, 5, 7, 7, 9

e) 5, 5, 10, 10, 10, 10

6. **(Saresp)** A lanchonete "Nada de Fome" está fazendo uma promoção na qual o cliente monta seu pedido escolhendo um dos lanches e uma das bebidas descritas a seguir.

Lanches	Bebidas
X-salada X-egg X-*bacon* X-frango X-tudo	Suco de laranja Suco de limão Refri em lata *Milkshake*

Considerando o cardápio da promoção, quantos pedidos diferentes podem ser formados? Alternativa **d**.

a) 4 b) 5 c) 9 d) 20

7. **(Unicamp)** Uma moeda balanceada é lançada quatro vezes, obtendo-se cara exatamente três vezes. A probabilidade de que as caras tenham saído consecutivamente é igual a: Alternativa **c**.

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{3}{8}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{4}$

Na atividade **3**, o estudante deve perceber a diferença de interpretação causada pela má construção do gráfico, entendendo a importância dos elementos gráficos em uma pesquisa estatística. Erros nessa atividade indicam dificuldade de leitura de gráficos e/ou na montagem das frações com a ideia de razão. Os estudantes devem perceber que precisam estabelecer as razões baseadas na altura das colunas, considerando cada intervalo do eixo vertical como a unidade de medida, em ambos os gráficos.

Erros na atividade **4** indicam que os estudantes não compreenderam o conceito de frequência relativa e como calculá-la. Retome o exemplo do início do capítulo **12**, no qual foi apresentada uma tabela com frequências relativas. Se a dificuldade for na construção do gráfico de setores, retome o tópico "Variáveis discretas" e construa com os estudantes o gráfico pedido nesta atividade, fazendo, passo a passo, o cálculo da medida do ângulo central de cada setor.

A atividade **5** propõe a comparação entre a média e a mediana dos dados. Os estudantes devem perceber a diferença entre essas medidas de tendência central, como elas ilustram uma situação sob diferentes pontos de vista, no tocante à distribuição das frequências e a amplitude da amostra.

Se houver dificuldades na atividade **6**, sugira aos estudantes que organizem os dados em uma árvore de possibilidades, e depois apliquem o princípio multiplicativo de contagem para encontrar a resposta.

Se houver dificuldades na atividade **7**, oriente os estudantes a primeiro elencar todas as possibilidades de sequência de 3 caras e 1 coroa, para depois calcular a probabilidade pedida.

Outras dificuldades diferentes das listadas podem surgir; por isso, é importante o monitoramento individual e contínuo dos estudantes.

Orientações didáticas

Na Unidade

Na BNCC

Essa seção favorece o desenvolvimento das habilidades exploradas ao longo de toda a Unidade e mobiliza com maior ênfase a **CEMAT02**, a **CEMAT06** e a **CG02,** ao propor a resolução de atividades diversas por meio de diferentes contextos e estratégias de resolução.

Esta seção traz atividades dos principais conteúdos abordados na Unidade que podem ser utilizadas como ferramentas de avaliação. Proponha a resolução das atividades individualmente. Acompanhe os estudantes durante a realização delas e registre avanços e dificuldades para, ao final, propor novas atividades para remediação coletiva ou individual de defasagens, conforme cada caso.

A seguir, listamos algumas sugestões e estratégias para remediação.

As atividades **1** e **2** propõem a interpretação de um gráfico de colunas e o cálculo da média. Caso os estudantes tenham dificuldades nessas atividades, retome os elementos desse tipo de gráfico e como calcular a média considerando os dados apresentados pelo gráfico.

Orientações didáticas

Abertura

Na BNCC

Esta abertura favorece o desenvolvimento do TCT *Educação Ambiental*, por discutir a importância das abelhas para o mundo. As questões propostas mobilizam com maior ênfase a **CG02**.

A abertura da Unidade permite mobilizar com maior ênfase a **CG02**, ao abordar como as abelhas constroem as colmeias e como os seres humanos, ao observar esses animais, utilizam seus modelos em obras de arquitetura e de arte. Chame a atenção dos estudantes para a composição hexagonal dos alvéolos da colmeia e questione em que outros elementos da natureza eles observam regularidade e padrão de formas.

Ao explorar a abertura da Unidade, peça aos estudantes que analisem a imagem apresentada antes de ler o texto. Pergunte a eles: “O que vocês acham que essa imagem significa?”. Permita que eles respondam usando as próprias palavras e dê espaço para que debatam, caso haja diferentes pontos de vista. Em seguida, solicite a eles que façam a leitura do texto e questione: “Como o texto e a imagem se relacionam?”. Incentive a participação oral de todos.

Espera-se que os estudantes percebam que tanto o texto quanto a imagem têm como temática o trabalho regular e padronizado das abelhas na construção da colmeia. Comente que há várias espécies de abelhas que seguem esse padrão, que é fruto da evolução natural desses animais. Enfatize que a composição das colmeias inspira vários profissionais a utilizá-la em obras de engenharia e arquitetura e em obras de arte, como o artista gráfico Maurits Cornelis Escher (1898-1972). Essa introdução favorece a interdisciplinaridade, uma vez que a exposição pode ser trabalhada em conjunto com o professor de **Biologia** e o de **Arte**. Além disso, a abertura incentiva o desenvolvimento do TCT *Educação Ambiental*, visto que a importância das abelhas para o ecossistema deve ser explorada pelo professor em conjunto com os estudantes. Esses animais também são bons exemplos de organização e trabalho coletivo, hierarquia, convivência, etc.

Reprodução do Livro do Estudante em tamanho reduzido.

Proposta para o estudante

Caso os estudantes se interessem, indique a eles a consulta ao *site* oficial do artista (Disponível em: https://mcescher.com/gallery/. Acesso em: 26 jun. 2022.), que permite a visualização de diversas obras em que Escher utilizou a técnica do ladrilhamento.

O que seria de nós sem as abelhas?

Você já imaginou um mundo sem abelhas? Talvez você esteja pensando que não seria muito diferente, mas a realidade é que sem elas possivelmente teríamos graves problemas de falta de comida.

Na natureza, as abelhas são uma das principais responsáveis pela polinização, que consiste no transporte do pólen, que contém o gameta masculino da planta, até a parte feminina dela, que contém o gameta feminino. Isso significa que sem as abelhas as plantas dificilmente iriam se reproduzir, e a quantidade de frutos e outras partes vegetais iria reduzir significativamente. Essa redução certamente afetaria a cadeia alimentar, já que muitos animais se alimentam de vegetais, o que prejudicaria, além da agricultura, a pecuária.

Cerca de 80% das culturas mundiais são polinizadas por abelhas, o que indica que elas são responsáveis não apenas pelos alimentos, mas pela preservação dos ecossistemas. Preservá-las se tornou mais do que uma obrigação, e podemos fazer isso de diversas maneiras: combatendo o aquecimento global, já que são muito sensíveis a alterações climáticas; limitando o uso de pesticidas; ou diversificando as plantações.

Outra curiosidade das abelhas é que elas produzem as colmeias justapondo alvéolos de formato parecido com prismas regulares de base hexagonal, e isso lhes gera economia. De todas as formas geométricas possíveis, elas utilizam aquela que lhes possibilita o menor consumo de cera para a construção e a maior capacidade de armazenamento do mel que fabricam.

Talvez inspirados nas abelhas, muitos artistas utilizam em suas obras a técnica do ladrilhamento, que consiste no preenchimento do plano com regiões poligonais, sem superposições ou buracos. A obra *Lagartos*, de 1942, do artista Escher, é um belo exemplo da utilização dessa técnica, bem como as famosas calçadas de São Paulo, que justapõem imagens de regiões poligonais com formato próximo ao do mapa do estado.

Fontes dos dados: A importância das abelhas e por que precisamos delas. *National Geographic*, [*s. l.*], 8 ago. 2018. Disponível em: https://www.natgeo.pt/animais/2018/08/importancia-das-abelhas-e-porque-precisamos-delas; BARCO, Luiz. A Geometria instintiva das abelhas. *Superinteressante*, São Paulo: Abril, 31 out. 2016. Disponível em: https://super.abril.com.br/ciencia/a-geometria-instintiva-das-abelhas/. Acesso em: 11 abr. 2022.

Você conhece outro animal que utiliza alguma estratégia que pode ser estudada pela Matemática? Já viu a técnica do ladrilhamento sendo aplicada em algum contexto? Compartilhe com os colegas.

As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

O fato de os alvéolos das colmeias terem o formato hexagonal não é coincidência: das regiões poligonais, a hexagonal é aquela que consome a menor quantidade de cera para as paredes dos alvéolos.

Ivan Marjanovic/Shutterstock

Orientações didáticas

Abertura

A resposta da pergunta é pessoal. Espera-se que os estudantes respondam que as formigas, quando vão de um ponto a outro, percorrem trajetórias de modo a ficar o menor tempo possível sob a luz solar. Matematicamente, essas trajetórias podem ser consideradas as mais eficientes em relação ao tempo e à distância de percurso. (fonte dos dados disponível em: https://www.mulher.com.br/atualidades/ciencia/geniais-conheca-7-animais-que-tambem-usam-a-matematica. Acesso em: 27 jun. 2022.).

Vale lembrar que a técnica do ladrilhamento é muito utilizada em papéis de parede, pisos decorativos, estampas de tecidos, malharias, crochês, empacotamento ou empilhamento de objetos, entre outros usos (fonte dos dados disponível em: https://matemateca.ime.usp.br/acervo/ladrilhamentos.html. Acesso em: 26 jun. 2022.).

Orientações didáticas

Equivalência de figuras

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA13** ao explorar a equivalência de figuras.

Elabore previamente alguns cartões coloridos para utilizá-los em atividades práticas com a turma.

Solicite aos estudantes que façam a leitura compartilhada do texto. Reproduza no quadro algumas figuras representadas no livro e verifique se eles compreendem o conceito de figuras equivalentes, apesar de não haver figuras iguais no tópico, e se entendem o significado do termo "equicompostas".

Em seguida, utilize os cartões coloridos previamente elaborados e demonstre aos estudantes como podemos formar figuras equivalentes utilizando cartões com diferentes formas.

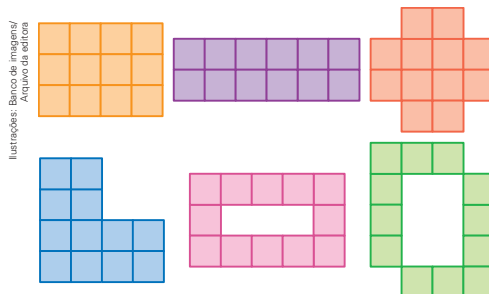
No boxe sobre o Teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien, é importante acessar o *site* indicado e demonstrar aos estudantes como o computador consegue decompor qualquer polígono para redesenhar outro, contanto que tenham a mesma área. Esse boxe favorece o trabalho com o pensamento computacional.

Participe

Verifique se os estudantes compreendem o conceito de equivalência e proponha que façam a atividade proposta no boxe, com a reprodução e o recorte das figuras.

Diagonais e áreas

Equivalência de figuras

Considere as figuras planas a seguir, montadas com 12 cartões quadrados, cada um deles de lado medindo 1 cm.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Nesse conjunto não há duas figuras iguais. Cada uma das figuras tem forma diferente das demais, mas todas têm a mesma medida de área (12 cm^2) e, por isso, são **figuras equivalentes** entre si.

Dizemos que duas ou mais figuras planas são **equivalentes** quando têm medidas de áreas iguais.

As figuras apresentadas são equivalentes porque todas são compostas de 12 cartões iguais. Dizemos que essas figuras são **equicompostas** (compostas de partes iguais em igual quantidade).

Participe

Faça as atividades no caderno.

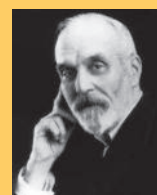
Uma maneira pela qual podemos mostrar que dois polígonos, P e P', delimitam regiões com a mesma medida de área é elaborar um modelo de cartolina, recortá-lo em outros polígonos e, depois, reagrupar esses novos polígonos de modo a obter um polígono P'. Vamos fazer uma experiência. Considere as peças da ilustração.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Copie as figuras em uma cartolina colorida, recorte-as e monte com elas um triângulo equilátero e um quadrado. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Essa decomposição do triângulo equilátero em um quadrado foi feita pelo matemático inglês Henry Dudeney (1857-1930), especialista em problemas lógicos e jogos matemáticos.

Volgi archive/Alamy/Fotoarena

Henry Ernest Dudeney (1857-1930), matemático inglês.

Há outro resultado mais geral:

Dados 2 polígonos simples de mesma medida de área, pode-se cortar o primeiro em um número finito de peças poligonais e rearranjá-las para obter o segundo polígono. Durante o "rearranjo" pode-se aplicar translações e rotações.

Esse resultado é conhecido por teorema de Wallace-Bolyai-Gerwien.

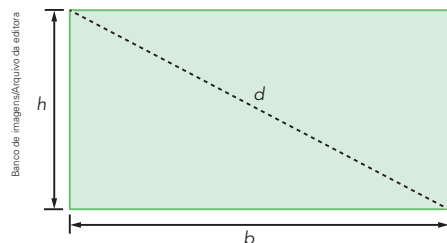
No endereço eletrônico a seguir, você pode desenhar dois polígonos e observar como é feita essa decomposição.

https://dmsm.github.io/scissors-congruence/ (Acesso em: 31 maio 2022.)

Segmento de retas notáveis e cálculos de medidas de área

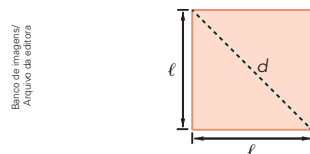
Diagonal do retângulo

A diagonal de um polígono convexo é o segmento de reta que liga dois vértices não consecutivos. A medida da diagonal de um retângulo pode ser determinada pelo teorema de Pitágoras.

Indicamos as medidas da diagonal por d, da base por b e da altura por h.

Logo: $d^2 = b^2 + h^2$

$$d = \sqrt{b^2 + h^2}$$

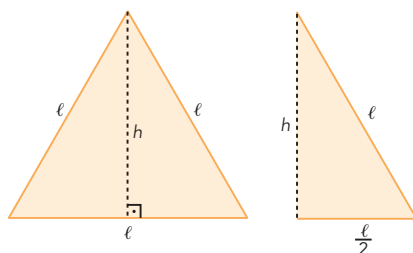
Diagonal do quadrado

No quadrado, podemos determinar a medida da diagonal também utilizando o teorema de Pitágoras.

Logo:
$d^2 = \ell^2 + \ell^2$
$d^2 = 2\ell^2$

$$d = \ell\sqrt{2}$$

A medida de área do triângulo equilátero

Considere o triângulo equilátero de lado medindo ℓ e altura medindo h a seguir.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Já vimos, aplicando o teorema de Pitágoras, que a medida da altura de um triângulo equilátero de lado medindo ℓ é dada por: $h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$.

Assim, a medida de área do triângulo equilátero é dada por: $A = \frac{b \cdot h}{2} \Leftrightarrow A = \frac{\ell \cdot \frac{\ell\sqrt{3}}{2}}{2} \Leftrightarrow A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$

Portanto: $A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$.

Orientações didáticas

Segmentos de retas notáveis e cálculos de medidas de área

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA13** ao explorar os segmentos notáveis e cálculos de medida de área. Mobiliza com maior ênfase a **CEMAT02** ao propor o trabalho com o teorema de Pitágoras.

Diagonal do retângulo

Leia o tópico com os estudantes. Trace um retângulo na lousa e a diagonal dele. Questione-os: "Ao traçar a diagonal, quais outras figuras vocês reconhecem nesse retângulo?". Espera-se que eles identifiquem dois triângulos. Em seguida, pergunte: "Como podemos utilizar o teorema de Pitágoras para calcular a medida da diagonal do retângulo? Quem se lembra desse teorema?". Caso os estudantes não se lembrem, retome o teorema de Pitágoras, escrevendo-o no quadro: "O quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos". Essa introdução favorece o trabalho com a **CEMAT02**.

Faça na lousa o exemplo indicado no livro e proponha outros para que os estudantes resolvam. Questione se eles têm dúvidas e esclareça-as.

Diagonal do quadrado

Leia o tópico com os estudantes. Explique a eles que, para determinar a diagonal do quadrado, também é possível utilizar o teorema de Pitágoras, como proposto para a diagonal do retângulo. Dê exemplos na lousa e proponha aos estudantes que os resolvam no caderno. Verifique se eles têm dúvidas e esclareça-as.

Orientações didáticas

Atividades

As atividades **1** e **2** exigem que os estudantes utilizem os conhecimentos de cálculo da medida de área de uma figura com base na diagonal dada.

As atividades **3** a **5** pedem aos estudantes que utilizem os conhecimentos de cálculo da medida de área de um triângulo, conhecendo seu perímetro ou sua altura.

A atividade **6** solicita o processo contrário: os estudantes precisam descobrir a medida do perímetro de um triângulo retângulo isósceles, conhecendo a medida de área dessa figura.

Na atividade **7**, para determinar a medida de área total da figura representada, os estudantes precisam decompô-la em outras figuras nas quais eles saibam como calcular a medida de área. Por fim, devem adicionar as medidas de área de todas essas figuras.

A atividade **8**, além de trabalhar o cálculo da medida de área de partes da figura representada, retoma o tema razão, pois os estudantes precisam determinar as razões entre as medidas de área de 2 triângulos determinados na figura representada na atividade.

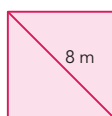
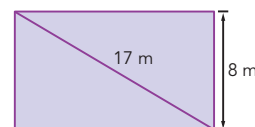
Atividades

Faça as atividades no caderno.

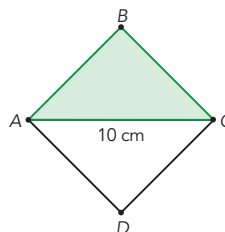
1. Determine a medida de área da figura em cada um dos itens a seguir.

a) quadrado $32\ m^2$

b) retângulo $120\ m^2$

17 m
8 m

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

2. Calcule a medida de área da região colorida sabendo-se que *ABCD* é quadrado. $25\ cm^2$

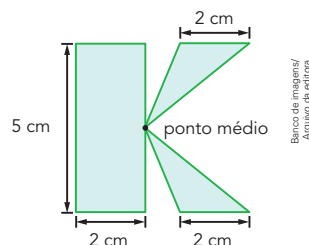
Banco de imagens/Arquivo da editora

As imagens não estão representadas em proporção.

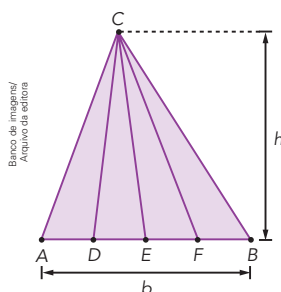
3. Calcule a medida de área de um triângulo equilátero cujo perímetro mede 30 m. $25\sqrt{3}\ m^2$

4. Determine a medida de área de um triângulo equilátero cuja altura mede 6 m. $12\sqrt{3}\ m^2$

5. Determine a medida de área de um triângulo isósceles cujo perímetro mede 36 m e cuja altura relativa à base mede 12 m. $60\ m^2$

6. A medida de área de um triângulo retângulo isósceles é $8\ cm^2$. Calcule a medida de perímetro do triângulo. $(8 + 4\sqrt{2})\ cm$

7. Calcule a medida de área da superfície da figura a seguir. $15\ cm^2$

Banco de imagens/Arquivo da editora

8. A base $\overline{AB}$ de um triângulo *ABC*, de base medindo *b* e altura medindo *h*, foi dividida em quatro partes congruentes pelos pontos *D*, *E* e *F*.

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Calcule as medidas de área dos triângulos *ADC*, *AEC*, *AFC* e *ABC*. $\frac{bh}{8}$, $\frac{bh}{4}$, $\frac{3bh}{8}$ e $\frac{bh}{2}$.

b) Calcule a razão entre as medidas de área do triângulo *CDE* e do triângulo *ABC*. $\frac{1}{4}$

Como fazer a contagem de multidões: técnicas e desafios

Andre Lucas/picture-alliance/dpa/Associated Press/Imageplus

Manifestação popular na rua da Consolação, em São Paulo (SP), em maio de 2021.

[...]

A estimativa do número de pessoas que comparecem a manifestações de rua é uma informação importante e útil, mas sua determinação é difícil e muitas vezes controversa. Num momento em que inúmeros protestos ocorrem por mês no país e que o saldo das manifestações é disputado entre os diferentes grupos, é oportuno examinar como essas estimativas são feitas e quanta imprecisão pode haver.

O que interessa a todos é simples: quantas pessoas estiveram num dado protesto em um dado local e data? Mas responder a essa pergunta não é tão simples. Informações divulgadas no Brasil por organizadores, polícia militar e institutos de pesquisa (notoriamente o Datafolha, que tradicionalmente faz as contagens) são muitas vezes extremamente discrepantes.

Um exemplo: segundo a Polícia Militar de São Paulo, no último domingo (13) [março de 2016], "aproximadamente, 1 milhão e 400 mil pessoas estiveram presentes no horário de pico (16 h 15), durante a manifestação ocorrida na região da avenida Paulista"; já segundo o Datafolha, ao medir o mesmo evento, "em contagem final, cerca de 500 mil pessoas estavam presentes na região da Av. Paulista". Há uma enorme diferença entre 1 milhão e 400 mil pessoas e 500 mil pessoas. É como comparar o Maracanã lotado com o Brinco de Ouro, em Campinas, quase cheio.

A relação entre os números da Polícia Militar e do Datafolha no caso da manifestação do último domingo (13) [março de 2016] se inverte na contagem do protesto da última sexta-feira (18) [março de 2016]. Neste caso, o Datafolha estimou um volume maior de pessoas: 95 mil manifestantes ao todo, contra 80 mil segundo a PM.

[...]

Como o Datafolha conta multidões

A metodologia do instituto de pesquisa é bastante intuitiva e largamente utilizada ao redor do mundo. Foi criada pelo professor de jornalismo Herbert Jacobs em 1967. O Datafolha divide a área da manifestação em pequenos setores separados em lotes de 1 metro quadrado e distribui profissionais para caminharem ao longo do espaço fazendo a contagem de pessoas por lote ao longo do tempo. A avenida Paulista, por

Orientações didáticas

Na mídia

Na BNCC

A seção mobiliza a **CEMAT05**, uma vez que a Matemática e o conteúdo estudado, contagem de multidões, é claramente apresentado como solução para um problema real do cotidiano. Favorece ainda o desenvolvimento do TCT *Ciência e Tecnologia*.

O texto apresenta uma questão que pode suscitar a curiosidade de qualquer pessoa, ao explorar o modo como a polícia militar e os órgãos de imprensa calculam a quantidade de pessoas presentes em uma manifestação. Procure uma foto aérea de algum evento ou *show* e tente descobrir a medida de área total do lugar da foto. Depois desse levantamento, peça aos estudantes para dividirem a foto em pequenos polígonos, de preferência quadriláteros, ajudando, assim, a fazer uma estimativa de quantas pessoas estavam presentes no local da foto escolhida. Estádios e locais fechados são mais interessantes para essa atividade, pois geralmente têm formatos regulares. A atividade demonstra a aplicação dos conteúdos estudados à realidade, além de promover um debate acerca da cidadania e do convívio com a comunidade.

Proposta para o estudante

Caso os estudantes se interessem em obter informações adicionais sobre o assunto abordado na seção, indique a eles a consulta: SANTOS, Robinson Nelson dos. Contagem de multidões: quantas pessoas cabem na Avenida Paulista. *Revista RPM*, [*s. l.*], v. 64. Disponível em: https://www.rpm.org.br/cdrpm/64/1rpm.htm. Acesso em: 26 jun. 2022.

Orientações didáticas

Na mídia

Outro procedimento interessante utilizado pelos órgãos de controle é o rastreamento georreferenciado da utilização de *smartphones* e redes sociais no local do evento. Esse exemplo pode ser usado para incentivar um debate entre os estudantes sobre a privacidade na era digital. A atividade favorece o trabalho com o TCT *Ciência e Tecnologia*.

Após a leitura do texto e o debate do tema, solicite aos estudantes que se organizem em duplas e respondam às questões apresentadas na seção.

exemplo, segundo o instituto, tem uma área de 136 mil metros quadrados, incluindo o canteiro central, calçadas, o vão livre do MASP e os túneis da Praça do Ciclista. Os profissionais do Datafolha espalham-se ao longo de sua extensão e anotam o número de pessoas que estimam estarem ocupando cada pequeno quadrado.

[...]

O Datafolha também entrevista manifestantes perguntando há quanto tempo estão no ato.

Como a polícia militar conta multidões

Segundo a polícia, a contagem é feita "pelo programa COPOM *online*, que realiza o georreferenciamento da área, definindo polígonos de concentração de pessoas por meio de inúmeras fotos aéreas e terrestres". Isto significa que as diversas fotos, terrestres ou feitas por helicópteros da PM, são processadas para que sejam conhecidas as coordenadas geográficas exatas de seus alvos, sendo a contagem feita a partir da adição de polígonos com densidades de pessoas estimadas a partir das fotos, sem que ocorra dupla contagem de áreas (justamente por conta do georreferenciamento, que define a localização exata de cada foto).

Ao divulgar o número de manifestantes no protesto de 13 de março de 2016, a PM esclarece que foram contabilizadas as quantidades de pessoas na "própria avenida Paulista, alameda Santos, rua São Carlos do Pinhal e todas as transversais". Este método, portanto, cobre uma área maior do que a avaliada pelo Datafolha.

Outros métodos utilizados ao redor do mundo

Balão com bateria de câmeras

Esta técnica envolve um balão do tamanho de uma minivan com uma bateria de câmeras acopladas que sobrevoa o protesto e tira milhares de fotos de diferentes alturas (evitando a não contagem de pessoas embaixo de árvores ou coberturas). As fotos são processadas e a densidade de cada área é avaliada para que a contagem seja completada. [...]

Utilização de sinal de celular ou uso de [redes sociais]

Esta metodologia se resume a utilizar dados georreferenciados de uso de celulares e [redes sociais]. A técnica tem a vantagem de ser extremamente rápida, não envolver julgamento humano e ter maior precisão. Por outro lado, funciona apenas nos casos em que a utilização de celulares do tipo *smartphones* [...] seja bastante disseminada e ainda homogênea entre públicos de diferentes protestos.

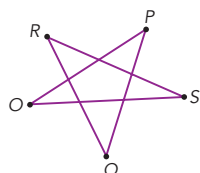
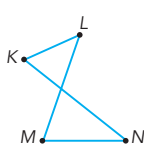
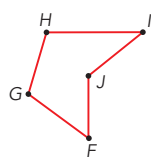
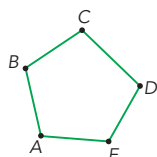
COMO FAZER a contagem de multidões: técnicas e desafios. *Nexo*, [*s. l.*], 23, mar. 2016. Disponível em: https://www.nexojornal.com.br/expresso/2016/03/20/Como-fazer-a-contagem-de-multid%C3%B5es-t%C3%A9cnicas-e-desafios. Acesso em: 11 abr. 2022.

1. Explique como o cálculo de multidões em uma manifestação pode interferir em uma informação divulgada pela mídia. A precisão dos cálculos divulgados pela mídia é muito importante, pois, quando se trata de uma manifestação, o número de pessoas presentes mostra a adesão ou não a determinado protesto. Dessa maneira, quanto maior o número de pessoas presentes, maior o indício de que essa manifestação reflete reivindicações de muitas pessoas.
2. Uma avenida de 1,15 km de medida de extensão e 40 m de medida da largura foi totalmente tomada por pessoas protestando em favor da Educação. Ao todo, quantas pessoas compareceram a essa manifestação se, em média, 4 pessoas ocuparam 1 metro quadrado? 184 000 pessoas.
3. Suponha que 528 passageiros estejam viajando dentro do vagão de um metrô que tem 22 metros de comprimento por 3 metros de largura.
   a) Nesse caso, qual é a quantidade de pessoas por metro quadrado? 8 pessoas.
   b) Faça uma pesquisa e responda: Qual é o limite aceitável de pessoas por metro quadrado no metrô?
   c) De acordo com os dados da sua pesquisa, esse vagão de trem, descrito no enunciado, estava lotado ou não? O vagão estava lotado.

3. b) Especialistas apontam que o limite suportável é de 6 pessoas por metro quadrado. (Fonte dos dados: http://memoria.ebc.com.br/agenciabrasil/noticia/2011-04-23/metro-de-sao-paulo-ainda-e-mais-lotado-do-mundo. Acesso em: 11 abr. 2022.)

Polígonos regulares

Polígonos simples e polígonos não simples

Note, a seguir, alguns polígonos:

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Já estudamos que um polígono é **simples** se quaisquer dois lados não consecutivos não têm ponto comum. No entanto, se existem dois lados não consecutivos que têm um ponto comum, então o polígono é chamado de **não simples**.

Portanto, dos exemplos anteriores:

- *ABCDE* e *FGHIJ* são polígonos simples;
- *KLMN* e *OPQRS* são polígonos não simples.

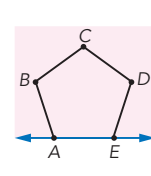
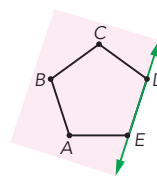
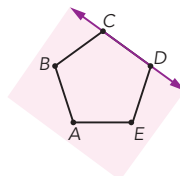
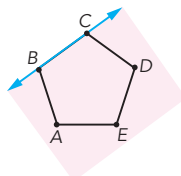
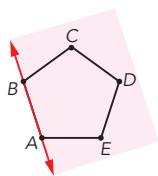
Polígonos convexos e polígonos côncavos

Vamos retomar também a diferença entre um polígono côncavo e um polígono convexo.

Primeiramente, considere a reta *r* contida no plano α. Ela o divide em duas regiões, ou seja, em dois semiplanos α_1 e α_2.

Um polígono contido num plano é **convexo** se, ao traçarmos uma reta sobre cada lado desse polígono, o restante dele ficar no mesmo semiplano, isto é, em um dos dois semiplanos que a reta determina.

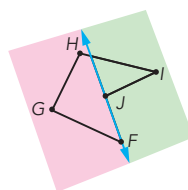
Banco de imagens/Arquivo da editora

Verifique que o polígono *ABCDE*, representado a seguir, é convexo, pois está inteiramente contido no semiplano rosa de cada figura.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Da mesma maneira, um polígono é **côncavo** quando há pelo menos uma reta que passa sobre um dos lados desse polígono, fazendo com que uma parte dele fique em um semiplano determinado pela reta e a outra parte, no outro semiplano.

Verifique, por exemplo, o polígono *FGHIJ*.

A reta $\overleftrightarrow{FJ}$ deixa parte do polígono em um semiplano e parte no outro, ou seja, o polígono está contido em dois semiplanos diferentes.

Neste momento, vamos estudar os **polígonos convexos**.

Orientações didáticas

Polígonos simples e polígonos não simples

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA15** ao propor um trabalho com polígonos simples e não simples.

O texto descreve as características principais de um polígono. Apresente aos estudantes as figuras propostas e desenvolva o conceito de polígono simples e polígono não simples. Desafie-os a desenhar no caderno um exemplo, diferente dos exemplos do livro, de um polígono simples e outro de um polígono não simples. Explique aos estudantes que polígonos são identificados associando letras a seus vértices, portanto, peça a eles que façam a mesma classificação nos polígonos que desenharam nos cadernos.

Polígonos convexos e polígonos côncavos

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA15** ao propor um trabalho com polígonos convexos e polígonos côncavos. Ao explorar o tópico *Número de diagonais de um polígono*, a **CEMAT06** é mobilizada com maior ênfase.

Outra classificação importante dos polígonos é em relação aos semiplanos em que estão contidos. Utilize as figuras do texto para explicar aos estudantes a diferença entre polígonos convexos e côncavos. Se julgar pertinente, escolha fotos aéreas de terrenos, ou mapa de ruas para encontrar com os estudantes exemplos de polígonos simples, não simples, convexos e côncavos. Essa análise favorece o trabalho com a aplicação da matemática em representações cartográficas.

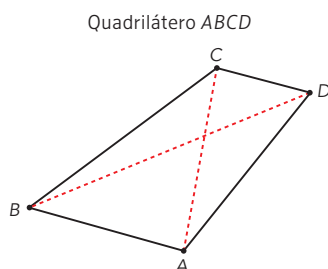
Orientações didáticas

Número de diagonais de um polígono

Esse texto apresenta as diagonais de um polígono. Use os exemplos dos quadriláteros e dos pentágonos e demonstre na lousa a construção geométrica desses polígonos, ligando os vértices por segmentos de reta que não sejam os lados das figuras. Peça aos estudantes que tentem fazer a mesma coisa com um triângulo. Espera-se que eles percebam que não é possível desenhar segmentos de retas a partir do vértice de um triângulo, que coincida com outro vértice, sem que este não coincida também com um dos lados desse triângulo. Após chegarem a essa conclusão, pergunte aos estudantes: "Se os triângulos não têm diagonais, os quadriláteros têm 2 diagonais e os pentágonos têm 5 diagonais como podemos saber quantas diagonais tem um polígono com *n* lados?". Deixe que os estudantes tirem as próprias conclusões, expressando suas ideias e debatendo entre si. Desenvolva a equação proposta no material deduzindo a resolução final. Faça alguns exemplos para confirmar o funcionamento da equação, desenhando a figura na lousa com suas diagonais. Esta atividade favorece o trabalho com a **CEMAT06**.

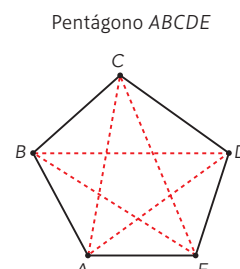
Estabelecer ou escrever uma regra geral, por exemplo, para calcular o número de diagonais de um polígono, é característica do raciocínio lógico dedutivo.

Número de diagonais de um polígono

A diagonal de um polígono é um segmento de reta cujas extremidades são vértices não consecutivos do polígono. Considere os polígonos a seguir e suas diagonais indicadas por linhas tracejadas.

Quadrilátero *ABCD*

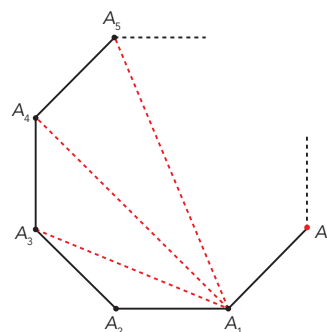
Diagonais: $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$

Diagonais: $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CE}$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Agora, considere estas informações sobre o número de diagonais de um polígono:

- um triângulo não tem nenhuma diagonal;
- um quadrilátero tem 2 diagonais;
- um pentágono tem 5 diagonais.

Então, quantas diagonais tem um polígono de *n* lados?

Banco de imagens/Arquivo da editora

Para responder a essa pergunta, vamos chamar de $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ os vértices de um polígono de *n* lados.

Com extremidade em um dos vértices do polígono (vértice A_1, por exemplo), há $(n - 3)$ diagonais, porque ligando A_1 a cada um dos demais vértices – com exceção de A_1, A_2 e A_n – obtemos diagonais.

Se temos $(n - 3)$ diagonais com extremidade em cada vértice, então com extremidades nos *n* vértices teremos $n \cdot (n - 3)$ diagonais.

Nesse processo de contagem, cada diagonal é contada duas vezes, pois tem extremidades em dois vértices. Por exemplo, a diagonal $\overline{A_1A_3}$ (considerando as que partem de A_1) e a diagonal $\overline{A_3A_1}$ (considerando as que partem de A_3) foram consideradas duas diagonais, quando, na realidade, são uma única diagonal $(\overline{A_1A_3} \cong \overline{A_3A_1})$.

Concluindo, o número de diagonais, *d*, de um polígono com *n* lados é:

$$d = \frac{n \cdot (n - 3)}{2}$$

Soma das medidas dos ângulos internos de um polígono

Considere no quadro a seguir como é calculada a soma das medidas dos ângulos internos dos polígonos convexos de 3, 4, 5 e 6 lados.

Polígono	Figura	Quantidade de lados	Soma das medidas dos ângulos internos
Triângulo		3 lados (1 triângulo)	180°
Quadrilátero		4 lados (o polígono pode ser dividido em 2 triângulos)	$2 \cdot 180° = 360°$
Pentágono		5 lados (o polígono pode ser dividido em 3 triângulos)	$3 \cdot 180° = 540°$
Hexágono		6 lados (o polígono pode ser dividido em 4 triângulos)	$4 \cdot 180° = 720°$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Qual é a soma S_i das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo com *n* lados?

Nesse caso, procedemos da seguinte maneira:

- traçamos todas as diagonais que têm uma extremidade em um mesmo vértice do polígono;
- contamos o número de triângulos em que o polígono foi repartido por essas diagonais:

$$(n - 2) \text{ triângulos}$$

- calculamos a soma das medidas dos ângulos internos desses $(n - 2)$ triângulos:

$$(n - 2) \cdot 180°$$

- como a soma das medidas dos ângulos internos dos $(n - 2)$ triângulos é igual à soma das medidas dos ângulos internos do polígono inicial, temos:

$$S_i = (n - 2) \cdot 180°$$

Orientações didáticas

Soma das medidas dos ângulos internos de um polígono

Uma característica importante dos polígonos é a soma das medidas dos ângulos internos formados nos vértices. Peça aos estudantes que desenhem no caderno polígonos regulares que contenham de 3 a 6 lados, ou seja, um triângulo, um quadrilátero, um pentágono e um hexágono. Depois, faça as seguintes perguntas: "Qual será a medida do ângulo interno de cada figura?"; "Esses ângulos são todos congruentes?"; "Qual será o valor da soma das medidas dos ângulos de um triângulo?"; "O valor encontrado será sempre o mesmo?". Espera-se que os estudantes percebam que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo será sempre 180°, e que, a partir dessa conclusão, calculamos as medidas dos ângulos dos outros polígonos.

Orientações didáticas

Soma das medidas dos ângulos externos de um polígono

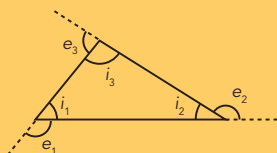
Este tópico apresenta a soma das medidas dos ângulos externos de um polígono.

Participe

Desafie os estudantes a desenvolverem o raciocínio pedido no boxe. Pergunte: "A soma das medidas dos ângulos externos de um polígono será sempre igual, independentemente da quantidade de lados?"; "Se sim, por que?". Desenvolva o raciocínio matemático proposto no material com os estudantes para que consigam compreender as relações entre os ângulos externos e internos. Espera-se que eles percebam que a soma das medidas dos ângulos externos sempre será 360°, independentemente da quantidade de lados do polígono.

Soma das medidas dos ângulos externos de um polígono

Participe — Faça as atividades no caderno.

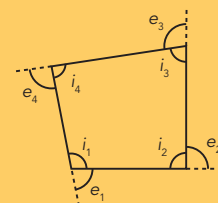
I. Considere a figura a seguir e responda às perguntas:

a) Quanto é $e_1 + i_1$? E $e_2 + i_2$? E $e_3 + i_3$? 180°; 180°; 180°.

b) Quanto é $(e_1 + i_1) + (e_2 + i_2) + (e_3 + i_3)$? 540°

c) Quanto é $i_1 + i_2 + i_3$? 180°

d) Quanto é $e_1 + e_2 + e_3$? 360°

II. Agora, considere este quadrilátero:

e_3, i_3, e_4, i_4, i_1, i_2, e_2, e_1

a) Quanto é $(e_1 + i_1) + (e_2 + i_2) + (e_3 + i_3) + (e_4 + i_4)$? 720°

b) Quanto é $i_1 + i_2 + i_3 + i_4$? 360°

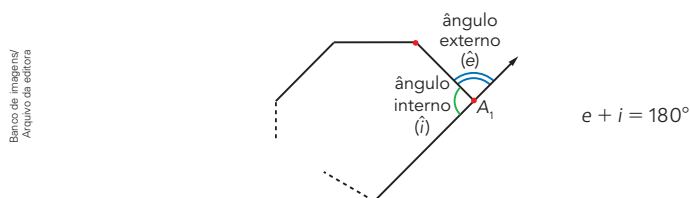
c) Quanto é $e_1 + e_2 + e_3 + e_4$? 360°

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Em um polígono convexo, chama-se **ângulo externo** o ângulo formado por um lado do polígono e o prolongamento do lado consecutivo a ele.

Em cada vértice (por exemplo: A_1), o ângulo externo $(\hat{e})$ é suplementar do ângulo interno $(\hat{i})$ adjacente:

$$e + i = 180°$$

Banco de imagens/Arquivo da editora

Vamos calcular a soma das medidas de todos os ângulos internos e externos de um polígono convexo $A_1A_2A_3...A_n$, tomando em cada vértice o ângulo interno $(\hat{i})$ e o ângulo externo $(\hat{e})$:

$$\underbrace{(i_1 + e_1)}_{\text{em } A_1} + \underbrace{(i_2 + e_2)}_{\text{em } A_2} + \underbrace{(i_3 + e_3)}_{\text{em } A_3} + ... + \underbrace{(i_n + e_n)}_{\text{em } A_n} =$$

$$= \underbrace{180° + 180° + 180° + \ ... \ + 180°}_{n \text{ parcelas}} = n \cdot 180°$$

Banco de imagens/Arquivo da editora

Então:

$$\underbrace{(i_1 + i_2 + i_3 + ... + i_n)}_{S_i} + \underbrace{(e_1 + e_2 + e_3 + ... + e_n)}_{S_e} = n \cdot 180°$$

Como $S_i = (n - 2) \cdot 180°$, temos:

$$(n - 2) \cdot 180° + S_e = n \cdot 180°$$

$$n \cdot 180° - 360° + S_e = n \cdot 180°$$

$$\boxed{S_e = 360°}$$

Esse resultado nos mostra que a soma das medidas dos ângulos externos de um polígono convexo é 360°, qualquer que seja o número de lados do polígono.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. Cada vértice de um decágono é extremidade de quantas diagonais desse polígono? Ao todo, quantas diagonais tem um decágono? 7 diagonais; 35 diagonais.

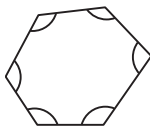
2. Calcule o número de diagonais de um eneágono. 27 diagonais.

3. Um polígono simples tem 44 diagonais. Qual é o número de lados desse polígono? 11 lados.

4. Qual é a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo com 12 lados? 1800°

5. Qual é a soma das medidas dos ângulos internos de um eneágono convexo? 1260°

6. Qual é o polígono convexo em que a soma das medidas dos ângulos internos é 900°? Heptágono.

7. Qual é a soma das medidas dos ângulos internos do polígono da figura a seguir? 720°

Banco de imagens/ Arquivo da editora

8. Dois ângulos de um triângulo medem 60° e 70°. Quanto medem os ângulos externos desse triângulo? 110°, 120° e 130°.

Polígono regular

Note as características dos quadriláteros representados a seguir.

Losango

- lados congruentes (equilátero).

Retângulo

- ângulos congruentes (equiângulo).

Quadrado

- lados congruentes (equilátero);
- ângulos congruentes (equiângulo).

Dos três tipos de quadrilátero, só o quadrado tem lados congruentes e ângulos congruentes. Por isso ele é chamado de **quadrilátero regular**.

Chama-se **polígono regular** o polígono convexo que tem todos os lados congruentes e todos os ângulos internos congruentes.

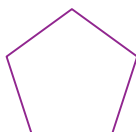
Acompanhe estes exemplos de polígonos regulares:

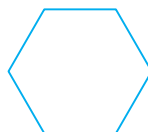
com 3 lados

Triângulo regular (triângulo equilátero)

com 4 lados

Quadrilátero regular (quadrado)

com 5 lados

Pentágono regular

com 6 lados

Hexágono regular

Ilustrações: Banco de imagens/ Arquivo da editora

Um polígono regular é equilátero e equiângulo.

Orientações didáticas

Atividades

Nas atividades **1** e **2**, o estudante deve lembrar o que é um decágono e um eneágono. Oriente-os a desenhar os polígonos no caderno e a traçar todas as diagonais, conferindo depois o resultado por meio da aplicação da equação aprendida.

Na atividade **3**, os estudantes farão uso da equação aprendida anteriormente.

As atividades **4** a **7** propõem um cálculo de soma das medidas de ângulos internos e externos. Oriente os estudantes a utilizarem as equações aprendidas e as considerações teóricas para conseguirem encontrar as respostas.

A atividade **8** é uma proposta específica para fixar o princípio fundamental segundo o qual a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo sempre resulta em 180°. Lembre-os de que a soma das medidas do ângulo interno e do ângulo externo também sempre resulta em 180°. Considerando esses raciocínios é possível calcular as medidas dos ângulos complementares aos internos.

Polígono regular

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA15** ao explorar o conceito de polígono regular.

Este tópico apresenta o conceito de regularidade dos polígonos. Inicie o estudo fazendo a seguinte pergunta aos estudantes: "Quais são as condições para que um polígono seja regular?". Permita que eles discutam entre si e registre as ideias deles na lousa. Depois, questione: "O que é um polígono regular?"; "O que é um polígono equiângulo?". Espera-se que o estudante entenda que um polígono é regular quando tem lados e ângulos congruentes, ou seja, que um polígono regular é equilátero e equiângulo. Desenhe na lousa um triângulo equilátero, um quadrado, um pentágono regular e um hexágono regular, se possível com o auxílio de régua e compasso. Desenvolva o raciocínio demonstrando que a medida dos lados são congruentes, assim como a medida dos ângulos internos.

Orientações didáticas

Participe

O boxe retoma alguns conceitos importantes como mediatriz e bissetriz. Peça aos estudantes que façam as atividades propostas individualmente e, posteriormente, corrija-as coletivamente.

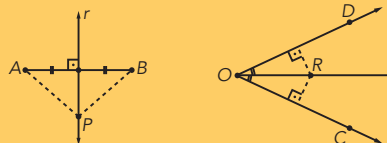
Polígonos inscritíveis em uma circunferência

Inicie o tópico fazendo a seguinte pergunta aos estudantes: "Qual é a principal condição para que um polígono seja inscritível em uma circunferência?". Espera-se que eles percebam que a condição é que os vértices do polígono façam parte da circunferência. Peça aos estudantes que desenhem um polígono qualquer, e, depois, com o compasso, tentem inscrever esse polígono em uma circunferência. Desenhe na lousa um polígono inscrito em uma circunferência e desenhe o ponto *O*, conforme os exemplos do material. Em seguida, pergunte aos estudantes: "Qual é a principal característica do ponto *O* para que o polígono seja inscritível nessa circunferência?". Espera-se que eles concluam que o ponto *O* deve estar a mesma distância de todos os vértices para que eles façam parte da circunferência.

A análise ou a compreensão de uma condição da definição de polígono inscritível contribui para o desenvolvimento do raciocínio abdutivo.

Participe Faça as atividades no caderno.

Antes de prosseguir com o estudo dos polígonos, vamos recordar alguns conceitos e propriedades importantes.

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Qual é o nome da reta *r* perpendicular ao segmento de reta $\overline{AB}$ e que passa pelo ponto médio dele? **a)** Mediatriz de $\overline{AB}$.

b) O ponto *P* pertence à reta *r*. O que se pode afirmar sobre as medidas de distância *PA* e *PB*? São iguais.

c) Um ponto *Q* do plano dista igualmente de *A* e de *B*. O que se pode afirmar sobre *Q* relativamente à reta *r*? *Q* pertence à reta *r*.

d) Qual é o nome da semirreta $\overrightarrow{OR}$ que divide o ângulo $C\hat{O}D$ ao meio? Bissetriz de $C\hat{O}D$.

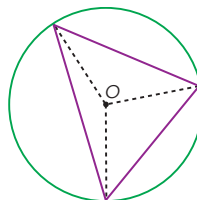
e) O ponto *R* pertence à semirreta $\overrightarrow{OR}$. O que se pode afirmar sobre as medidas de distância de *R* às semirretas $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$? São iguais.

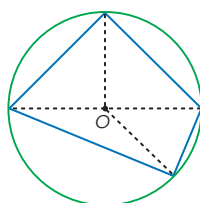
f) O ponto *S* é interno ao ângulo $C\hat{O}D$ e dista igualmente de $\overrightarrow{OC}$ e de $\overrightarrow{OD}$. O que se pode afirmar sobre *S* relativamente à semirreta $\overrightarrow{OR}$? $S \in \overrightarrow{OR}$

Polígonos inscritíveis em uma circunferência

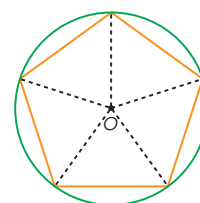
Quando uma circunferência contém todos os vértices de um polígono, dizemos que o polígono é **inscritível** nessa circunferência. Nesse caso, a circunferência está **circunscrita** ao polígono.

Considere os exemplos a seguir.

Banco de imagens/Arquivo da editora

O triângulo tem os três vértices na circunferência, ou seja, o triângulo está **inscrito** na circunferência.

O centro da circunferência dista igualmente dos três vértices do triângulo. Portanto, o ponto *O* é a interseção das mediatrizes do triângulo. O ponto *O* é chamado **circuncentro** do triângulo.

O quadrilátero tem os quatro vértices na circunferência: o quadrilátero está **inscrito** na circunferência.

O centro da circunferência dista igualmente dos quatro vértices do quadrilátero.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

O pentágono tem os cinco vértices na circunferência. Portanto o pentágono está **inscrito** na circunferência.

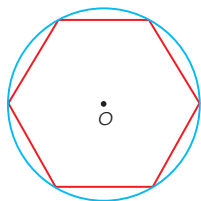
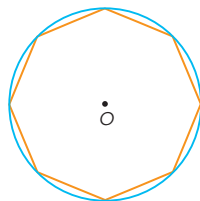
O centro da circunferência dista igualmente dos cinco vértices do pentágono.

Podemos notar que:

Um polígono é **inscritível** somente se existe um ponto *O* igualmente distante de todos os vértices do polígono.

Nem todos os polígonos são inscritíveis. Os polígonos inscritíveis mais importantes são:

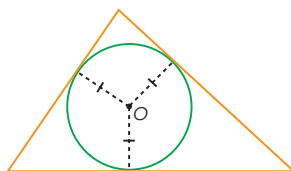
- os triângulos em geral, porque todo triângulo tem um ponto *O* (circuncentro) igualmente distante dos três vértices;
- alguns quadriláteros (aqueles cujos ângulos opostos são suplementares);
- os polígonos regulares com qualquer número de lados.

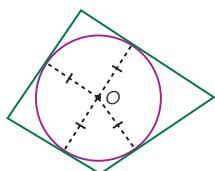
Considere estes exemplos:

Hexágono regular inscrito

Octógono regular inscrito

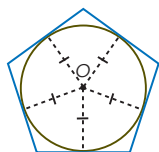
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Polígonos circunscritíveis a uma circunferência

Quando uma circunferência é tangente a todos os lados de um polígono, dizemos que o polígono é **circunscritível** a essa circunferência. Nesse caso, a circunferência está **inscrita** no polígono.

Considere os seguintes exemplos:

Este triângulo tem os três lados tangentes à circunferência: o triângulo está **circunscrito** à circunferência.

O centro da circunferência dista igualmente dos três lados do triângulo. O ponto *O* é chamado **incentro** do triângulo. Portanto *O* é a interseção das bissetrizes do triângulo.

Este quadrilátero tem os quatro lados tangentes à circunferência. Portanto o quadrilátero está **circunscrito** à circunferência.

O centro da circunferência dista igualmente dos quatro lados do quadrilátero.

Este pentágono tem os cinco lados tangentes à circunferência, ou seja, o pentágono está **circunscrito** à circunferência.

O centro da circunferência dista igualmente dos cinco lados do pentágono.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Orientações didáticas

Polígonos circunscritíveis a uma circunferência

Comece perguntando aos estudantes: "Como podemos fazer com que um polígono circunscreva uma circunferência?"; "Quais são as condições necessárias?". Permita que eles pensem na solução e debatam com os colegas. Escreva as soluções na lousa se necessário. Espera-se que a turma perceba que a condição do ponto *O* continua a mesma, mas que nesse caso os lados do polígono devem tangenciar a circunferência.

Orientações didáticas

Elementos notáveis de um polígono regular

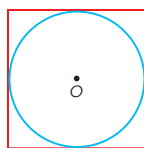
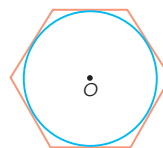
Desenhe um polígono regular na lousa e apresente cada elemento individualmente, certificando-se de que os estudantes compreendam a diferença entre eles. Depois, peça aos estudantes que desenhem no caderno outro polígono regular e demonstrem os elementos notáveis do polígono que construíram.

Podemos notar que:

> Um polígono é **circunscritível** somente se existe um ponto *O* igualmente distante de todos os lados do polígono.

Nem todos os polígonos são circunscritíveis. Os polígonos circunscritíveis mais importantes são:

- os triângulos em geral, porque todo triângulo tem um ponto *O* (incentro) igualmente distante dos três lados;
- alguns quadriláteros (aqueles cujas somas das medidas dos lados opostos são iguais);
- os polígonos regulares com qualquer número de lados.

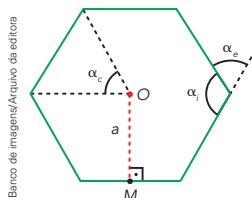
Verifique:

Quadrado circunscrito

Hexágono regular circunscrito

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Elementos notáveis de um polígono regular

No estudo dos polígonos regulares, é importante conhecer alguns elementos. Consideremos os seguintes elementos:

- **Centro**: é o centro comum das circunferências inscrita e circunscrita.
  O centro é o ponto em que concorrem as mediatrizes dos lados e as bissetrizes dos ângulos internos.
- **Apótema**: é o segmento de reta perpendicular ao lado com uma extremidade no centro do polígono e a outra no ponto médio do lado.
  No hexágono regular representado a seguir:

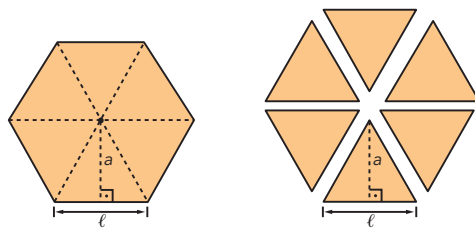
Banco de imagens/Arquivo da editora

- *O* é o centro;
- *M* é o ponto médio de um dos lados;
- $\overline{OM}$ é um apótema $(OM = a)$;
- α_c é a medida do ângulo central;
- α_i é a medida do ângulo interno;
- α_e é a medida do ângulo externo.

Se o polígono regular tem *n* lados, valem as seguintes expressões:

- medida do ângulo central: $\alpha_c = \dfrac{360°}{n}$;
- soma das medidas dos ângulos internos: $S_i = (n - 2) \cdot 180°$;
- medida do ângulo interno: $\alpha_i = \dfrac{S_i}{n} = \dfrac{(n-2) \cdot 180°}{n}$;
- soma das medidas dos ângulos externos: $S_e = 360°$;
- medida do ângulo externo: $\alpha_e = \dfrac{S_e}{n} = \dfrac{360°}{n}$;
- soma das medidas de um ângulo interno e um externo: $\alpha_i + \alpha_e = 180°$.

Medida de área de um polígono regular

Vamos indicar:

- n: número de lados do polígono;
- ℓ: medida do lado;
- a: medida do apótema;
- $2p$: medida de perímetro $(2p = n \cdot \ell)$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Se o polígono regular tem n lados, então a medida de área é igual a n vezes a medida de área do triângulo de base medindo ℓ e altura (que nesse caso também é o apótema do polígono) medindo a:

$$A = n \cdot \frac{\ell \cdot a}{2} = \frac{n \cdot \ell \cdot a}{2} = \frac{\cancel{2}p \cdot a}{\cancel{2}} = p \cdot a$$

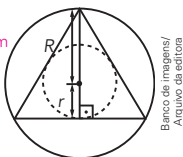
Logo, a medida de área do polígono regular é igual ao produto da medida do semiperímetro pela medida do apótema:

$$A = p \cdot a$$

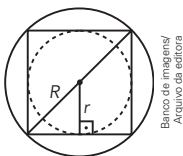
Atividades

Faça as atividades no caderno.

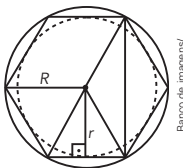
9. Sendo 6 m a medida do lado do triângulo equilátero ilustrado a seguir, determine:

a) a medida da altura do triângulo; $3\sqrt{3}$ m
b) a medida R do raio da circunferência circunscrita; $2\sqrt{3}$ m
c) a medida r do raio da circunferência inscrita; $\sqrt{3}$ m
d) a medida do apótema do triângulo. $\sqrt{3}$ m

Banco de imagens/Arquivo da editora

10. Sendo 8 m a medida do lado do quadrado representado a seguir, determine:

a) a medida da diagonal; $8\sqrt{2}$ m
b) a medida R do raio da circunferência circunscrita; $4\sqrt{2}$ m
c) a medida r do raio da circunferência inscrita; 4 m
d) a medida do apótema do quadrado. 4 m

Banco de imagens/Arquivo da editora

11. Sendo 6 m a medida do lado do hexágono ilustrado na sequência, determine:

a) a medida da diagonal maior; 12 m
b) a medida R do raio da circunferência circunscrita; 6 m
c) a medida r do raio da circunferência inscrita; $3\sqrt{3}$ m
d) a medida da diagonal menor; $6\sqrt{3}$ m
e) a medida do apótema do hexágono. $3\sqrt{3}$ m

Banco de imagens/Arquivo da editora

Lembre-se de que:

- no quadrado, a diagonal passa pelo centro;
- no hexágono regular, as diagonais maiores passam pelo centro e determinam nele 6 triângulos equiláteros.

Orientações didáticas

Medida de área de um polígono regular

Este tópico apresenta algumas condições matemáticas para realizar o cálculo da medida de área de um polígono por meio de sua subdivisão em triângulos iguais. Faça o desenvolvimento matemático utilizando o exemplo do livro. Em seguida, peça aos estudantes que desenhem outro polígono regular. Solicite que façam essa construção com réguas para que possam medir o semiperímetro, o apótema e o lado, para então, finalmente, calcularem a medida de área utilizando as equações aprendidas.

Atividades

As atividades **9** e **10** propõem o cálculo de vários elementos de um polígono por meio da obtenção da medida do lado desses polígonos. Se necessário, relembre com os estudantes algumas propriedades de simplificação de raízes.

Orientações didáticas

Atividades

As atividades **11** a **19** desafiam os estudantes a calcularem elementos notáveis das figuras propostas. Desenhe um quadrado e um hexágono para demonstrar geometricamente as condições apresentadas.

Lado e apótema de polígonos regulares

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA15** ao explorar as definições de lado e apótema em polígonos regulares. As questões apresentadas em *Atividades* favorecem o desenvolvimento da **CEMAT05**.

Quadrado inscrito

Exponha os exemplos na lousa iniciando pelo quadrado. Pergunte aos estudantes: "Como podemos utilizar o teorema de Pitágoras para resolver esse problema?". Permita que eles tentem solucioná-lo sozinhos. Caso seja necessário, elucide o problema.

Hexágono regular inscrito

Em seguida, demonstre o problema do hexágono desenhando-o na lousa e pergunte aos estudantes: "Como poderíamos usar a divisão do hexágono em triângulos iguais para resolver esse problema?". Permita que eles busquem a solução para a medida do apótema e a medida do lado sozinhos. Caso seja necessário, elucide o problema.

12. Qual é o polígono regular cuja medida do ângulo central é 18°? Icoságono.

13. Determine o número de lados de um polígono regular cujos ângulos internos medem 170°. 36 lados.

14. Cada ângulo externo de um polígono regular mede 40°. Quantos lados tem o polígono? 9 lados.

15. Em um quadrado, as duas diagonais têm medidas iguais. Para cada polígono regular a seguir, determine a quantidade de medidas diferentes que obtemos ao medir suas diagonais.

a) hexágono 2 **b)** octógono 3

16. Calcule a medida de área de um polígono regular que tem medida de perímetro $12\sqrt{3}$ cm e do apótema, 2 cm. **16.** $12\sqrt{3}$ cm²

17. Calcule a medida de perímetro de um polígono regular conhecendo a medida do apótema (8 cm) e a medida de área (256 cm²). 64 cm

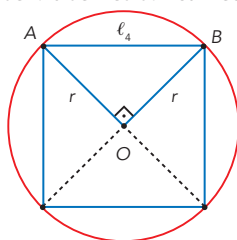
18. Calcule a medida de área de um hexágono regular de lado medindo 4 cm. $24\sqrt{3}$ cm²

19. A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono regular é 1440°. Determine a medida do ângulo central. 36°

Lado e apótema de polígonos regulares

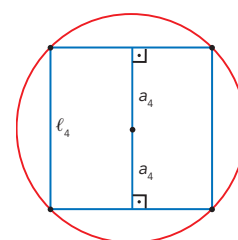
Quadrado inscrito

Vamos calcular a medida do lado (ℓ_4) e a medida do apótema (a_4) de um quadrado inscrito em uma circunferência de raio de medida *r* conhecida.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Banco de imagens/Arquivo da editora

- Cálculo da medida do lado: ℓ_4

  Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo *OAB*, temos:

  $$(\ell_4)^2 = r^2 + r^2 \Rightarrow (\ell_4)^2 = 2r^2 \Rightarrow \ell_4 = r\sqrt{2}$$

- Cálculo da medida do apótema: a_4

  $$a_4 + a_4 = \ell_4 \Rightarrow 2a_4 = \ell_4 \Rightarrow a_4 = \frac{\ell_4}{2}$$

  Substituindo ℓ_4, temos:

  $$a_4 = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

Hexágono regular inscrito

Agora, vamos calcular a medida do lado (ℓ_6) e a medida do apótema (a_6) de um hexágono regular inscrito em uma circunferência de raio de medida *r* conhecida.

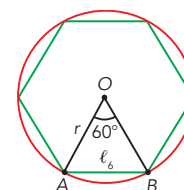
- Cálculo da medida do lado: ℓ_6

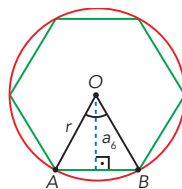
  No triângulo *OAB*, temos:

  $$\text{med}(A\hat{O}B) = \frac{360°}{6} = 60°$$

  $$\overline{OA} \cong \overline{OB} \Rightarrow \hat{A} \cong \hat{B}$$

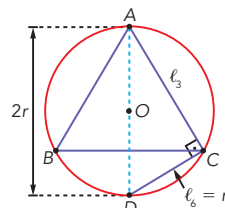
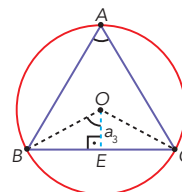
  Logo, $\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{O}$, então $\text{med}(\hat{O}) = 60°$ e o triângulo *OAB* é equilátero.

  Portanto, a medida do lado é igual à medida do raio: $\ell_6 = r$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

- Cálculo da medida do apótema: a_6
  O apótema do hexágono é a altura do triângulo equilátero OAB de lado medindo r.
  Portanto:
  $$a_6 = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

Triângulo equilátero inscrito

Vamos calcular a medida do lado (ℓ_3) e a medida do apótema (a_3) de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio de medida r conhecida.

- Cálculo da medida do lado: ℓ_3
  Traçamos o diâmetro $\overline{AD}$.
  Se $\overline{BC}$ mede ℓ_3, então $\overline{CD}$ mede ℓ_6 e, como $\ell_6 = r$, temos $CD = r$.
  Por estar inscrito em uma semicircunferência, o triângulo ACD é retângulo em C.
  Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ACD, temos:
  $$(\ell_3)^2 = (2r)^2 - r^2 \Rightarrow (\ell_3)^2 = 3r^2 \Rightarrow \ell_3 = r\sqrt{3}$$

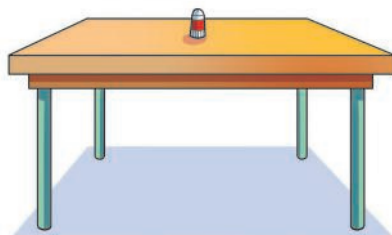
- Cálculo da medida do apótema: a_3
  Como $BO = r$ e $BE = \frac{r\sqrt{3}}{2}$, vamos aplicar o teorema de Pitágoras no $\triangle BEO$:
  $$r^2 = \left(\frac{r\sqrt{3}}{2}\right)^2 + a_3^2 \Rightarrow r^2 = \frac{r^2 \cdot 3}{4} + a_3^2 \Rightarrow a_3^2 = -\frac{r^2 \cdot 3}{4} + r^2 \Rightarrow$$
  $$\Rightarrow a_3^2 = \frac{r^2}{4} \Rightarrow a_3 = \sqrt{\frac{r^2}{4}} \Rightarrow a_3 = \frac{r}{2}$$

Atividades

Faça as atividades no caderno.

20. Copie o quadro a seguir no caderno e complete-o escrevendo a medida do lado e a do apótema do polígono regular inscrito em uma circunferência de raio r.

Polígono regular inscrito	Medida do lado	Medida do apótema
Triângulo $r\sqrt{3}$	//////////	////////// $\frac{r}{2}$
Quadrado $r\sqrt{2}$	//////////	////////// $\frac{r\sqrt{2}}{2}$
Hexágono r	//////////	////////// $\frac{r\sqrt{3}}{2}$

21. Calcule as medidas do lado e do apótema de um quadrado inscrito em uma circunferência de $5\sqrt{2}$ cm de medida do raio. 10 cm; 5 cm.

22. O tampo de uma mesa tem formato quadrado com 2 m de medida do lado. A que distância da borda da mesa fica um paliteiro colocado bem no centro? 1 m

Orientações didáticas

Triângulo equilátero inscrito

Como nas demais figuras, desenvolva o exemplo do triângulo equilátero na lousa. Pergunte aos estudantes: “Como podemos utilizar o teorema de Pitágoras para resolver esse problema?”. Permita que eles tentem solucioná-lo sozinhos. Caso seja necessário, elucide o problema.

Atividades

As atividades **20** a **22** visam diagnosticar se os estudantes compreenderam todas as condições necessárias para que os polígonos estejam inscritos na circunferência. Esclareça possíveis dúvidas ajudando-os na correção das atividades.

Orientações didáticas

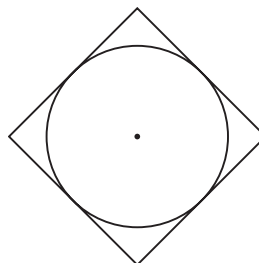
Atividades

As atividades **23** a **29** continuam o trabalho de avaliar se os estudantes compreenderam todas as condições necessárias para que os polígonos estejam inscritos na circunferência. Esclareça possíveis dúvidas ajudando-os na correção das atividades.

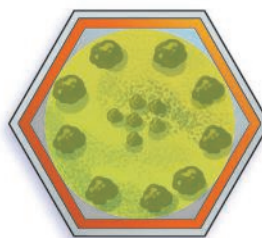
Nas atividades **22** e **25** temos uma resolução aplicada a um problema do cotidiano do estudante, portanto, essas atividades favorecem o trabalho com a **CEMAT05**.

Faça as atividades no caderno.

23. Determine a medida do raio de uma circunferência sabendo que a medida de perímetro do quadrado inscrito é 80 cm. $10\sqrt{2}$ cm

24. Calcule a medida de área do quadrado da figura sabendo que o raio da circunferência mede 5 cm.
100 cm²

Banco de imagens/Arquivo da editora

As imagens não estão representadas em proporção.

25. Calcule a medida do comprimento de uma pista de *cooper* que tem o formato de um hexágono regular cujos lados tangenciam um jardim circular com 253 m de medida do raio. Aproximadamente 1 753 m.

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

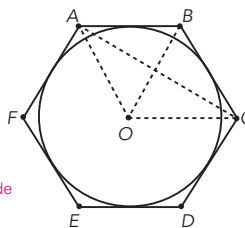
26. Calcule quantos metros quadrados de grama são necessários para revestir uma praça em formato de hexágono regular de modo que a distância do centro da praça a cada vértice do hexágono meça 20 m. Aproximadamente 1 039 m².

27. O lado de um hexágono regular inscrito em uma circunferência mede $8\sqrt{2}$ cm. Determine a medida do apótema do quadrado inscrito na mesma circunferência.
8 cm

28. No hexágono regular *ABCDEF* desta figura, o lado mede 5 cm. Calcule:

a) a medida do apótema; $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm

b) a medida do raio da circunferência inscrita; $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm

c) a medida da diagonal $\overline{AC}$. $5\sqrt{3}$ cm

Banco de imagens/Arquivo da editora

29. a) Não é possível, pois, ao juntar os vértices de 3 pentágonos, a soma das medidas dos ângulos internos é 324 graus, faltando 36 graus para uma volta completa, o que significa que haveria um "buraco", não formando um ladrilhamento.

29. Na abertura desta Unidade, vimos que, na vista superior das colmeias feitas pelas abelhas, podemos notar algo que lembra um ladrilhamento formado por hexágonos regulares.

a) É possível formar um ladrilhamento apenas com pentágonos regulares? Justifique.

b) Dê exemplo de um polígono regular diferente do hexágono com o qual seja possível realizar um ladrilhamento. Justifique.

Exemplo de resposta: É possível fazer um ladrilhamento com triângulos equiláteros.

Ladrilhamento é a técnica que consiste no preenchimento do plano com polígonos, sem superposições ou buracos. Essa técnica pode ser utilizada em papéis de parede, pisos decorativos de cerâmicas ou pedras, pisos e forros de madeira, estamparia de tecidos, malharias e crochês, no empacotamento ou empilhamento de objetos iguais, etc.

Para saber mais como podemos cobrir uma região plana com polígonos regulares, consulte: *Matemática em toda parte: construção, pavimentação com polígonos*. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=y__0a7TDbfs. Acesso em: 26 abr. 2022.

Construção de polígonos regulares

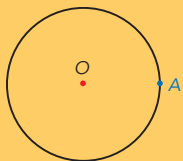
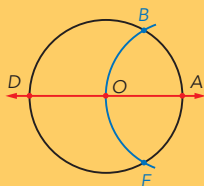
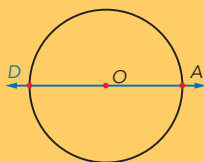
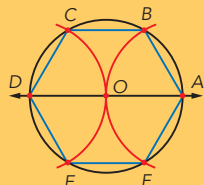
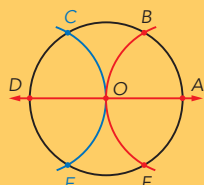
Para a construção de um polígono regular quando é dada a medida de seus lados, podemos utilizar o fato de que ele pode ser inscrito em uma circunferência.

Participe

Faça as atividades no caderno.

Para fazer a construção de alguns polígonos regulares, é possível utilizar o fato de que podemos dividir uma circunferência em partes iguais utilizando régua e compasso. Para isso, relembre como é possível dividir uma circunferência em 6 partes congruentes.

1. Considere que é dada uma circunferência. Vamos apresentar os passos utilizados para a construção da divisão fora de ordem. No caderno, copie os passos na ordem em que é possível construir um polígono.
A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

- Marcamos um ponto A em qualquer lugar da circunferência.

- Com centro em A e raio $\overline{AO}$, construímos um arco de circunferência que a intersecta nos chamados pontos B e F.

- Traçamos a reta $\overleftrightarrow{OA}$ e chamamos de D o outro ponto em que essa reta intersecta a circunferência.

- Ligamos os pontos obtendo o polígono $ABCDEF$.

- Com centro em D e raio $\overline{DO}$, construímos um arco de circunferência que a intersecta nos chamados pontos C e E.

2. Qual foi o polígono construído? É um polígono regular? Justifique suas respostas.
A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Orientações didáticas

Construção de polígonos regulares

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA15** ao explorar a construção de polígonos regulares. Mobiliza com maior ênfase a **CEMAT02** e a **CEMAT05**, além de permitir trabalhar com o TCT *Ciência e Tecnologia*.

Comente com os estudantes que para construírem um polígono regular cuja medida de seus lados seja conhecida, basta considerar o fato de que ele pode ser inscrito em uma circunferência.

Informe que utilizarão algumas ferramentas para fazer as construções, incluindo *softwares* de geometria dinâmica.

Participe

O boxe propõe a confecção de um polígono regular por meio da divisão de uma circunferência em partes iguais. Desenvolva o raciocínio com os estudantes, fazendo-os realizar o passo a passo até que consigam desenhar um polígono. Oriente-os a responder às questões propostas. Se julgar necessário, utilize algum *software* de geometria dinâmica.

Orientações didáticas

Construções com régua e compasso

Neste tópico é proposta a construção de um quadrado com lado igual a ℓ, utilizando-se régua e compasso.

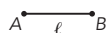
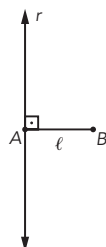
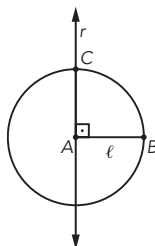
Desenvolva o raciocínio com os estudantes, fazendo-os realizar o passo a passo até que consigam desenhar um quadrado. A atividade favorece o trabalho com o pensamento computacional.

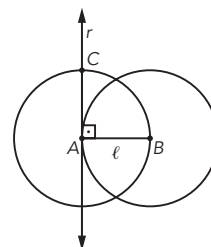
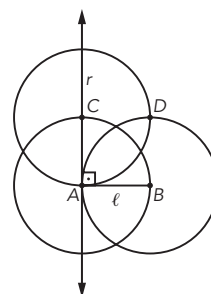
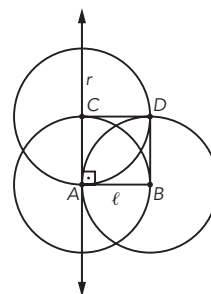
Construções com régua e compasso

Na construção do polígono regular de 6 lados, a medida do lado ℓ foi considerada quando construímos circunferências cujo raio foi igual à medida do lado ℓ. Para outros polígonos regulares isso não acontece. Vamos ver os casos do quadrado e do octógono regular.

A seguir, apresentaremos construções de polígonos regulares com 4 e 8 lados utilizando régua e compasso.

Construção do quadrado de lado com medida ℓ

- Marque o ponto *A*, que será um dos vértices do quadrado, e trace um segmento de reta $\overline{AB}$ com medida de comprimento ℓ.

- Trace uma reta *r* perpendicular a $\overline{AB}$ em *A*.

- Coloque a ponta-seca do compasso em *A* e trace uma circunferência com raio medindo ℓ. Em seguida, marque o ponto *C* de interseção entre a circunferência e a reta *r* para cima do segmento de reta $\overline{AB}$.

- Da mesma forma, coloque a ponta-seca do compasso sobre o ponto *B* e trace uma circunferência com raio de medida ℓ.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

- Coloque a ponta-seca do compasso no ponto *C* e trace uma circunferência com raio de medida ℓ. O ponto de interseção dessa circunferência com a circunferência de centro em *B* é o ponto *D*.

- Trace os segmentos de reta $\overline{CD}$ e $\overline{DB}$. O quadrilátero *ABDC* é um quadrado.

Construção do polígono regular de 2*n* lados

Sabia que é possível construir um polígono regular com 2*n* lados a partir do polígono regular de *n* lados?

Assim, a partir do quadrado é possível construir o octógono regular, o polígono regular com 8 lados. Note, a seguir, os passos desta construção.

- Como todo polígono regular é inscritível em uma circunferência, vamos descobrir o centro da circunferência que inscreve o quadrado *ABCD*.

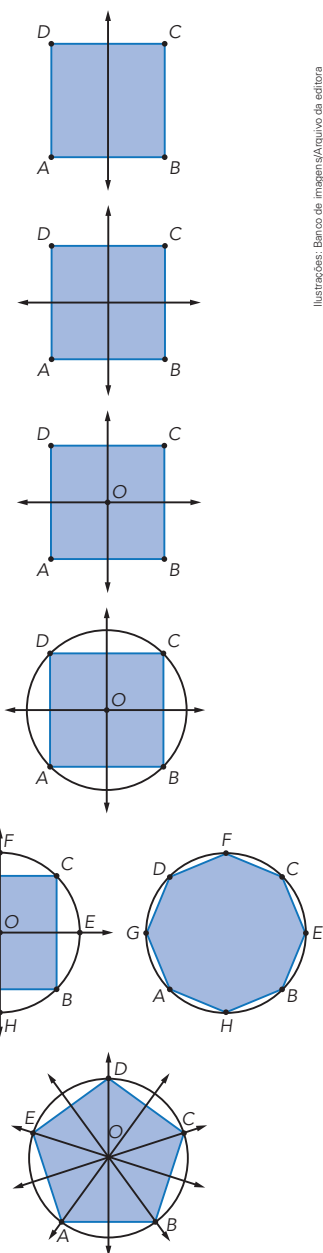
Para isso, vamos traçar a mediatriz do segmento de reta $\overline{AB}$.
Em seguida, vamos construir a mediatriz do segmento de reta $\overline{BC}$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

- O ponto de interseção dessas duas retas mediatrizes é o centro da circunferência que circunscreve o quadrado.

- Coloque a ponta-seca do compasso em *O*; trace uma circunferência com raio de medida *OA*. Essa circunferência circunscreve o quadrado.

- Agora, os pontos de interseção entre as mediatrizes construídas anteriormente e a circunferência (no exemplo, *E*, *F*, *G*, *H*) são os vértices que, junto com os vértices do quadrado (*A*, *B*, *C*, *D*), vão constituir o octógono regular.

No caso da construção do decágono regular a partir do pentágono regular, teríamos que construir as cinco mediatrizes dos lados.

Orientações didáticas

Construções com régua e compasso

Apresenta-se a possibilidade de construir um polígono com *2n* lados a partir de outro polígono com *n* lados. Partindo de um quadrado, oriente os estudantes a encontrarem o centro da circunferência, inferindo que o quadrado esteja inscrito em uma. Para isso, devem construir as mediatrizes que se interceptem no centro do quadrado. Nesse ponto, permita que os estudantes tentem formar os polígonos que tenham mais lados do que o quadrado. Peça a eles que expliquem qual estratégia adotaram.

Orientações didáticas

Participe

No boxe, o texto propõe uma simulação de robótica, na qual os estudantes devem dar comandos para a locomoção de um robô em uma trajetória no formato de um quadrado com lado medindo 3 metros. Desenvolva essa atividade com os estudantes, demonstrando todos os comandos geométricos e angulares que devem fazer parte da hipotética programação. Na sequência, permita que eles façam a programação do robô, para que ele caminhe em uma trajetória triangular. Permita o trabalho em grupos. Espera-se que os estudantes entendam e consigam aplicar os conceitos aprendidos na Unidade para realizar a programação. Mostre a eles o texto que fala sobre algoritmos, fazendo um debate sobre a realidade da inteligência artificial e o futuro das profissões. A atividade favorece o trabalho em equipe e o desenvolvimento do TCT *Ciência e Tecnologia*, assim como do pensamento computacional.

Construção de um polígono regular de *n* lados conhecendo a medida ℓ

Apresentaremos a seguir as etapas para a construção de um polígono regular de *n* lados conhecendo a medida ℓ. Estas etapas diferem um pouco das realizadas com régua e compasso porque não conseguimos garantir a construção de qualquer ângulo externo apenas com esses dois instrumentos.

Essas construções podem ser compreendidas como instruções que serão dadas a um robô, como a seguir.

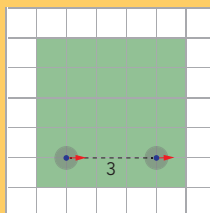
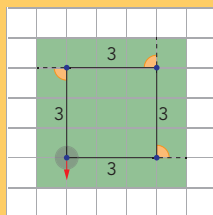
Participe

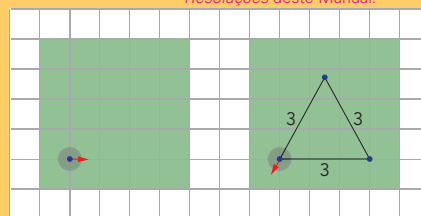
Faça as atividades no caderno.

Imagine que queremos dar instruções a um robô para que ele faça um percurso que seja igual a um quadrado com lado medindo 3 metros. Vamos considerar que esse robô pode executar as seguintes ações:

- andar para a frente *X* metros;
- girar para a direita *X*°;
- girar para a esquerda *X*°.

Uma vez que o robô está virado na direção da flecha da figura, o primeiro comando que poderia ser dado é que ele ande 3 metros para a frente.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

1. Considere que, na situação apresentada na figura anterior, o robô precisa girar. Qual é a medida do ângulo que o robô precisa girar para continuarmos a construção do quadrado? 90° para a esquerda.
2. Considere a figura a seguir, na qual o robô termina o trajeto pretendido. Descreva o restante da lista de instruções para que o robô complete o trajeto que vai construir o quadrado.

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

3. Agora, considere que esse robô precisa fazer o trajeto igual a um triângulo equilátero, conforme a figura a seguir. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Quais são as instruções para que o robô possa fazer esse trajeto?

4. Considerando o polígono construído e relembrando os conceitos de polígonos regulares, qual foi o ângulo utilizado para o giro do robô? O ângulo externo do polígono regular.

O que estamos fazendo neste capítulo é uma sequência de passos para a realização de uma tarefa. Isso em computação é conhecido como algoritmo. Conheça mais em: O algoritmo nosso de cada dia. *SBC*, Porto Alegre, 13 jul. 2016. Disponível em: https://www.sbc.org.br/noticias/1857-o-algoritmo-nosso-de-cada-dia. Acesso em: 26 abr. 2022.

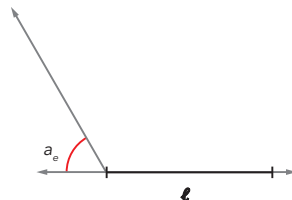
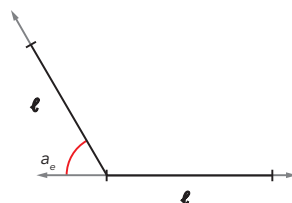
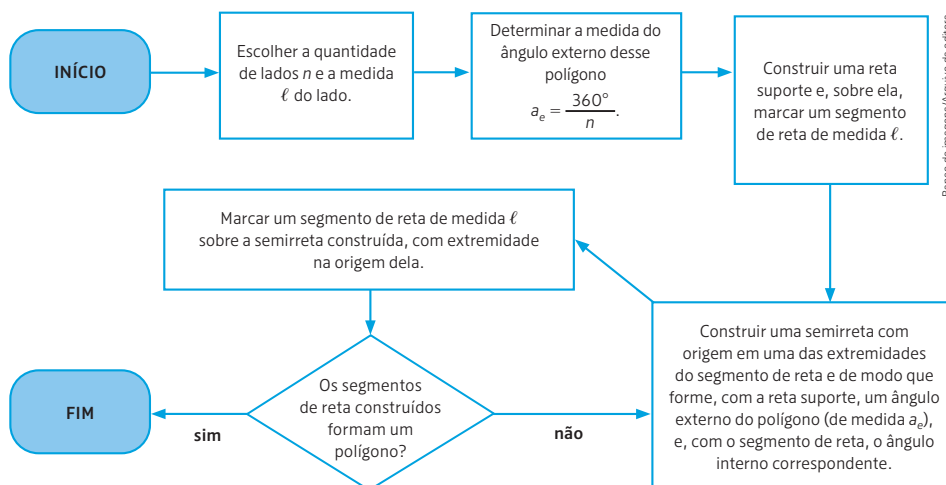
Vamos generalizar esses passos para a construção de um polígono regular de n lados conhecendo a medida ℓ.

1. Escolhemos a quantidade n de lados do polígono que será construído e determinamos a medida ℓ de cada lado.
2. Calculamos a medida do ângulo externo do polígono. Sendo n o número de lados do polígono, o ângulo externo tem medida:

$$a_e = \frac{360°}{n}$$

3. Construímos uma reta suporte e sobre ela marcamos um segmento de reta de medida ℓ.

ℓ

4. Construímos uma semirreta com origem em uma das extremidades do segmento de reta e de modo que forme, com a reta suporte, um ângulo externo do polígono (de medida a_e), e, com o segmento de reta, o ângulo interno correspondente.
5. Marcamos sobre a semirreta um segmento de reta de medida ℓ com extremidade na origem dela.
6. Repetimos o procedimento dos itens **4** e **5** até que os segmentos de reta construídos formem o polígono.

Considere, a seguir, as etapas dessa construção apresentadas na forma de um fluxograma.

Orientações didáticas

Construção de um polígono regular de *n* lados conhecendo a medida ℓ

O texto propõe uma generalização para a construção geométrica de polígonos regulares, utilizando somente os ângulos externos e a medida dos lados desse polígono. Desenvolva na lousa a construção do hexágono proposta no material utilizando uma régua e um transferidor. Certifique-se de que os estudantes compreenderam a construção e permita que escolham um novo polígono para ser desenhado. Peça que determinem a medida do lado de seus polígonos e que pesquisem sobre o ângulo externo do polígono que escolheram. Escreva na lousa o fluxograma apresentado no Livro do Estudante para que os estudantes consultem a ordem de execução correta. Explique também a eles como deve ser feita a leitura de um fluxograma com suas ramificações. Demonstre que o ciclo só termina quando o polígono estiver completamente fechado.

Orientações didáticas

Atividades

As atividades **30** a **35** propõem a construção de polígonos especificados nos enunciados, em que o estudante deve usar as técnicas aprendidas anteriormente.

Nas atividades **30** e **31**, construirão um pentágono e um octógono regulares, conhecendo apenas a medida do lado. Oriente os estudantes a pesquisarem o valor dos ângulos externos e construírem as figuras utilizando um transferidor.

As atividades **32** a **35** contribuem para a organização de processos argumentativos, além de permitir o desenvolvimento do pensamento computacional.

Na atividade **34** temos uma proposta diferenciada, na qual o estudante deverá produzir um fluxograma explicando o passo a passo utilizado para a construção de eneágono regular. Oriente os estudantes a utilizarem um *software* de produção de fluxogramas. Essa atividade favorece o trabalho da **CEMAT02**, uma vez que a matemática é utilizada como linguagem de comunicação.

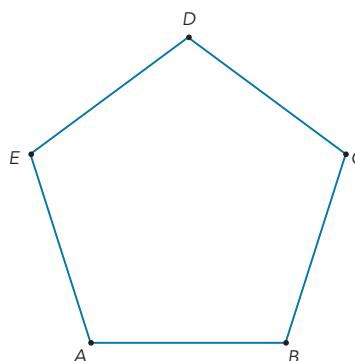
Na atividade **35** temos uma proposta voltada igualmente para a interpretação de um fluxograma, porém com um desafio um pouco maior: transformar o fluxo em um texto corrido de instrução para a construção de um polígono. Assim, a atividade favorece a interdisciplinaridade, uma vez que pode ser trabalhada em conjunto com o professor de **Língua Portuguesa**, assim como colabora com o desenvolvimento da argumentação matemática.

Faça as atividades no caderno.

30. Construa um pentágono regular de lado medindo 4 cm. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

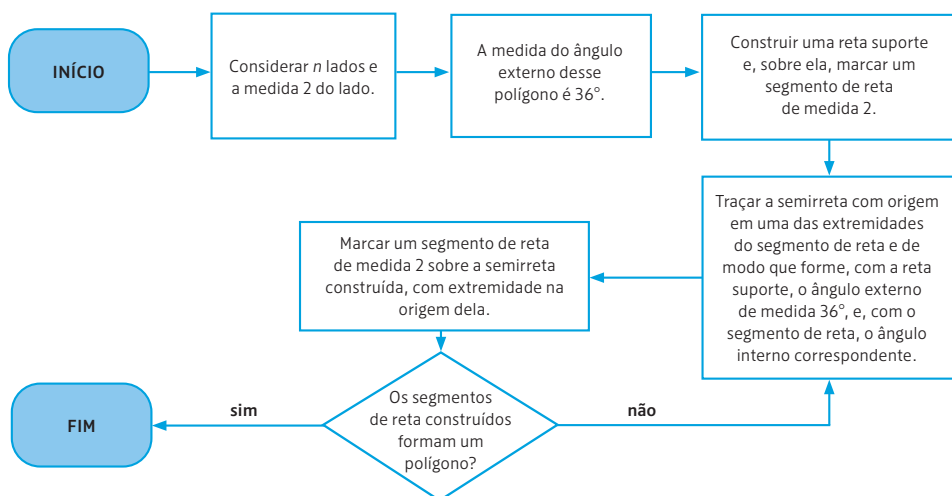
31. Construa um octógono regular de lado medindo 4 cm. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

32. Com base na construção do pentágono regular, descreva os passos necessários para a construção de um decágono regular. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Banco de imagens/Arquivo da editora

33. Descreva o passo a passo para a construção de um hexágono regular de lado medindo 4 cm. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

34. Construa, no caderno, um fluxograma que indique os passos da construção de um eneágono regular com lado medindo 3. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

35. Considere o fluxograma a seguir, que apresenta os passos da construção de um polígono regular.

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) O fluxograma apresenta a construção de um polígono regular. Pelas informações indicadas, qual é o polígono construído? Decágono regular com lado medindo 2.

b) Transforme o fluxograma dado em um texto explicativo passo a passo, isto é, descreva o processo de construção do polígono regular. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Faça as atividades no caderno.

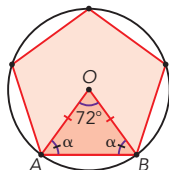
Polígonos regulares com medida ℓ do lado

Vamos utilizar o GeoGebra para construir polígonos regulares. O GeoGebra é um *software* gratuito de Matemática que pode ser utilizado em computadores, realizando o *download* no *site* www.geogebra.org/download (acesso em: 14 abr. 2022); em *smartphones*, baixando o aplicativo na loja oficial de aplicativos do sistema operacional do aparelho; ou, ainda, pode-se acessá-lo *on-line* no *site* https://www.geogebra.org/geometry (acesso em: 14 abr. 2022).

Como um polígono regular é inscritível em uma circunferência, podemos utilizar esse fato para construir esse polígono.

Considere um pentágono regular inscrito em uma circunferência. Lembrando que a medida angular do arco $\overset{\frown}{AB}$ é igual à medida do ângulo central, que, no caso do pentágono, é igual a 72°. Como o triângulo ABO é um triângulo isósceles, então conseguimos calcular a medida dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$, que são congruentes. Assim, para construirmos o polígono regular a partir da medida do lado, precisaremos da medida desses ângulos, que, no caso, será igual a 54°, pois:

$$72° + 2 \cdot \alpha = 180° \Rightarrow 2 \cdot \alpha = 180° - 72° \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2 \cdot \alpha = 108° \Rightarrow \alpha = 54°$$

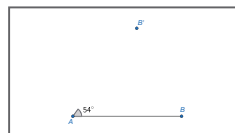
Banco de imagens/Arquivo da editora

A seguir, vamos apresentar os passos necessários para construir um pentágono com lado medindo 4.

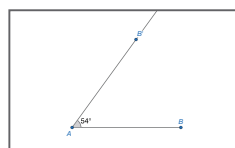
1º) Na aba "Ferramentas", selecione o ícone "Segmento como comprimento fixo", clique em um ponto qualquer da tela e, depois, preencha no campo a medida do segmento de reta, que no caso será 4.

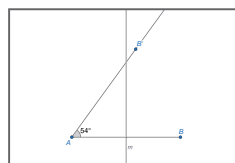
Reprodução/GeoGebra.org

Tela do GeoGebra após o 1º passo.

2º) Precisamos da medida do ângulo da base de um dos triângulos isósceles que vão auxiliar na construção do pentágono. Esse ângulo mede 54°. Para construirmos esse ângulo, utilizaremos a ferramenta "Ângulo com amplitude fixa", clicamos no ponto A e na caixa de texto digitamos a medida do ângulo desejada, no caso, 54°, selecionando a opção anti-horário. Atenção, quando for digitar, não apague da caixa o símbolo de grau (°).

Fotos: Reprodução/GeoGebra.org

Tela do GeoGebra após o 2º passo.

3º) Agora, vamos construir a semirreta $\overrightarrow{AB'}$, pois com ela conseguiremos localizar o centro da circunferência que circunscreve o polígono. Para construí-la, clique na ferramenta "Semirreta" e selecione os pontos A e B', nessa ordem.

Tela do GeoGebra após o 3º passo.

4º) O centro da circunferência que circunscreve o pentágono regular deve ser equidistante aos pontos A e B, e deve intersectar a $\overrightarrow{AB'}$. O lugar geométrico dos pontos equidistantes a A e a B é a mediatriz. Para construir a reta mediatriz, vamos selecionar a ferramenta "Mediatriz" e, depois, selecionar os pontos A e B.

Tela do GeoGebra após o 4º passo.

Orientações didáticas

Matemática e tecnologias

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA15** ao explorar a construção de polígonos regulares usando um *software* específico. Mobiliza com maior ênfase a **CEMAT05**, além de permitir trabalhar com o TCT *Ciência e Tecnologia*.

Acesse o *link* do *software* com os estudantes e desenvolva cada passo, caso haja equipamento disponível em sala de aula. Caso não seja possível, permita que os estudantes se organizem em grupos e façam o passo a passo em seus *smartphones* na sala de aula ou em casa. Peça a eles que apresentem o resultado em uma folha impressa. A atividade favorece o trabalho com o pensamento computacional.

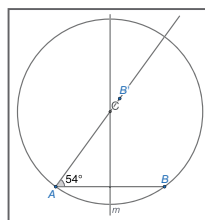
Antes de começar a construção, clique em Configurações, no canto superior direito da tela; depois em "Exibir Malha" e marque a opção "Sem Malha".

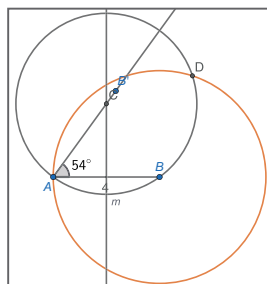
Orientações didáticas

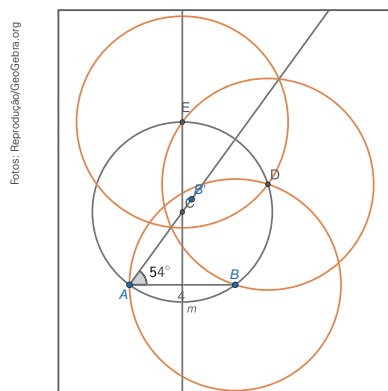
Matemática e tecnologias

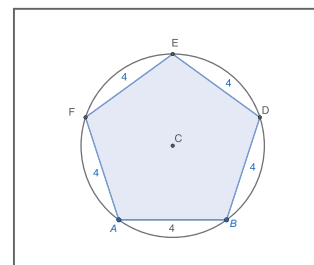
Aproveite a atividade para promover um debate com os estudantes acerca dos *softwares* de simulação utilizados na engenharia. Explique a eles que os cálculos referentes a sustentação de pontes e prédios são feitos em computadores nos dias de hoje; porém, ainda é necessária a supervisão de um profissional humano, capaz de avaliar se tudo está corretamente calculado e projetado. Faça a eles as seguintes perguntas: “Os robôs e as inteligências artificiais podem substituir a inteligência humana?”; “Qual é a influência da inteligência artificial no mundo do trabalho?”. Deixe que eles debatam sobre o assunto, tentando trazer à tona questões não somente técnicas, como também éticas e culturais.

5º) Com a ferramenta “Interseção de dois objetos” clicamos sobre a semirreta $\overrightarrow{AB'}$ e a mediatriz m, obtendo o ponto C.

Agora, com a ferramenta “Círculo dados centro e um de seus pontos”, clicamos no ponto C e no ponto A, e obtemos a circunferência, com centro C e raio com medida AC, que circunscreve o polígono regular.

Tela do GeoGebra após o 5º passo.

6º) Para encontrarmos outro vértice do polígono, selecionamos a ferramenta "Círculo dados centro e um de seus pontos", clicamos no ponto B e no ponto A. O ponto D, ponto de interseção entre as duas circunferências, será o segundo vértice do pentágono regular.

Tela do GeoGebra após o 6º passo.

7º) Para encontrarmos os outros vértices do polígono, selecionamos a ferramenta “Círculo dados centro e um de seus pontos”, clicamos no último vértice criado e no vértice mais próximo. Dessa maneira, criamos os pontos E e F, que são os vértices do pentágono regular.

Tela do GeoGebra após o 7º passo.

Essa é uma possibilidade de construção de um polígono regular.

1. Escreva o passo a passo para a construção de um quadrado regular com a medida do lado igual a 3 cm usando o GeoGebra.
A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

2. Os passos apresentados a seguir são para a construção do quadrado usando o GeoGebra. Use-os para criar um fluxograma.

1º) Abra uma nova janela do GeoGebra.

2º) Na aba “Ferramentas”, selecione o ícone “Ângulo com amplitude fixa”. Clique em dois pontos distintos da janela de construção, marcando os pontos A e B, e na caixa de diálogo digite 90°. O ponto A' será construído.

3º) Selecione o ícone “Segmento”. Trace o segmento de reta com as extremidades sendo os pontos A e B. Trace o segmento de reta contendo o ponto B e o ponto A' como extremidades.

4º) Selecione o ícone “Reta perpendicular”. Escolha um dos segmentos de reta, selecione-o e construa a reta perpendicular que passa pela extremidade desse segmento de reta que não corresponde ao ângulo reto. Selecione o outro segmento de reta e construa a reta perpendicular que passa pela extremidade desse segmento de reta que não corresponde ao ângulo reto.

5º) Selecione o ícone “Ponto”. Marque um ponto na interseção das duas retas perpendiculares.

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

3. Elabore um fluxograma que apresente a construção realizada no GeoGebra do octógono regular com medida de lado igual a 3.
A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Faça as atividades no caderno.

O número π

Por volta de 1750 a.C., os egípcios usavam um procedimento para o cálculo da medida de área de um círculo que corresponde à expressão moderna $\left(d - \frac{d}{9}\right)^2 = \frac{64 \cdot d^2}{81}$, em que d indica a medida do diâmetro. Esse procedimento fornece resultados razoáveis – se comparados com aqueles obtidos com a fórmula que usamos atualmente –, mas só implicitamente envolve o número π.

Para saber o valor subentendido para o número π na expressão anterior, basta igualá-la à fórmula correta para a medida de área de um círculo em função da medida do diâmetro, que é $A = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \cdot \frac{d^2}{4}$. Verifica-se, então, que a aproximação subentendida para o número π é 3,160493... Porém, os egípcios desconheciam esse número.

O grego Arquimedes (287-212 a.C.) – importante matemático da Antiguidade – foi o primeiro a buscar uma aproximação de π por métodos científicos. Arquimedes nasceu em Siracusa, uma importante colônia grega situada na Sicília. Supõe-se que ele tenha estudado em Alexandria, no Egito (que na época era o mais importante centro cultural do mundo grego), em razão da correspondência que manteve com intelectuais dessa cidade. De fato, Arquimedes viveu a maior parte da vida em sua cidade natal. Aliás, foi inventando máquinas de guerra para a defesa de Siracusa, durante a Segunda Guerra Púnica, quando a cidade foi sitiada pelos romanos, que Arquimedes se tornou realmente famoso. Mas ele gostava mesmo era de cultivar a ciência pura, especialmente a Matemática.

Reprodução/Biblioteca Nacional, Madri, Espanha.

Arquimedes, de autor desconhecido, 1547 (xilogravura de dimensões desconhecidas). Conta a história que foi em seus banhos que Arquimedes descobriu um princípio da hidrostática, o qual lhe permitiu desmascarar um ourives que fizera para o rei Hierão uma coroa jurando ser de ouro puro. Usando esse princípio – uma de suas muitas contribuições para o desenvolvimento das ciências –, Arquimedes provou que a coroa era feita de uma liga de ouro e prata.

Para obter cientificamente uma aproximação de π, Arquimedes considerou, sucessivamente, as medidas de perímetro dos polígonos regulares de 6, 12, 24, 48 e 96 lados, inscritos e circunscritos a uma circunferência. As medidas de perímetro do hexágono inscrito e do circunscrito são fáceis de calcular em função da medida do raio. A partir dos resultados obtidos, há fórmulas para obter as medidas de perímetro do dodecágono regular inscrito e do circunscrito. E assim por diante.

Orientações didáticas

Na História

Na BNCC

Nesta seção, que apresenta o desenvolvimento do número π, mobiliza-se com maior ênfase a **CG01** e a **CEMAT01** por auxiliar na valorização de conhecimentos historicamente construídos para entender e explicar a realidade.

Nesta seção sugerimos que leia o texto com os estudantes, comentando os fatos históricos e ressaltando as contribuições de Arquimedes na busca de aproximação por métodos científicos. Matemático grego que viveu a maior parte de sua vida na Sicília, Arquimedes foi responsável por grandes descobertas e invenções que contribuiriam muito para diversas áreas do conhecimento. Entre suas descobertas, destacamos o valor aproximado do comprimento da circunferência e o número entre 3,1408 e 3,1428. Muitos cientistas exploraram os métodos desse matemático e deram continuidade aos estudos dele.

Além disso, ler sobre a evolução dos conceitos matemáticos ao longo do tempo contribui para compreender que conquistas científicas são fruto do trabalho de diversos membros da comunidade e não de atos isolados de personalidades singulares.

Orientações didáticas

Na História

Promova um debate com os estudantes para que percebam que a Matemática é uma ciência fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas, em distintos momentos históricos, além de ser uma ciência viva que contribui para solucionar problemas científicos e tecnológicos e para fundamentar as descobertas e as construções para o mundo do trabalho.

Depois, sugira aos estudantes que se reúnam em grupos com 2 colegas para responderem às perguntas propostas. Caso apresentem dúvidas, proponha que retomem a leitura atenta do texto.

Com as perguntas respondidas, os estudantes podem se organizar em uma roda de conversa para que compartilhem as informações encontradas e o entendimento que tiveram, exercitando, assim, o diálogo, o respeito mútuo e a autonomia com responsabilidade.

A medida de perímetro de um polígono regular inscrito é uma aproximação por falta da medida de comprimento da circunferência, assim como a medida de perímetro de cada polígono circunscrito é uma aproximação por excesso dessa medida de comprimento. Usando essas aproximações indefinidamente, de um lado por falta, e de outro por excesso, obtêm-se aproximações sucessivamente melhores da medida de comprimento da circunferência. E, dividindo-as pelo dobro da medida do raio, encontram-se aproximações de π cada vez melhores. Foi assim que, depois de exaustivos cálculos, Arquimedes mostrou que π encontra-se entre 3,1408... e 3,1428... (em algarismos modernos).

Banco de imagens/Arquivo da editora

Método de Arquimedes para o cálculo de π.

O método de Arquimedes foi explorado mais a fundo posteriormente por outros matemáticos. O holandês Ludolph von Ceulen (1540-1610) passou grande parte de sua vida calculando a aproximação de π até a 35ª casa decimal e, para isso, teve de chegar aos polígonos regulares de 262 lados. Em seu túmulo, sua esposa mandou gravar a aproximação obtida por ele:

3,14159265358979323846264338327950288

O símbolo π, para indicar a razão entre as medidas de comprimento da circunferência e do diâmetro dela, foi usado pela primeira vez em uma obra de 1706, do matemático inglês William Jones (1675-1749), na qual ele deu, corretamente, as primeiras cem casas desse número. A notação π deriva, provavelmente, do fato de tratar-se da primeira letra da palavra "perímetro", em grego. Sua adoção definitiva só se deu depois que o matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) passou a usá-la com o sentido atual.

Hoje, com métodos matemáticos mais sofisticados e com os modernos computadores, já se têm aproximações corretas de π com alguns bilhões de casas decimais. Certamente, as pesquisas atuais para obter aproximações cada vez melhores de π já não derivam de algum motivo prático, ligado diretamente ao uso desse número, mas sim da insaciável curiosidade do espírito humano. Sem falar na sua utilidade para a checagem de programas de computador.

Fonte dos dados: EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Trad.: Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 1994; BOYER, Carl B. *História da Matemática*. Trad.: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1991; BECKMANN, Petr. *A History of π*. Nova York: St. Martin's Press, 1971; STEWART, Ian. *O fantástico mundo dos números*. Trad.: George Schlesinger. Rio de Janeiro: Zahar, 2015.

As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

1. Os babilônios muitas vezes usavam um procedimento empírico que corresponde à fórmula moderna $A = \frac{c^2}{12}$, em que *c* denota a medida de comprimento de uma circunferência, para obter a medida de área (aproximada) do círculo correspondente. Qual é o valor de π subentendido nessa aproximação?

2. Quais cidades-Estado travaram as Guerras Púnicas? Em que época? Qual foi o envolvimento de Arquimedes nessas guerras? Pesquise em fontes confiáveis, registre as informações textualmente e, depois, compartilhe suas descobertas com os colegas.

3. O matemático hindu Bhaskara Acharya (1114-1185) obteve várias aproximações para o número π, entre as quais $\frac{3\,927}{1\,250}$, que ele considerava muito boa, $\frac{22}{7}$, que considerava imprecisa, e $\sqrt{10}$, que achava satisfatória para trabalhos corriqueiros. Até que casa decimal cada uma dessas aproximações é correta?

4. Em 1767, Johann H. Lambert (1728-1777), matemático alsaciano (a Alsácia hoje é uma região da França), provou que o número π é irracional. O que isso significa?

5. Imagine um lago circular cujo diâmetro mede exatamente 2 km. Calcule a medida de área desse lago usando o procedimento descoberto pelos egípcios na Antiguidade e a aproximação correta de π até a segunda casa decimal. Qual é a diferença entre o primeiro valor e o segundo? Percentualmente, o que isso significa?

6. Em uma de suas obras, o arquiteto romano Marcos Vitrúvio Polião (século I a.C.) obteve $\frac{31}{2}$ pés como medida de perímetro de uma roda de diâmetro medindo 4 pés. Qual é o valor de π subentendido? $\frac{31}{8}$ (ou 3,875)

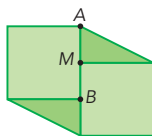
Na Unidade

Faça as atividades no caderno.

1. (PUC-MG) Certo desenhista faz dois modelos de ladrilho: um desses modelos é um quadrado de 64 cm^2 e outro, um retângulo cujo comprimento tem 2 cm a mais e cuja largura tem 2 cm a menos que a medida do lado do quadrado. Nessas condições, pode-se afirmar que a medida da área do modelo retangular, em centímetros quadrados, é igual a: Alternativa **a**.

a) 60 **b)** 64 **c)** 72 **d)** 80

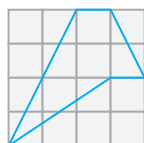
2. (Obmep) A figura a seguir é formada por dois quadrados de lado 6 cm e dois triângulos.

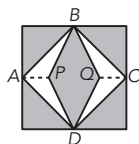
Banco de imagens/Arquivo da editora

Se M é o ponto médio de $\overline{AB}$, qual é a área total da figura? Alternativa **a**.

a) 90 cm^2 **c)** 100 cm^2 **e)** 120 cm^2
b) 96 cm^2 **d)** 108 cm^2

3. (PUC-MG) De uma placa quadrada de 16 cm^2, foi recortada uma peça conforme indicado na figura. A medida da área da peça recortada, em centímetros quadrados, é: Alternativa **c**.

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) 4 **b)** 5 **c)** 6 **d)** 7

4. (Enem) Para decorar a fachada de um edifício, um arquiteto projetou a colocação de vitrais compostos de quadrados de lado medindo 1 m, conforme a figura a seguir.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Nesta figura, os pontos A, B, C e D são pontos médios dos lados do quadrado e os segmentos $\overline{AP}$ e $\overline{QC}$ medem $\frac{1}{4}$ da medida do lado do quadrado.

Para confeccionar um vitral, são usados dois tipos de materiais: um para a parte sombreada da figura, que custa R$ 30,00 o m^2, e outro para a parte mais clara (regiões $ABPDA$ e $BCDQB$), que custa R$ 50,00 o m^2.

De acordo com esses dados, qual é o custo dos materiais usados na fabricação de um vitral?

a) R$ 22,50 **c)** R$ 40,00 **e)** R$ 45,00
b) R$ 35,00 **d)** R$ 42,50

Alternativa **b**.

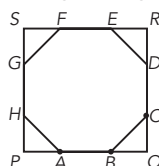
5. (FEI-SP) A sequência a seguir representa o número de diagonais d de um polígono regular de n lados:

n	3	4	5	6	7	...	13
d	0	2	5	9	14	...	x

O valor de x é: Alternativa **c**.

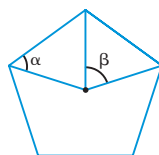
a) 44 **b)** 60 **c)** 65 **d)** 77 **e)** 91

6. (UFMG) O octógono regular de vértices $ABCDEFGH$, cujos lados medem 1 dm cada um, está inscrito no quadrado de vértices $PQRS$, conforme mostrado na figura a seguir.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Então, é correto afirmar que a área do quadrado $PQRS$ é: Alternativa **c**.

a) $(1+2\sqrt{2})$ dm^2 **c)** $(3+2\sqrt{2})$ dm^2
b) $(1+\sqrt{2})$ dm^2 **d)** $(3+\sqrt{2})$ dm^2

7. (Saresp) Considere um pentágono regular, conforme mostra a figura.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Sendo que o ponto destacado é o centro do pentágono regular.

A medida de $\alpha + \beta$ é Alternativa **a**.

a) 126° **b)** 115° **c)** 108° **d)** 100°

8. (Obmep) Na figura, dois vértices do hexágono regular maior coincidem com dois vértices do hexágono regular menor. O hexágono menor tem área igual a 10 cm^2. Qual é a área do hexágono maior? Alternativa **b**.

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) 20 cm^2 **d)** 36 cm^2
b) 30 cm^2 **e)** 40 cm^2
c) 35 cm^2

Orientações didáticas

Na Unidade

Na BNCC

Esta seção favorece o desenvolvimento das habilidades exploradas ao longo de toda a Unidade e mobiliza com maior ênfase a **CEMAT02**, a **CEMAT06** e a **CG02** ao propor a resolução de atividades diversas por meio de diferentes contextos e estratégias de resolução.

Esta seção traz atividades dos principais conteúdos abordados na Unidade que podem ser utilizadas como ferramentas de avaliação. Proponha a resolução das atividades individualmente. Acompanhe os estudantes durante a realização delas e registre avanços e dificuldades para, ao final, propor novas atividades para remediação coletiva ou individual de defasagens, conforme cada caso.

A seguir, listamos algumas sugestões e estratégias para remediação.

As atividades desta seção envolvem o trabalho com polígonos.

Dúvidas de resolução na atividade **1** podem indicar que o estudante tem dúvidas sobre o cálculo de áreas. Comente que ele deve calcular a raiz da medida de área do quadrado para encontrar a medida do lado, para, então, descobrir a medida dos lados do retângulo, e finalmente calcular sua medida de área.

Na atividade **2** o estudante deve perceber que a medida da altura dos triângulos vale 3 cm.

Na atividade **3** o estudante deve calcular a medida de área dos triângulos mais claros, subtraindo-a da medida de área do quadrado para obter a medida de área mais escura, a fim de calcular os valores pedidos.

Na atividade **4** é necessário usar a fórmula aprendida na Unidade para encontrar a resposta correta.

Na atividade **5** os estudantes devem utilizar seus conhecimentos sobre as características de um polígono regular e fazer uso do teorema de Pitágoras para conseguir, primeiro, encontrar a medida do lado do quadrado, e, então, descobrir sua medida de área.

Na atividade **6** os estudantes precisam dividir o pentágono regular da questão em triângulos congruentes, para, então, descobrir, embasados nos conhecimentos adquiridos na Unidade, a soma das medidas dos ângulos α e β.

A atividade **7** trabalha diversos tópicos estudados no capítulo, pois os estudantes precisam identificar os elementos de um polígono regular, dividir as figuras em outras para determinar as medidas dos lados dos hexágonos representados e usar os conhecimentos do cálculo da medida de área de um hexágono regular, a fim de determinar a medida de área do hexágono maior.

Orientações didáticas

Abertura

Na BNCC

A abertura desta Unidade mobiliza o TCT *Ciência e Tecnologia*, ao apresentar alguns detalhes sobre a construção de recipientes para armazenar e conservar produtos agrícolas. Favorece o desenvolvimento da **CEMAT05** na utilização de ferramentas matemáticas para modelar e resolver um problema do cotidiano rural.

Inicie a Unidade questionando se os estudantes sabem o que é um silo. Incentive-os a observar atentamente a imagem e pergunte: "Quais são as finalidades de um silo?"; "Quais tipos de silo existem?"; "Onde e para que são utilizados?". Valorize, o diálogo, a troca, o compartilhamento das respostas referentes ao entendimento de cada um e o respeito mútuo. Depois, proponha a leitura do texto para explicar os tipos de silos usados para o armazenamento e a conservação de grãos secos, sementes, cereais e forragens verdes.

Converse com os estudantes sobre a relação entre a capacidade de armazenamento de um silo e o comprimento da chapa de metal para que compreendam as vantagens, além da economia, de utilizar o silo cincho.

8 UNIDADE

Círculo, cilindro e vistas

NESTA UNIDADE VOCÊ VAI:

- resolver problemas, estabelecendo relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência;
- elaborar e resolver problemas que envolvem medidas de volume de prismas e cilindros;
- reconhecer vistas ortogonais em figuras espaciais.

CAPÍTULOS

O custo para a implantação do silo cincho é, em média, 30% menor do que o silo trincheira. De acordo com a Emater-MG, um silo cincho com 3 metros de medida do diâmetro e 1,5 metro de medida da altura tem a capacidade de armazenar aproximadamente 6 toneladas de silagem. Silagem de cana-de-açúcar em Brasília de Minas (MG). Foto de 2015.

Reprodução do Livro do Estudante em tamanho reduzido.

Proposta para o estudante

Sugerimos uma pesquisa, em fontes de informação confiáveis, sobre silos na qual sejam destacados os seguintes pontos:
- Compreender o significado dos silos.
- Quais tipos de silo são utilizados.
- Que tipos de alimentos podem ser armazenados e conservados em silos.
- Como a Matemática pode ser aplicada a esse tipo de construção.
- Quais as vantagens e desvantagens da utilização de determinados tipos de silo.

Após a pesquisa, peça que sejam apresentados os achados em uma roda de conversa, em que todos os estudantes tenham a possibilidade expor o que pesquisaram, mobilizando assim a **CEMAT08**. Em seguida, proponha a criação de cartazes para sintetizar os resultados.

1. As respostas poderão ser produzidas de duas maneiras:
a) Sem considerar as emendas, o comprimento da chapa será proporcional ao diâmetro da base do silo; considerando uma proporção entre as medidas, um silo com medida do diâmetro de 2 metros poderá ser construído com uma chapa de, aproximadamente, 7 metros de medida do comprimento.
b) Por outro lado, se o estudante utilizar a relação entre a medida do comprimento da circunferência e a medida do diâmetro, ele fará $C = \pi \cdot 2 \simeq 6{,}3$. Logo, o comprimento da chapa medirá de 6 a 7 metros.

Acervo/Emater-MG

Armazenamento de forragem para pequenos produtores

Os silos são construções destinadas ao armazenamento e à conservação de grãos secos, sementes, cereais e forragens verdes. Grandes produtores necessitam de silos, os quais demandam uma estrutura complexa, cuja construção chega a custar milhões de reais.

Para produzir alimento para animais de rebanho em época de estiagem, a Empresa de Assistência Técnica e Extensão Rural do Estado de Minas Gerais (Emater-MG) assessora os pequenos agricultores de Minas Gerais, Espírito Santo e Mato Grosso na construção de silos econômicos e de fácil instalação.

O silo tradicionalmente utilizado para esse fim é o trincheira, que é um buraco em formato de paralelepípedo cavado no solo; a forragem é lançada nele, compactada e isolada do ar para a fermentação.

No entanto, a Emater recomenda o silo cincho. Para implantá-lo, basta utilizar uma chapa metálica de aço galvanizado ou zinco, de 50 cm de medida da largura, que deve ser enrolada no formato de um cilindro e presa ao solo por estacas. Para fechá-lo, pode-se usar dobradiças, unidas com um pino ou cantoneiras e parafusos.

O capim picado é colocado dentro do silo e a cada camada de 20 cm o material vai sendo compactado por pisoteamento. Quando o material alcança a altura da fôrma, a chapa metálica é solta das estacas e suspensa. Assim, vai-se formando um cilindro de capim compactado. A fôrma é então retirada e o material é coberto com lona plástica para evitar o contato com o ar.

A medida da capacidade do silo vai depender do comprimento da chapa metálica. Com uma chapa de 11 metros de medida do comprimento, é possível fazer uma fôrma circular com, aproximadamente, 3 metros de medida de diâmetro.

Além de ser uma construção econômica, o silo cincho propicia outras vantagens: é fácil de carregar e descarregar; não depende de trator; a compactação da forragem é feita em mutirão, o que estreita os laços de cooperação entre os produtores; pode ser montado perto dos currais e desmontado quando vazio.

1. Se um agricultor deseja construir um silo cincho, cuja base tenha formato circular com medida do diâmetro de 2 metros, qual será a medida do comprimento da chapa que ele deverá usar?
2. Que medida de área do terreno é preciso ter à disposição para montar um silo cincho com uma chapa de 11 m de medida do comprimento?

2. De acordo com a informação dada no texto, com uma chapa de 11 metros de medida do comprimento, um agricultor poderá construir um silo cuja base é um círculo de 3 metros de medida do diâmetro ou de 1,5 metro de medida do raio. Nessas condições, a medida de área da base do silo será de $\pi \cdot (1{,}5 \text{ m})^2 \simeq 7 \text{ m}^2$.

Orientações didáticas

Abertura

Caso os estudantes apresentem dúvidas para responder às 2 perguntas no final do texto, retome o conceito de proporcionalidade e o cálculo das medidas de comprimento da circunferência e de área do círculo.

Debata com os estudantes sobre a importância de providenciar um armazenamento adequado para garantir a qualidade e a conservação de alimentos, o que propicia a saúde das pessoas e dos animais. Essa discussão favorece o desenvolvimento do TCT *Saúde*.

Tanto o assunto do texto como a fotografia permitem valorizar as profissões dos povos do campo.

Proposta para o professor

Para ter mais informações técnicas sobre diferentes tipos de silo, indicamos a referência a seguir:
VILELA, D. *Silos*: tipos e dimensionamentos. Coronel Pacheco: Embrapa; CNPGL, 1985. Disponível em: https://ainfo.cnptia.embrapa.br/digital/bitstream/item/142984/1/2020.pdf. Acesso em: 29 jun. 2022.

Orientações didáticas

A circunferência

Na BNCC

Este capítulo favorece o desenvolvimento das habilidades: **EF09MA11**, ao propor a resolução de problemas envolvendo relações entre as medidas de arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos de uma circunferência, utilizando também *softwares* de geometria dinâmica; e **EF09MA19**, ao propor a resolução e elaboração de problemas envolvendo medidas de volumes de prismas e cilindros.

A situação apresentada retoma um problema resolvido no volume anterior, em que o objetivo era determinar o diâmetro e o raio de uma circunferência de 10 cm de comprimento. Antes de apresentar a fórmula que determina a medida de comprimento de uma circunferência, deixe que os estudantes apresentem suas propostas de como poderiam calcular a medida do diâmetro de uma circunferência cujo comprimento é conhecido.

Caso os estudantes apresentem dúvidas para compreender essa fórmula, podem-se utilizar recursos computacionais para fazer a repetição de um experimento que consiste em calcular as medidas de perímetro de polígonos regulares inscritos e circunscritos a uma circunferência, aumentando a quantidade de lados para verificar que o valor de C tende a $2\pi r$.

Para consolidar essa expressão, proponha aos estudantes que meçam (com fita métrica ou com barbante e régua) o contorno de circunferências de comprimentos distintos e divida cada valor pela medida do diâmetro correspondente. Verifique se os estudantes percebem que o valor obtido tende a 3,141592, que é uma aproximação do número irracional π. Sugerimos utilizar a calculadora para obter os quocientes.

Círculo e cilindro

EF09MA11
EF09MA19

A circunferência

As imagens não estão representadas em proporção.

Anteriormente, deparamo-nos com um problema que consistia em um pedaço de arame de 10 cm de medida do comprimento, o qual seria moldado no formato de uma circunferência. Na ocasião, o objetivo era determinar as medidas d do diâmetro e r do raio dessa circunferência.

Hélio Senatore/Arquivo da editora

Para chegar à expressão da medida do comprimento de uma circunferência, utilizamos uma calculadora e calculamos as medidas de perímetro de polígonos regulares inscritos e circunscritos a uma circunferência de 50 cm de medida do diâmetro. Estudamos que, para polígonos regulares com grande quantidade de lados, as medidas de perímetro se aproxima de um valor C (**a medida do comprimento da circunferência**), e que a relação entre a medida de comprimento da circunferência e a medida do diâmetro, $d = 2 \cdot r$, é um valor constante, que identificamos com o número irracional π (lemos: pi). Assim,

$$C = \pi \cdot d$$

sendo $d = 2 \cdot r$, também podemos escrever $C = \pi \cdot 2 \cdot r$ ou $C = 2 \cdot \pi \cdot r$.

Em outras palavras:

> A medida de comprimento de uma circunferência é igual a 2π vezes a medida do raio, em que o valor de π é 3,141592...

Nas aplicações, costumamos usar o valor de π aproximado por duas casas decimais, $\pi \simeq 3{,}14$, ou por quatro casas, $\pi \simeq 3{,}1416$. Nas construções geométricas usamos $\pi \simeq \frac{22}{7}$, como veremos a seguir.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. Uma praça de formato circular tem medida do raio de 40 m. Quantos metros uma pessoa andará se der 3 voltas na praça?
Aproximadamente 753,6 m.

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Proposta para o professor

Para saber mais sobre como aproximar o comprimento de uma circunferência pelo perímetro dos polígonos regulares inscritos e circunscritos, segue a referência que explica a construção.

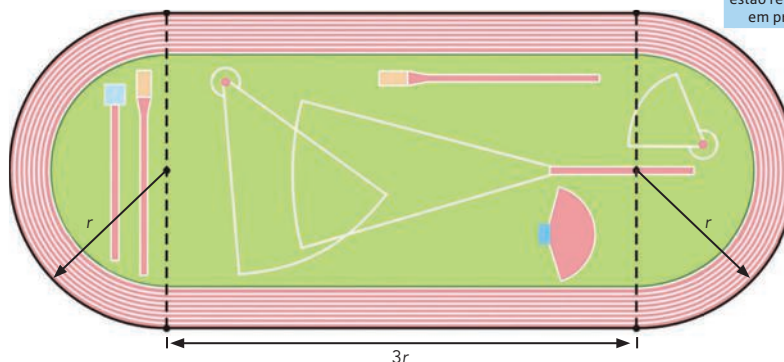
RODRIGUES, Aroldo E. A. Aproximação de π. *GeoGebra*, [*s. l.*], [20--?]. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/Mx35pCY8. Acesso em: 24 jun. 2022.

2. Um marceneiro recebeu a seguinte encomenda: fazer uma mesa redonda que acomode 8 pessoas, com um espaço de 60 cm para cada pessoa. Calcule a medida do diâmetro que a mesa deve ter. Aproximadamente 152,9 cm.

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

3. A medida do diâmetro da roda de um carro é 0,60 m. Quantas voltas essa roda dará em um percurso de 60 km? Aproximadamente 31 847 voltas.

4. Uma pista circular está limitada por duas circunferências concêntricas cujas medidas do comprimento são, respectivamente, 1 028 m e 965 m. No caderno, desenhe a situação descrita. Depois, determine a medida da largura da pista. Aproximadamente 10 m.
A representação da situação encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

5. Calcule, aproximadamente, a medida do comprimento da pista de atletismo esboçada na figura, sabendo que $r = 40$ m. Aproximadamente 491,2 m.

As imagens não estão representadas em proporção.

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

6. Calcule a medida do comprimento da circunferência inscrita em um quadrado de 2 cm de medida do lado e a medida do comprimento da circunferência circunscrita a esse mesmo quadrado.
Aproximadamente 6,28 cm; aproximadamente 8,85 cm.

7. Os ponteiros menor e maior de um relógio medem 1 cm e 1,5 cm, respectivamente. A circunferência descrita pelo ponteiro maior tem comprimento maior do que a circunferência descrita pelo ponteiro menor. Determine a diferença entre as medidas do comprimento dessas circunferências. Aproximadamente 3,14 cm.

8. As rodas de um automóvel têm, cada uma, 32 cm de medida do raio. Qual é a medida da distância percorrida pelo automóvel quando as rodas deram 8 000 voltas? Aproximadamente 16 077 m.

9. Um ciclista percorreu 26 km em 1 hora e 50 minutos. Se as rodas da bicicleta têm 40 cm de medida do raio, quantas voltas, aproximadamente, cada uma das rodas deu no total? E, por minuto, quantas voltas foram dadas?
Aproximadamente 10 350 voltas no total; 94 voltas por minuto.

10. As rodas dianteiras de um caminhão têm 50 cm de medida do raio e dão 25 voltas no mesmo intervalo de tempo em que as rodas traseiras dão 20 voltas. Determine a medida do diâmetro das rodas traseiras.
125 cm

Orientações didáticas

Atividades

As atividades **1** a **10** têm por objetivo consolidar a resolução de problemas em contextos variados, envolvendo conceitos de Geometria e de Grandezas e medidas, mais especificamente comprimento, diâmetro e raio da circunferência e medidas de comprimento e de tempo. Para facilitar os cálculos, usamos o valor aproximado de π como 3,14.

O contexto da atividade **2** favorece o desenvolvimento do TCT *Trabalho*, ao abordar a profissão de marceneiro. Comente com os estudantes que essa profissão é muito antiga e permanece necessária até os dias atuais, principalmente para o serviço de móveis planejados residenciais ou comerciais. Além de conhecimentos específicos da área de marcenaria, o profissional utiliza conhecimentos matemáticos ao medir espaços, fazer desenhos ou esboços das peças de madeira com indicações das dimensões, fazer marcações para os cortes, etc. Essa discussão permite aos estudantes reconhecer a Matemática como ciência viva, aplicada às necessidades humanas, mobilizando assim a **CEMAT01**.

Orientações didáticas

Comprimento de um arco

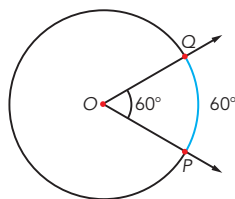
Na BNCC

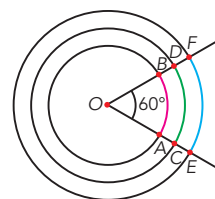
Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA11** ao propor a resolução de problemas envolvendo a relação entre a medida de comprimento de um arco de circunferência e a medida angular desse arco.

Sugerimos que os exemplos sejam resolvidos na lousa junto com os estudantes e, caso apresentem dúvidas, retome os conceitos de ângulo, ângulo central e arco de circunferência.

Converse sobre a diferença entre ângulo central que define um arco (medida angular) e o comprimento do arco (medida linear). Para ilustrar, peça aos estudantes que construam, no caderno ou em uma folha avulsa, algumas circunferências concêntricas usando o compasso e marquem um ângulo central de 60° com auxílio do transferidor. Depois, com auxílio de um barbante, peça que, em cada circunferência, meçam o comprimento do arco determinado por esse ângulo. Nesse momento, sugerimos que usem a régua para medir o comprimento do barbante em cada situação. Espera-se que os estudantes percebam que os arcos têm a mesma medida de ângulo central, mas medidas de comprimento diferentes.

Comprimento de um arco

Ângulo central, como já sabemos, é aquele que tem o vértice no centro da circunferência. Também sabemos que um **arco de circunferência** é determinado por 2 pontos pertencentes à circunferência a qual ele pertence, cuja medida angular é igual à medida do ângulo central correspondente a esse arco. Por exemplo, um arco de medida angular de 60° corresponde a um ângulo central de medida de 60°.

ângulo central $P\hat{O}Q$ de medida angular de 60°
arco $\overset{\frown}{PQ}$ de medida angular de 60°; indicamos: med$(\overset{\frown}{PQ}) = 60°$

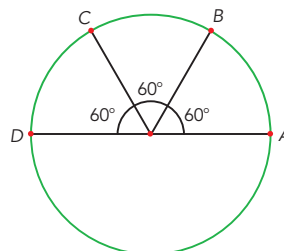
arco $\overset{\frown}{PQ}$ retificado ("desentortado")

ângulo central de medida angular de 60°
arcos de medida angular de 60°: $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{EF}$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Arcos podem ser caracterizados por medidas de abertura de ângulos, mas também podemos atribuir medidas de comprimento. Ao retificar os arcos das figuras e medir o comprimento deles, verificamos que, embora os arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{CD}$ e $\overset{\frown}{EF}$ tenham todos medidas angulares de 60°, as medidas de comprimento deles são diferentes: $\overset{\frown}{EF}$ tem medida de comprimento maior do que $\overset{\frown}{CD}$, e $\overset{\frown}{CD}$ tem medida de comprimento maior do que $\overset{\frown}{AB}$.

O que os arcos têm em comum é a mesma "abertura" (60°). A medida de comprimento de cada arco depende da medida do raio da circunferência que o contém, como será mostrado a seguir.

Cálculo da medida de comprimento do arco

Na figura a seguir notamos que:

Banco de imagens/Arquivo da editora

- um arco de medida angular de 120° $(\overset{\frown}{AC})$ tem o dobro de medida de comprimento de um arco de medida angular de 60° $(\overset{\frown}{AB})$;
- um arco de medida angular de 180° $(\overset{\frown}{AD})$ tem o triplo de medida de comprimento de um arco de medida angular de 60° $(\overset{\frown}{AB})$.

Esses exemplos ilustram o fato de que a medida de comprimento do arco é diretamente proporcional à medida angular (a medida em graus) dele.

Assim, para calcular a medida de comprimento x de um arco de medida angular de α graus, basta estabelecer uma proporção simples:

	Medida de comprimento	Medida angular (em graus)
arco:	x	α
circunferência:	$2\pi \cdot r$	360

α: alfa – letra do alfabeto grego

Daí, vem:

$$\frac{x}{2 \cdot \pi \cdot r} = \frac{\alpha}{360}$$

Logo:

$$x = \frac{\alpha}{360} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r$$

Conclusão: Sendo α a medida angular (em graus) de um ângulo, a medida de comprimento do arco é a fração $\frac{\alpha}{360}$ da medida de comprimento da circunferência que o contém. Daí segue que:

$$x = \frac{\alpha \cdot \pi \cdot r}{180}$$

Considere os dois exemplos:

- Vamos calcular a medida de comprimento de um arco de 60° em uma circunferência de medida do raio 2 cm.

  A medida de comprimento x, em centímetros, é:

$$x = \frac{60}{360} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = \frac{60}{360} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 2 = \frac{2 \cdot \pi}{3}$$

Então, $x \simeq \frac{2 \cdot 3{,}14}{3} \simeq 2{,}09$.

A medida de comprimento é, aproximadamente, 2,09 cm.

- Vamos calcular a medida de comprimento x de um arco de 60° em uma circunferência de medida do raio 3 cm.

$$x = \frac{60}{360} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = \frac{60}{360} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 3 = \pi$$

Então, $x \simeq 3{,}14$ cm.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

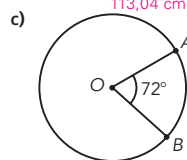
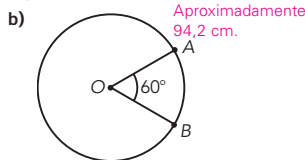
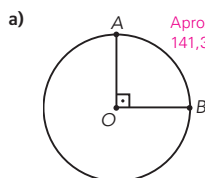
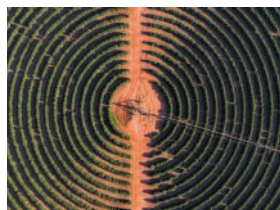
11. Calcule, no caderno, a medida de comprimento de um arco de medida angular de 75° em uma circunferência de medida de raio 5 cm. Aproximadamente 6,5 cm.

12. No caderno, determine, em cada item a seguir, a medida de comprimento do arco menor $\overset{\frown}{AB}$, dadas a medida do raio de 90 cm e a medida do ângulo central correspondente.

a) Aproximadamente 141,3 cm.

b) Aproximadamente 94,2 cm.

c) Aproximadamente 113,04 cm.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

13. As plantações de café podem assumir traçados circulares concêntricos, com os cafeeiros alinhados em ruas separadas por espaços por onde passam as máquinas colhedoras.

Plantação de café. Indianópolis (MG). Foto de 2021.

wsfurlan/E+/Getty Images

Orientações didáticas

Cálculo da medida do comprimento do arco

Antes de propor a leitura do texto, pergunte aos estudantes o que compreendem da seguinte afirmação: "Numa mesma circunferência, um arco de 120° tem o dobro do comprimento de um arco de 60°". Espera-se que eles percebam que as grandezas abertura de ângulo e comprimento são proporcionais e, ainda, diretamente proporcionais, pois, conforme a abertura do ângulo for reduzida pela metade, o comprimento do arco correspondente também será reduzido pela metade.

Desenvolva a situação na lousa com os estudantes, retomando a regra de três simples, a resolução de uma equação do 1º grau e o conceito de proporcionalidade com foco nas grandezas diretamente proporcionais.

Atividades

As atividades **11** a **19** têm por objetivo consolidar e ampliar a resolução de problemas envolvendo o cálculo de medida de comprimento de arcos em diferentes contextos. Caso os estudantes apresentem dúvidas, sugerimos que resolvam cada atividade na lousa, retomando os conceitos de comprimento de arcos e cálculo de medidas de comprimentos de arcos.

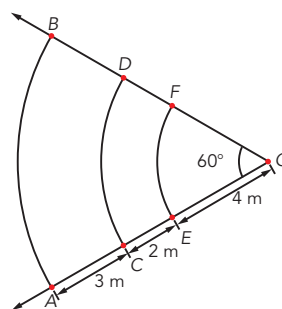
Orientações didáticas

Atividades

O contexto da atividade **13** mobiliza o TCT *Ciência e Tecnologia* ao mencionar a colheita mecanizada do café. Sugira aos estudantes que pesquisem as vantagens e desvantagens da colheita mecanizada e compartilhem com a turma as informações obtidas. Durante a discussão, valorize o trabalho dos povos do campo.

A imagem a seguir representa o setor de um cafezal, composto de três ruas em formato de arcos, $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{CD}$ e $\overset{\frown}{EF}$, de centro comum O e de medida angular 60°, e a máquina colhedeira deve percorrê-los.

Aproximadamente 19,89 m.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Se as ruas estão separadas nas distâncias de medidas $OE = 4$ m, $EC = 2$ m e $AC = 3$ m, qual é a medida de comprimento total da trajetória que a máquina deverá percorrer para fazer a colheita desse trecho?

14. Calcule a medida angular, em graus, de um arco de $2 \cdot \pi$ cm de comprimento em uma circunferência de raio medindo 1,5 cm. 240°

15. O ponteiro dos minutos de um relógio mede 12 cm de comprimento. Qual é a medida de distância que a ponta do ponteiro percorre em um intervalo de tempo de:

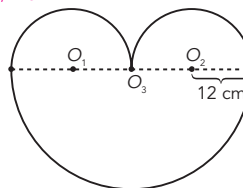
a) 20 minutos? Aproximadamente 25,12 cm.

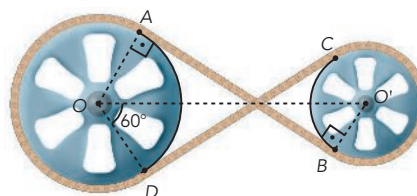
b) 75 minutos? Aproximadamente 94,2 cm.

16. Caminhando 50 metros em uma praça circular, uma pessoa descreve um arco de medida angular de 72°. Qual é a medida do raio da praça? Aproximadamente 39,81 m.

17. Uma corda $\overline{AB}$ dista 3 cm do centro de uma circunferência de medida do diâmetro 12 cm, e determina nessa circunferência dois arcos. Sabendo que o ângulo formado entre a corda $\overline{AB}$ e o raio mede 30°, qual é a razão entre as medidas de comprimento do maior e do menor arco desse círculo?
2, independentemente da medida (de comprimento ou angular).

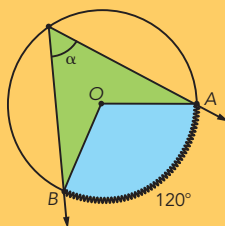
18. Determine, na figura a seguir, a medida de comprimento da linha cheia sabendo que os arcos são centrados em O_1, O_2 e O_3. Aproximadamente 150,72 cm.

Banco de imagens/Arquivo da editora

19. Na figura a seguir, determine a medida de comprimento da corrente que envolve as duas rodas sabendo que: o raio da roda menor mede 10 cm; o raio da roda maior, 20 cm; e a medida de distância entre os centros das duas rodas é 60 cm. Aproximadamente 2,29 m.

Alberto de Stefano/Arquivo da editora

Ângulo inscrito na circunferência

Participe

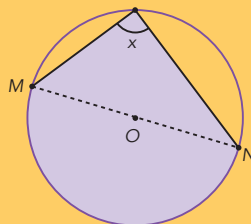
Faça as atividades no caderno.

I. Verifique o ângulo inscrito, de medida α, na circunferência a seguir. Sabemos que a medida angular, em graus, de um arco e a medida do ângulo central correspondente são iguais.

Banco de imagens/Arquivo da editora

No caderno, responda: Se a medida α do ângulo inscrito é a metade da medida do ângulo $A\hat{O}B$, qual é o valor de α? $\alpha = 60°$

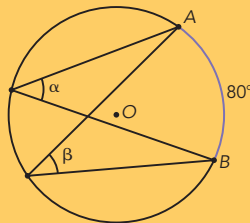
II. O arco $\overset{\frown}{MN}$ é uma semicircunferência. Se imaginarmos um segmento de reta que ligue os pontos M e N, teremos o diâmetro dessa circunferência, logo o arco $\overset{\frown}{MN}$ tem medida angular de 180°.

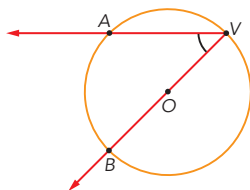
a) No caderno, calcule a medida x do ângulo. $x = 90°$

b) O que podemos concluir sobre a medida do ângulo inscrito em qualquer semicircunferência?
A medida do ângulo inscrito em qualquer semicircunferência é sempre igual à metade de 180°.

Banco de imagens/Arquivo da editora

III. Agora, analise os ângulos de medidas α e β inscritos na circunferência a seguir. A medida angular do arco $\overset{\frown}{AB}$ é de 80°.

a) Calcule as medidas α e β, no caderno. $\alpha = 40°$ e $\beta = 40°$

b) O que podemos concluir de dois ângulos inscritos determinados pelo mesmo arco?
Concluímos que ângulos inscritos determinados pelo mesmo arco têm a mesma medida angular, sendo, assim, congruentes.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Considere a circunferência e o **ângulo inscrito** nela representados a seguir. Tomando como referência a posição do centro O da circunferência em relação ao ângulo inscrito $A\hat{V}B$, temos:

Banco de imagens/Arquivo da editora

Orientações didáticas

Ângulo inscrito na circunferência

Este tópico inicia com atividades do boxe *Participe*.

Participe

É interessante que os estudantes resolvam as atividades do boxe em duplas para favorecer as discussões e a chegada a conclusões, de modo que um respeite e aprenda com o outro, mobilizando assim a **CEMAT08**.

Se as duplas tiverem dificuldade nos cálculos e/ou nas conclusões, incentive o uso do transferidor para medir os ângulos centrais e inscritos, com vista a verificar a existência de uma relação entre as medidas aferidas.

Orientações didáticas

Ângulo inscrito na circunferência

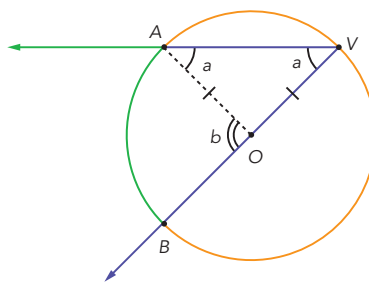
Na sequência, sugerimos que seja feita a leitura do conteúdo teórico com os estudantes, no qual é demonstrado que a medida do ângulo inscrito é igual à metade da medida do ângulo central correspondente, ou, de outro modo, a medida do ângulo central é igual ao dobro da medida do ângulo inscrito.

Sugerimos que você apresente outros casos para complementar a demonstração, como aquele em que o centro da circunferência está na região interna do ângulo inscrito e quando esse centro não pertence à região interna do ângulo inscrito.

Vamos chamar de:

- a a medida do ângulo inscrito $A\hat{V}B$;
- b a medida do ângulo central $A\hat{O}B$, que também é a medida angular do arco $\overset{\frown}{AB}$.

O ponto O pertence a um dos lados do ângulo inscrito $A\hat{V}B$. Analise a figura.

Banco de imagens/Arquivo da editora

O triângulo OVA é isósceles, pois $\overline{OA}$ e $\overline{OV}$ são raios da circunferência.

Pelo triângulo isósceles, temos $\hat{V} \cong \hat{A}$. Então, $\text{med}(\hat{V}) = \text{med}(\hat{A}) = a$.

O ângulo $A\hat{O}B$ é um ângulo externo do triângulo OVA. Por isso, a medida desse ângulo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele:

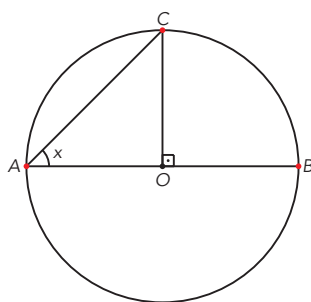
$$b = \text{med}(\hat{V}) + \text{med}(\hat{A}) \Rightarrow b = a + a \Rightarrow b = 2a$$

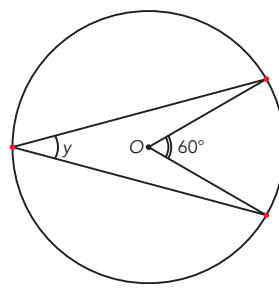
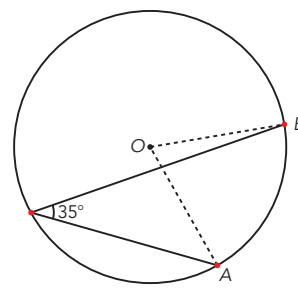
Ou seja: $a = \dfrac{b}{2}$

Como $b = \text{med}(\overset{\frown}{AB})$, também podemos escrever: $a = \dfrac{\text{med}(\overset{\frown}{AB})}{2}$

Concluímos, assim, que:

> A medida de um **ângulo inscrito** é igual à metade da medida do ângulo central correspondente.

Exemplos:

$x = \text{med}(B\hat{A}C) = \dfrac{\text{med}(B\hat{O}C)}{2} =$

$= \dfrac{90°}{2} = 45°$

$y = \dfrac{60°}{2} = 30°$

$35° = \dfrac{\text{med}(\overset{\frown}{AB})}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \text{med}(\overset{\frown}{AB}) = 70°$

$\text{med}(A\hat{O}B) = \text{med}(\overset{\frown}{AB}) = 70°$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

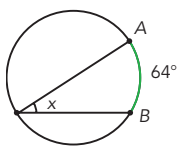
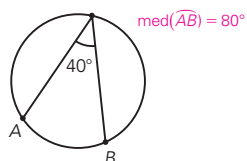
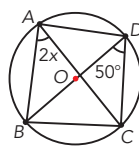
Proposta para o estudante

Para apresentar aos estudantes outros exemplos relacionados à demonstração da relação entre as medidas do ângulo central e do ângulo inscrito, indicamos a referência a seguir:

CLUBES DE MATEMÁTICA DA OBMEP. Ângulo central e ângulo inscrito. *Clubes de Matemática da Obmep*, [*s. l.*], [20--?]. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/angulo-central-e-angulo-inscrito-deducao-da-relacao/. Acesso em: 24 jun. 2022.

Faça as atividades no caderno.

20. No caderno, determine em cada caso a medida:

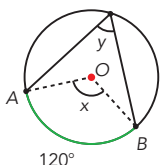
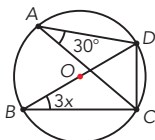
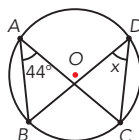
a) x do ângulo; $x = 32°$

b) x e y dos ângulos; $x = 120°$; $y = 60°$.

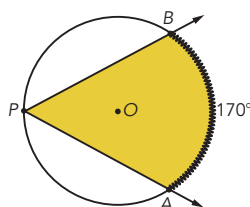
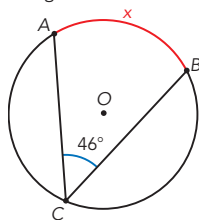
c) angular do arco $\widehat{AB}$; $med(\widehat{AB}) = 80°$

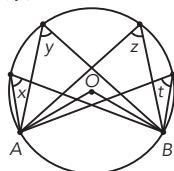
d) x do ângulo; $x = 10°$

e) x do ângulo; $x = 25°$

f) x do ângulo. $x = 44°$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

21. Camila caminhava em uma pista de corrida que tem formato circular. Uma amiga, Gabriela, que está na posição P, avista Camila quando ela está na posição A e a acompanha visualmente até a posição B, conforme o esquema a seguir. Sabendo que Camila percorreu o equivalente a um arco de circunferência de medida angular de 170°, qual é a medida do ângulo de visão de Gabriela enquanto acompanha a amiga na trajetória de A até B? 85°

Banco de imagens/Arquivo da editora

22. Na figura a seguir, sabendo que a medida do ângulo inscrito é 46°, determine a medida angular do arco de circunferência $\widehat{AB}$ correspondente a esse ângulo. 92°

23. Sabendo que $med(A\hat{O}B) = 120°$, calcule x, y, z e t.
$x = y = z = t = 60°$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Orientações didáticas

Atividades

As atividades **20** a **23** têm por objetivo trabalhar a relação entre o comprimento de arco de circunferência e as aberturas de ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência.

Caso os estudantes apresentem dúvidas, sugerimos que seja feita a correção das atividades na lousa, reforçando que a medida de um ângulo inscrito é igual à metade da medida do ângulo central e que ambos os ângulos correspondem ao mesmo arco de circunferência.

Orientações didáticas

Volume de um prisma e de um cilindro

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA19** ao propor a resolução e elaboração de problemas envolvendo medidas de volumes de prismas e cilindros.

Sugerimos que os exemplos sejam resolvidos com os estudantes. No exemplo do reservatório de água, cujo formato se parece com um cilindro, verifique se os estudantes compreenderam que, para medir a capacidade do reservatório, precisamos calcular o volume dele.

Espera-se que os estudantes percebam que a medida da altura do cilindro e a medida de comprimento do diâmetro da base do cilindro estão em metros, portanto, ao calcular o produto da medida de área da base (m^2) pela medida da altura do cilindro (m), obtemos a unidade metros cúbicos (m^3).

Chame a atenção dos estudantes para a relação entre metros cúbicos e litros. Caso eles tenham dúvidas, recorde o processo de conversão, destacando que $1\ m^3 = 1\ 000\ dm^3 = 1\ 000\ L$.

Questione os estudantes sobre as características comuns e as diferenças entre o prisma e o cilindro. Espera-se que eles percebam que ambos são figuras geométricas espaciais, sendo que o prisma é formado por faces poligonais e o cilindro é um corpo redondo.

Volume de um prisma e de um cilindro

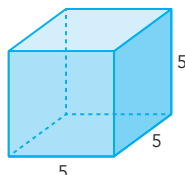
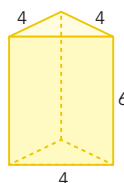
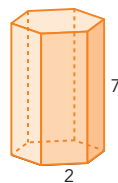
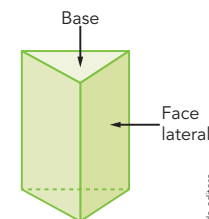
Os **prismas retos** são sólidos geométricos formados apenas por superfícies planas. Duas delas são as bases limitadas por polígonos congruentes e posicionadas paralelamente, e as demais são as faces laterais com formato de retângulos situados em planos perpendiculares às bases.

Base

Face lateral

A medida de volume de um prisma é obtida pelo produto da medida de área de uma das bases (A_{base}) pela medida da altura (h) do prisma.

$$V_{prisma} = A_{base} \cdot h$$

Verifique os seguintes exemplos:

$$V_{prisma} = A_{quadrado} \cdot h$$
$$V_{cubo} = (5 \cdot 5) \cdot 5$$
$$V_{cubo} = 125$$

$$V_{prisma} = A_{triângulo} \cdot h$$
$$V_{prisma} = \left(4 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{4}\right) \cdot 6$$
$$V_{prisma} = 24\sqrt{3}$$

$$V_{prisma} = A_{hexágono} \cdot h$$
$$V_{prisma} = 6 \cdot \left(2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{4}\right) \cdot 7$$
$$V_{prisma} = 42\sqrt{3}$$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Note que para determinar a medida de área do hexágono podemos dividi-lo em 6 triângulos equiláteros. Calculamos a medida de área de 1 desses triângulos equiláteros e multiplicamos o resultado por 6, descobrindo, assim, a medida de área do hexágono.

Os cilindros circulares retos também possuem 2 bases paralelas que são circulares e congruentes.

A medida de volume de um cilindro é parecida com a medida de volume de um prisma reto. Para calcular a medida de volume dele, multiplicamos a medida de área da base (A_{base}) pela medida da altura (h) do cilindro.

$$V_{cilindro} = A_{base} \cdot h = A_{círculo} \cdot h$$
$$V_{cilindro} = \pi r^2 \cdot h$$

Tiago Donizete Leme/Arquivo da editora

Vamos calcular a medida de volume de uma lata de ervilha:

$$V_{lata} = \pi r^2 \cdot h$$
$$V_{lata} = 16\pi \cdot 12 = 192\pi \simeq 602{,}88$$

A medida de volume da lata é, aproximadamente, $602{,}88\ cm^3$.

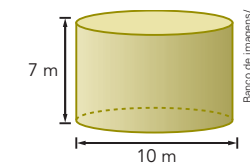
A capacidade do reservatório de água

Um reservatório de água potável tem o formato cilíndrico com altura medindo 7 m e diâmetro da base medindo 10 m. Quantos litros de água cabem nesse reservatório?

Banco de imagens/Arquivo da editora

$$A_{base} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{10}{2}\right)^2 = \pi \cdot 5^2 = 25 \cdot \pi\text{, em metros quadrados.}$$

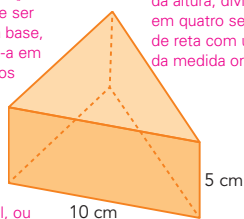
$$V = A_{base} \cdot h = 25\pi \cdot 7 = 175\pi\text{, em metros cúbicos.}$$

Como $1\ m^3 = 1\ 000\ dm^3 = 1\ 000\ L$, então, a medida de capacidade do reservatório é $175\ 000\pi$ L, aproximadamente, 549 500 litros de água.

28. b) Exemplo de resposta: A medida de volume de um cilindro é proporcional à medida da altura. Medindo, com uma régua, basta retirar uma medida de volume correspondente a $\frac{1}{4}$ da medida da altura do líquido no vidro. No caso, essa medida da altura é 3,5 cm.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

24. Considere um prisma triangular reto em que a base é um triângulo equilátero de lado medindo 10 cm e a altura do prisma mede 5 cm.

b) Há várias soluções possíveis. Pode ser pela divisão da base, transformando-a em quatro triângulos equiláteros semelhantes ao original, cada um com lados com a metade da medida original, ou pode ser pela divisão da altura, dividindo-a em quatro segmentos de reta com um quarto da medida original.

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Calcule a medida de volume desse prisma. a) $125\sqrt{3}$ cm³

b) Esse prisma foi decomposto em quatro prismas menores, de mesmo volume. Discuta os possíveis formatos da base desses prismas. Para ajudar, faça um desenho no caderno.

25. Desenhe, no caderno, um prisma hexagonal (a base é um hexágono) e responda às seguintes perguntas:

a) Quantas arestas, vértices e faces tem esse prisma? 18 arestas, 12 vértices e 8 faces.

b) Se a base for um hexágono regular de lado medindo 6 cm e a altura medir 10 cm, qual será a medida de volume desse prisma? $540\sqrt{3}$ cm³

26. Calcule a medida de volume de um cilindro circular reto, sendo a base um círculo de medida do diâmetro 20 cm e a medida da altura 30 mm. $300 \cdot \pi$ cm³

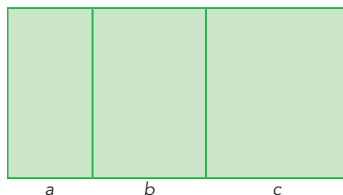
27. Qual é a medida de capacidade, em litros, de um garrafão de água que tem o formato cilíndrico com base de medida do diâmetro 30 cm e medida da altura 40 cm? Aproximadamente 28 L.

28. Um pigmento líquido é vendido em um vidrinho cilíndrico de base com medida do diâmetro 30 mm. O conteúdo do remédio é 100 mL.

a) Qual é a medida da altura, em centímetros, da parte ocupada pelo pigmento no vidrinho? Aproximadamente 14 cm.

b) A receita de uma tinta utiliza 25 mL de um pigmento. Se o usuário não tiver um medidor de capacidade, como poderá separar o volume determinado na receita?

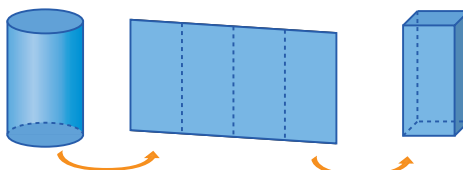
29. Uma lata de tinta é representada por um bloco retangular de dimensões medindo 23 cm por 23 cm por 34,1 cm. Um galão é representado por um cilindro de diâmetro medindo 16 cm e altura medindo 18 cm. Quantos galões de tinta cabem em uma lata? 29. 5 galões.

30. A figura a seguir representa a planificação da superfície lateral de um prisma triangular reto, em que as medidas *a*, *b*, *c* e *d*, em centímetros, são números inteiros consecutivos, nessa ordem, e somam 18.

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Verifique se a base desse prisma é um triângulo retângulo. $5^2 = 3^2 + 4^2$

b) Calcule a medida de volume do prisma. 36 m³

c) Calcule a medida de área total do prisma (soma das medidas de área das cinco faces). 84 m²

31. A superfície lateral de um cilindro reto foi planificada e, depois, dobrada em quatro partes iguais, permitindo formar a lateral de um prisma reto de base quadrada, conforme mostra a figura.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Qual desses sólidos tem volume maior? O cilindro.

32. Elabore um problema que contenha uma caixa-d'água com o formato de um bloco retangular de dimensões medindo 1 m × 1 m × 0,6 m e uma torneira que despeja 30 litros de água por minuto. Depois, troque o problema com um colega para que um resolva o problema elaborado pelo outro.

33. O desenho encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

33. Na abertura desta Unidade, você conheceu os diversos tipos de silos para pequenas propriedades rurais. Um pequeno agricultor deseja montar um silo cincho para substituir um silo trincheira em formato de bloco retangular de dimensões medindo 5 m × 2 m × 1,5 m. Exemplo de resposta: $r = 1,5$ m e $h = 2,13$ m. Estime as medidas das dimensões do silo cincho que substitua adequadamente o silo trincheira. Faça um desenho no caderno, especificando as medidas.

32. Exemplo de resposta: Quanto tempo leva para encher uma caixa-d'água com o formato de um bloco retangular, cujas medidas das dimensões são 1 m × 1 m × 0,6 m, com uma torneira que despeja 30 litros de água por minuto? Resposta: 20 min.

Orientações didáticas

Atividades

As atividades **24** a **33** têm por objetivo consolidar e ampliar a resolução de problemas envolvendo o cálculo de medidas de volume de prismas e cilindros em diferentes contextos.

Nas atividades **30** e **31**, verifique se os estudantes percebem que a superfície lateral planificada de um prisma, qualquer que seja a forma das bases, e a de um cilindro têm a forma de um retângulo.

Na atividade **32**, a elaboração de problemas tendo como referencial etapas predefinidas contribui para o desenvolvimento do pensamento computacional. Aproveite a troca com os colegas para instigar uma reflexão sobre as etapas e os procedimentos utilizados para formular e, também, para resolver o problema.

Destacamos a atividade **33**, em que é retomada a situação da abertura desta Unidade. Espera-se que os estudantes percebam que a medida de volume do silo trincheira com formato de bloco retangular é 15 m³ e, portanto, deve-se encontrar um silo cincho, no formato que lembra um cilindro, com mesma medida de volume.

Orientações didáticas

Matemática e tecnologias

Na BNCC

Esta seção favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA11** ao apresentar um problema envolvendo relações entre arcos e ângulos na circunferência. Mobiliza a **CG05**, a **CEMAT02** e a **CEMAT05** com a utilização de ferramentas matemáticas e tecnologia digital para resolver o problema proposto e produzir argumentos matemáticos convincentes ao explicar uma questão. O próprio objetivo da seção favorece o desenvolvimento do TCT *Ciência e Tecnologia*.

Esta seção tem por objetivo explorar os recursos digitais como ferramentas que contribuem de modo significativo para a construção, consolidação e ampliação dos conceitos de arco e de ângulos da circunferência. Se possível, utilize computadores do laboratório de informática ou outros recursos tecnológicos que permitam colocar em prática a atividade sugerida.

Matemática e tecnologias

Faça as atividades no caderno.

Arcos e ângulos na circunferência

Você já conhece o *software* GeoGebra, que combina Geometria, Álgebra, tabelas, gráficos, Estatística e cálculos em uma única aplicação. Ao criar uma conta gratuita, é possível produzir e gravar os próprios materiais e colaborar com outros usuários.

Victor Metelskiy/Shutterstock

Acesse o programa em: https://www.geogebra.org/geometry. Você pode escolher entre vários modos de exibição (com ou sem malha, com ou sem eixos cartesianos, etc.).

Antes de realizar a atividade, siga as orientações do professor para inserir a figura do gol no GeoGebra. Feito isto, leia o problema e bom trabalho!

Em um treinamento de chutes a gol, um jogador de futebol, posicionado na marca do pênalti, sempre acerta o gol, vendo as traves com um ângulo de medida 45°. Sabendo que o ponto A é a posição do jogador na marca do pênalti e que os pontos B e C representam o limite das traves, responda: Quais são os outros pontos de localização desse jogador para que ele sempre acerte o gol visualizando o ângulo que mede 45°?

A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Para resolver esse problema, siga estes passos:

1º) Na aba "Ferramentas" selecione o ícone "Segmento" e clique com o botão esquerdo do *mouse* no ponto A e, depois, no ponto B, obtendo o segmento de reta $\overline{AB}$. Repita esse processo para obter o segmento de reta $\overline{AC}$.

2º) Selecione o ícone "Ângulo" e verifique se o ângulo $B\hat{A}C$ mede 45°. Para isto, clique com o botão esquerdo no *mouse* nos pontos B, A e C respectivamente.

3º) Agora, selecione o ícone "Mediatriz" e clique com o botão esquerdo do *mouse* no ponto B e depois no ponto C. Repita esse processo, mas, dessa vez, clicando no ponto A e depois no ponto C. Duas mediatrizes serão construídas e com isto surgirá um ponto de interseção entre elas.

4º) Nomeie o ponto de interseção obtido no 3º passo de D, selecionando o ícone "Ponto" e clicando na interseção.

5º) Selecione o ícone "Círculo dados o centro e um de seus pontos", clique no ponto D e, depois, no ponto B, obtendo uma circunferência de centro D e com os pontos A, B e C pertencentes a ela.

6º) Agora, selecione o ícone "Mover", clique no ponto A e, com o botão esquerdo apertado, mova o ponto ao longo do arco maior $\overset{\frown}{BC}$ e verifique se a medida do ângulo é mantida em 45°.

1. Explique por que ao mover o ponto A ao longo do arco maior $\overset{\frown}{BC}$ a medida do ângulo $B\hat{A}C$ é sempre 45°.

Explore mais sobre arco, ângulo central e ângulo inscrito na circunferência, acessando o *link*: https://www.geogebra.org/m/gchst7rh (acesso em: 20 abr. 2022.). Mova os pontos C, D e E, verifique o que acontece com as medidas dos ângulos a e b e qual é a relação entre elas.

Exemplo de resposta: A medida do ângulo é sempre 45° porque é um ângulo inscrito na circunferência. Logo, a medida dele é a metade da medida do arco menor $\overset{\frown}{BC}$, que é 90°.

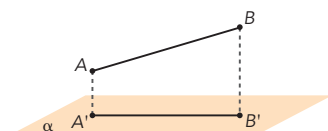
Projeções ortogonais, vistas e perspectiva

EF09MA17

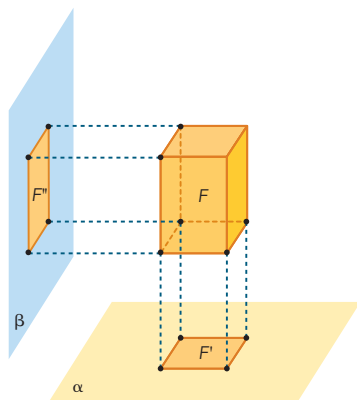
Projeção ortogonal

Dados um ponto *P* e um plano α, chama-se **projeção ortogonal de *P* sobre α** o ponto *P'*, que é a interseção de α com a reta perpendicular a α que passa por *P*.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados um segmento de reta $\overline{AB}$ e um plano α, chama-se **projeção ortogonal de $\overline{AB}$ sobre α** o segmento de reta $\overline{A'B'}$ contido em α e formado por pontos que são as projeções ortogonais dos pontos de $\overline{AB}$ sobre α.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Dados uma figura qualquer *F* e um plano α, chama-se **projeção ortogonal de *F* sobre α** a figura *F'* contida em α e formada por pontos que são as projeções ortogonais dos pontos da figura *F* sobre α.

Considere, por exemplo, a situação em que *F* é um prisma reto de base quadrada. Quando a projeção se faz sobre um plano paralelo à base, a projeção ortogonal resultante é uma região congruente à base.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Uma mesma figura tridimensional pode ter projeções ortogonais diferentes, dependendo do plano em que se realiza a projeção. Se a projeção do prisma anterior fosse feita sobre o plano β paralelo a uma das faces laterais, a projeção ortogonal resultante seria *F"*.

Orientações didáticas

Projeção ortogonal

Na BNCC

Este capítulo favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA17** por promover o trabalho com vistas ortogonais de figuras espaciais e a aplicação desse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.

Inicie o capítulo, explorando de modo intuitivo a ideia de projeção ortogonal. Como sugestão, converse com os estudantes sobre a comparação que podemos fazer entre a projeção ortogonal de figuras geométricas sobre o plano e a sombra de um objeto, cuja secção paralela ao plano tenha o mesmo formato, projetada nesse plano a partir de uma fonte de luz perpendicular a esse plano. Se possível, nesse contexto, crie situações para que os estudantes possam visualizar a sombra de alguns objetos.

Depois, apresente a definição de projeção ortogonal de um ponto, de um segmento e de uma figura tridimensional, acompanhando a leitura e explicação do texto.

Orientações didáticas

Vistas ortogonais e perspectivas

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA17** por promover o trabalho com vistas ortogonais de figuras espaciais e a aplicação desse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva.

Participe

Este boxe tem por objetivo explorar várias vistas ortogonais de um mesmo sólido geométrico e verificar se uma mesma vista pode estar relacionada a mais de um sólido geométrico. Verifique se os estudantes compreenderam que dependendo da vista, frontal, lateral, superior ou inferior, que se tem, obtemos um tipo de projeção ortogonal. Incentive o diálogo, a troca de entendimento, o compartilhamento de estratégias, a autonomia e a produção de argumentos matemáticos convincentes para justificar o que é pedido, sempre respaldados no respeito mútuo e na diversidade de saberes, valorizando assim o desenvolvimento da **CG09**, da **CG10** e da **CEMAT02**.

Na sequência, analise, com os estudantes, as vistas de cada caixa de presente ilustrada. Caso eles apresentem dúvidas, verifique a possibilidade de disponibilizar caixas ou outros objetos com os formatos sugeridos.

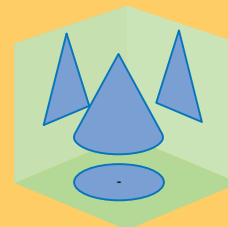
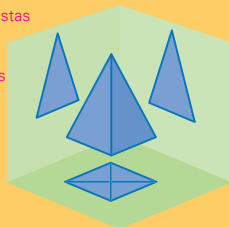
I. Exemplo de resposta: Ambos os sólidos têm vistas laterais na forma triangular, mas os sólidos são diferentes: uma pirâmide e um cone. Como essas vistas são regiões poligonais, podem ser encontradas em diferentes sólidos.

Vistas ortogonais e perspectivas

Participe

Faça as atividades no caderno.

I. Podemos ter várias vistas ortogonais de um mesmo sólido geométrico, mas a mesma vista pode estar relacionada a mais de um sólido geométrico? Opine e justifique, analisando as vistas laterais dos dois sólidos apresentados a seguir.

II. O cubo, pois as 3 vistas são regiões poligonais quadradas; o cilindro, pois as 2 vistas laterais são regiões poligonais quadradas e a vista superior é uma região circular.

III. Como as vistas são regiões planas, existem sólidos diferentes com vistas iguais. Por isso, para caracterizar um sólido geométrico usando suas vistas, é preciso que ele seja projetado em 3 planos não paralelos; em outras palavras, são necessárias 3 vistas ortogonais distintas não paralelas.

Ilustrações: Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

II. Considere agora um cubo de aresta medindo 10 cm e um cilindro de altura medindo 10 cm e raio da base medindo 5 cm. Pensando em 2 vistas ortogonais laterais e na vista ortogonal superior de cada um deles, responda: Qual sólido geométrico apresenta todas as vistas iguais? E qual sólido geométrico apresenta vistas distintas? Justifique.

III. De acordo com sua resposta às questões anteriores, conclua: Quantas vistas são necessárias para determinar um sólido geométrico?

Gustavo trabalha em uma empresa que cria caixas de presente.

Ilustrações: Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Gustavo usa um programa de computador que modela cada caixa e permite analisar cada uma delas de vistas distintas, segundo posições específicas do observador, como mostra o quadro a seguir.

Modelo	Vista lateral	Vista superior	Vista inferior

Ilustrações: Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

Proposta para o professor

Segue uma sugestão de vídeo explicativo, no qual é possível obter as vistas ortogonais de um icosaedro no *software* GeoGebra.

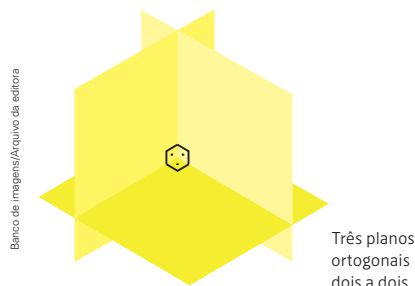
PROJEÇÕES Ortogonais de um Icosaedro [*s. l.*: *s. n.*], 2018. 1 vídeo (1 min). Publicado pelo canal Sérgio Dantas. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=Tww6K5HiUjU. Acesso em: 24 jun. 2022.

Chamamos de **vista** a projeção ortogonal de uma figura tridimensional em um plano segundo uma direção específica. No caso das caixas de presente, o que a tela do computador exibe são as vistas de cada figura segundo planos determinados:

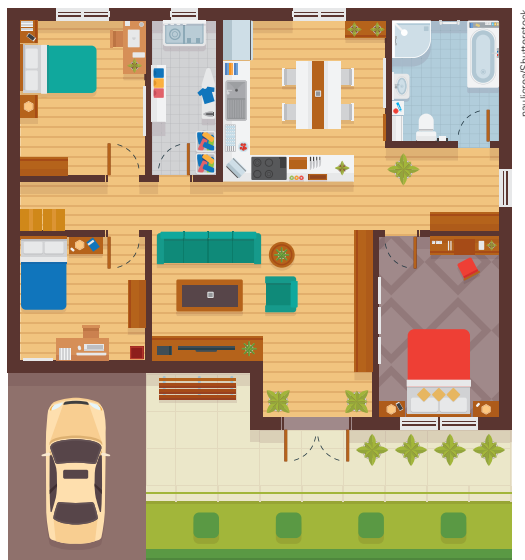
- a vista lateral é a projeção da figura que representa a caixa em um plano vertical, paralelo a alguma face lateral da caixa;
- a vista superior é a projeção da figura que representa a caixa em um plano horizontal paralelo à parte "de cima" da caixa;
- a vista inferior é a projeção da figura que representa a caixa em um plano horizontal paralelo à parte "de baixo" da caixa.

As **vistas ortogonais** são as projeções de uma figura realizadas em planos ortogonais. A figura a seguir representa três planos ortogonais dois a dois.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Três planos ortogonais dois a dois.

E, afinal, o que são vistas?

Analise a seguir um exemplo de planta baixa de uma casa.

naulicrea/Shutterstock

Essa planta dá a ideia de uma **vista superior** do imóvel. Repare que os móveis estão representados no plano como se fossem vistos "de cima" para que o comprador tenha uma ideia do espaço ocupado por eles.

Orientações didáticas

Vistas ortogonais e perspectivas

Dando continuidade a este tópico, proponha a leitura do texto, questionando os estudantes sobre o que entendem a respeito da ideia de vistas em relação à posição do observador.

Comente que a vista superior é comumente utilizada na representação de plantas baixas de casas e apartamentos. Proponha um intervalo de tempo para que os estudantes analisem a planta baixa do apartamento representada no livro. Depois, incentive o compartilhamento das considerações sobre a análise feita. Verifique se os estudantes compreenderam por que a vista utilizada na elaboração de uma planta baixa é a vista superior.

Proposta para o professor

Considere a atividade indicada no *site* a seguir que apresenta a planta baixa de uma casa popular.

CLUBES DE MATEMÁTICA DA OBMEP. Problema: Planta baixa. *Clubes de Matemática da Obmep*, [*s. l.*], [20--?]. Disponível em: http://clubes.obmep.org.br/blog/problema-planta-baixa/. Acesso em: 24 jun. 2022.

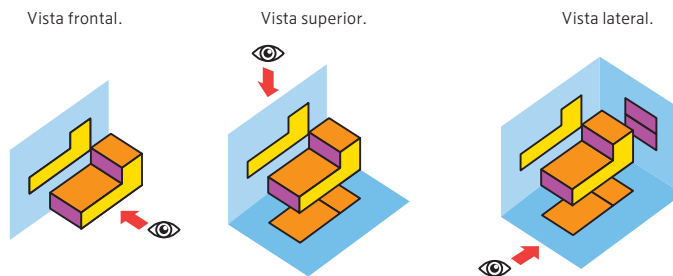
Orientações didáticas

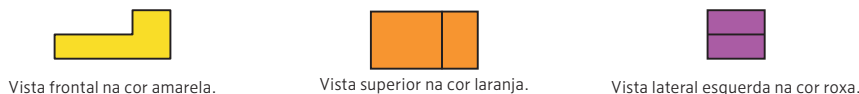
Atividades

Antes de propor a resolução das atividades, converse com os estudantes sobre a importância de estabelecermos referências de posição, antes de representarmos uma figura geométrica espacial ou um objeto tridimensional, por meio de projeções ortogonais. Verifique se eles compreenderam que, antes de utilizarmos a vista frontal, a vista lateral, a vista superior e a vista inferior, precisamos determinar qual lado do objeto será considerado como a frente dele.

Para auxiliar a compreensão dos conhecimentos estudados neste capítulo, é importante que os estudantes investiguem o objeto apresentado, ressaltando as suas propriedades e características.

Destacamos a atividade **1**, em que se objetiva analisar cada um dos pares de projeções ortogonais (vista lateral e vista de cima) para identificar o sólido correspondente. Caso os estudantes apresentem dúvidas, sugerimos o uso de material concreto para que se faça a associação correta entre as vistas e o sólido.

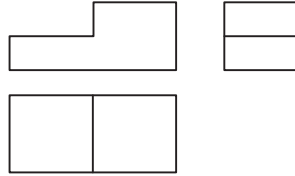
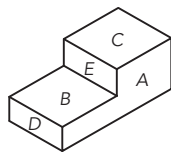
As projeções ortogonais são recursos para representar figuras tridimensionais no plano. Vamos utilizar 3 projeções ortogonais: a vista frontal, a vista superior e uma vista lateral. Antes, é preciso determinar a parte do objeto a ser considerada a frente. Analise a situação apresentada.

A representação da figura tridimensional composta pelas vistas projetadas, dando impressão de profundidade, é chamada de **perspectiva** da figura.

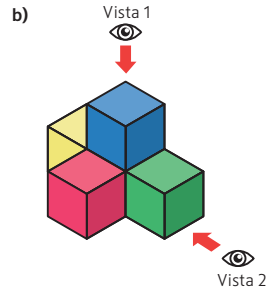
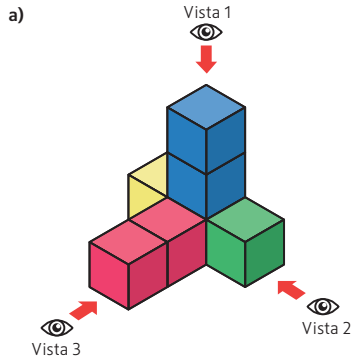
Note que, na vista frontal, o observador está olhando de frente para o objeto. Na vista superior, ele está olhando o objeto de cima, e, na vista lateral, está olhando uma das faces laterais do objeto.

No *site* http://www.drb-m.org/cad/3vistasortogonais.htm (acesso em: 19 abr. 2022) há algumas animações sobre vistas ortogonais. Podemos verificar que, em alguns casos, 2 objetos com formatos diferentes podem ter vistas ortogonais iguais.

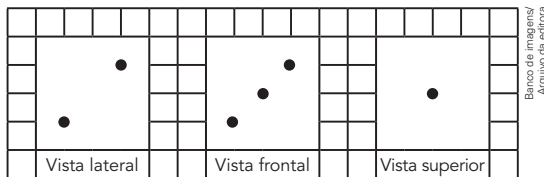
Atividades

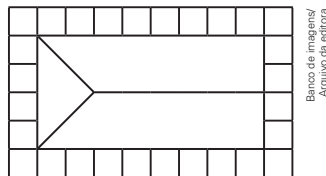
Faça as atividades no caderno.

1. Analisando cada um dos pares de projeções ortogonais (vista lateral e vista de cima), escreva no caderno a correspondência de cada par com o sólido geométrico que a represente. **A-I; B-III; C-II.**

2. Copie os desenhos a seguir no caderno. Depois, escreva, nas vistas ortogonais, as letras do desenho que correspondem às respectivas faces. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Ilustrações: Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

3. Desenhe, em uma malha quadriculada, as vistas das figuras de acordo com as posições indicadas sabendo-se que não há cubinhos escondidos atrás das pilhas. As respostas encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

4. Desenhe, no caderno, o dado em perspectiva de acordo com as vistas a seguir. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Banco de imagens/Arquivo da editora

5. Esta imagem é a vista superior de uma casa.

Banco de imagens/Arquivo da editora

Sabemos que na vista frontal da casa há 1 porta e 1 janela e na vista lateral há 2 janelas, todas com formato retangular. Com base nessas informações, desenhe no caderno uma possibilidade para essa casa em perspectiva. O exemplo de resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Orientações didáticas

Atividades

A atividade **2** tem por objetivo identificar e associar a vista lateral, a vista frontal e a vista superior do sólido apresentado, de modo a contribuir para o desenvolvimento da percepção espacial geométrica.

As atividades **3** a **5** têm por objetivo explorar a resolução de problemas com o auxílio da malha quadriculada para reconhecer vistas ortogonais de figuras espaciais e aplicar esse conhecimento para desenhar objetos em perspectiva, como um dado e uma casa.

Orientações didáticas

Na Unidade

Na BNCC

Esta seção favorece o desenvolvimento das habilidades exploradas ao longo de toda a Unidade e mobiliza com maior ênfase a **CEMAT02**, a **CEMAT06** e a **CG02** ao propor a resolução de atividades diversas por meio de diferentes contextos e estratégias de resolução.

Esta seção traz atividades dos principais conteúdos abordados na Unidade que podem ser utilizadas como ferramentas de avaliação. Proponha a resolução das atividades individualmente. Acompanhe os estudantes durante a realização delas e registre avanços e dificuldades para, ao final, propor novas atividades para remediação coletiva ou individual de defasagens, conforme cada caso.

A seguir, listamos algumas sugestões e estratégias para remediação.

As atividades **1**, **2** e **6** requerem que o estudante aplique a fórmula do comprimento de uma circunferência, logo, tem de saber o conceito de raio.

Na atividade **3**, o estudante precisa mobilizar conhecimentos anteriores sobre área do triângulo equilátero e área do círculo. Erros nessa atividade podem indicar que o estudante não percebeu que a área do setor circular corresponde a $\frac{1}{6}$ da área do círculo, pois o ângulo central desse setor mede 60°, já que é ângulo de triângulo equilátero.

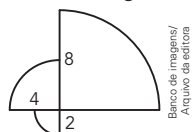
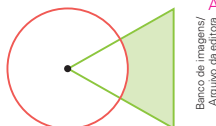
Na atividade **4**, objetivou-se a resolução de um problema envolvendo o cálculo de volume de sólidos geométricos. Erros nessa atividade indicam que os estudantes não compreenderam a fórmula para o cálculo da medida de volume do bloco retangular e do cilindro. Retome os exemplos da teoria ou apresente outros e verifique se os estudantes percebem que a medida de volume do cilindro deve ser subtraída da medida de volume do bloco retangular para gerar a cavidade na peça.

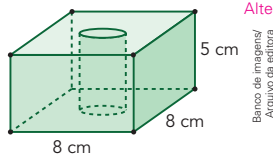
A atividade **5** explora a decomposição e composição de uma figura plana para calcular a medida de área da base de um prisma. Erros nessa atividade podem indicar que os estudantes não conseguiram visualizar a divisão da figura em partes, a decomposição mais simples em 2 retângulos e 1 quadrado. Ou também podem não ter imaginado um prisma cuja base tem uma forma poligonal côncava. Auxilie-os nessas visualizações.

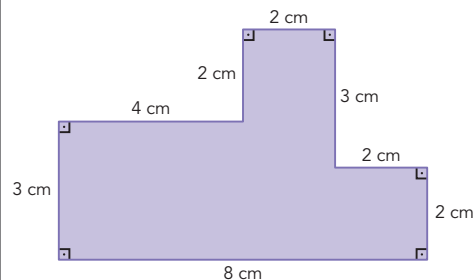
Na Unidade

1. **(Cefet-RJ)** Quando o comprimento de uma circunferência aumenta de 8 cm para 14 cm o raio da circunferência aumenta de:
   a) $\frac{\pi}{6}$ cm
   b) $\frac{3}{\pi}$ cm
   c) $\frac{\pi}{3}$ cm
   d) 1,5 cm
   e) 3 cm
   Alternativa **b**.

2. **(Embraer-SP)** Na figura, têm-se 3 arcos de um quarto de circunferência, de raios iguais a 8, 4 e 2. A soma dos comprimentos desses 3 arcos de um quarto de circunferência é igual a: Alternativa **c**.

   a) 14 π b) 12 π c) 7 π d) 6 π

3. **(Udesc-SC)** Uma circunferência intercepta um triângulo equilátero nos pontos médios de dois de seus lados, conforme mostra a figura, sendo que um dos vértices do triângulo é o centro da circunferência.
   Alternativa **e**.

   Se o lado do triângulo mede 6 cm, a área da região destacada na figura é:
   a) $9\left\{2\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}\right\}$ cm²
   b) $9\left\{\sqrt{3}-\frac{\pi}{18}\right\}$ cm²
   c) $9\left\{\sqrt{3}-\pi\right\}$ cm²
   d) $9\left\{\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right\}$ cm²
   e) $9\left\{\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}\right\}$ cm²

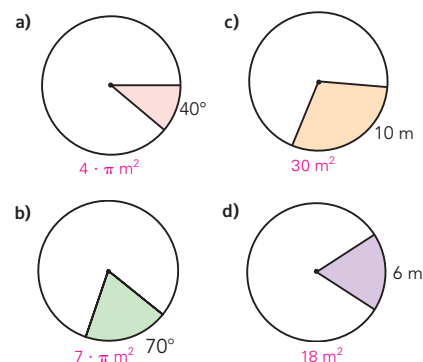
4. Uma peça de acrílico tem o formato de um bloco retangular com base de 8 cm por 8 cm e altura de 5 cm. Uma cavidade cilíndrica de diâmetro 3 cm atravessa o bloco da base inferior até a superior.
   Alternativa **d**.

   O volume de acrílico nessa peça é, aproximadamente:
   a) 225 cm³
   b) 240 cm³
   c) 275 cm³
   d) 285 cm³

5. **(Unisa-SP)** A figura representa a base de um prisma reto de 5 cm de altura.

   Se todos os ângulos dessa base são retos, o volume ocupado por esse prisma é igual a: Alternativa **e**.
   a) 140 cm³
   b) 135 cm³
   c) 145 cm³
   d) 150 cm³
   e) 130 cm³

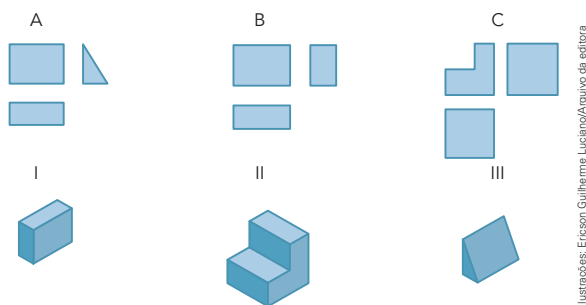
6. Uma menina brinca com um aro de 1 m de diâmetro, rodando-o sobre o chão. Que distância percorre a menina quando o aro completa 10 voltas?
   Aproximadamente 31,4 m.

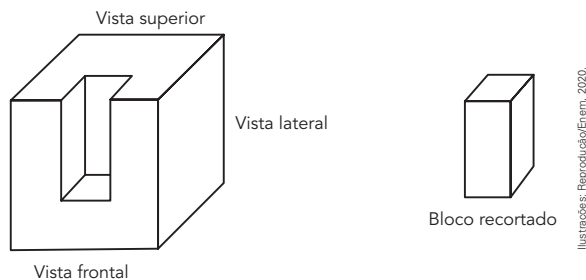
7. Uma corda determina em uma circunferência um arco que mede 80°. Sendo 20 cm o comprimento desse arco, determine a medida do diâmetro dessa circunferência. $\frac{90}{\pi}$ cm

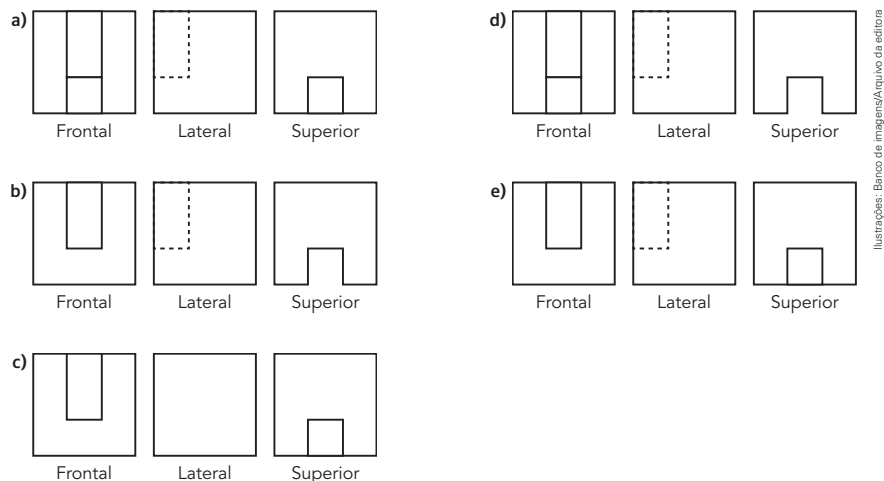
8. Determine a área de cada setor circular representado a seguir, em que 6 m é a medida do raio.

Reprodução do Livro do Estudante em tamanho reduzido.

Para contemplar o objetivo da Unidade de resolver problemas estabelecendo relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência são indicadas as atividades **7** e **8**. Se os estudantes tiverem dificuldades na atividade **8**, auxilie-os a calcular a medida de área do setor utilizando a regra de três, estabelecendo proporção entre as medidas de área do círculo e do setor, entre o ângulo 360° e a medida do ângulo central do setor ou entre a medida de comprimento da circunferência e a medida de comprimento do arco do setor.

9. Para cada conjunto de vistas, qual é o sólido correspondente? Responda no caderno.
A-III; B-I; C-II.

Ilustrações: Ericson Guilherme Luciano/Arquivo da editora

10. (Enem) No projeto de uma nova máquina, um engenheiro encomendou a um torneiro mecânico a fabricação de uma peça, obtida a partir do recorte em um cubo, como ilustrado na figura. Para isso, o torneiro forneceu, juntamente com o desenho tridimensional da peça, suas vistas frontal, lateral e superior, a partir das posições indicadas na figura. Para facilitar o trabalho do torneiro, as arestas dos cortes que ficam ocultos nas três vistas devem ser representadas por segmentos tracejados, quando for o caso.
Alternativa **e**.

Ilustrações: Reprodução/Enem, 2020.

As vistas frontal, lateral e superior que melhor representam o desenho entregue ao torneiro são:

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Orientações didáticas

Na Unidade

Para verificar se os estudantes conseguem reconhecer vistas ortogonais em figuras espaciais, indicamos as atividades **9** e **10**.

A atividade **9** tem por objetivo consolidar o conhecimento sobre projeção ortogonal, explorando as vistas lateral, frontal e superior. Erros nessa atividade indicam a dificuldade em associar aos sólidos geométricos o conjunto de vistas correspondentes. Mais uma vez, ajude-os nessas visualizações apresentado objetos parecidos com esses para que eles compreendam as posições dessas vistas.

A atividade **10** também explora as vistas lateral, frontal e superior de uma peça representada por um sólido geométrico com uma forma mais complexa: era um cubo do qual foi recortado um bloco retangular.

Outras dificuldades diferentes das listadas podem surgir; por isso, é importante o monitoramento individual e contínuo dos estudantes.

Orientações didáticas

Abertura

Na BNCC

A abertura da unidade permite mobilizar com maior ênfase a **CG01**, a **CG06** e a **CG07** ao utilizar conhecimentos sobre o mundo físico e digital para explicar a realidade, além de levar essas informações para o contexto de relações de trabalho e consumo. Também trata de maneira direta os TCTs *Ciência e Tecnologia*, *Educação para o Consumo* e *Trabalho* ao abordar as novas relações de trabalho e consumo intermediadas pela tecnologia.

Faça a leitura inferencial do texto com os estudantes e busque fazer pausas para tratar de forma inicial os conteúdos do texto. No primeiro parágrafo é feita uma breve introdução sobre os aspectos da mobilidade urbana em grandes cidades. É importante, neste ponto, reconhecer se o local de vida dos estudantes contém essas especificidades, com aplicativos para carros e transporte público, e caso positivo, levantar quais aplicativos são utilizados pelos estudantes e seus familiares. Caso eles não tenham contato diário com esse tipo de tecnologia de mobilidade, apresente as características levando reportagens ou artigos sobre o tema. É uma oportunidade também para relacionar o tema com o conceito de transporte híbrido, em que o usuário utiliza meios de transporte de várias fontes, inclusive caminhada ou bicicletas, para alcançar o seu destino com maior eficiência ou menor custo.

Passageira consultando o mapa no aplicativo do celular.

Reprodução do Livro do Estudante em tamanho reduzido.

Aonde essa função me leva?

As tecnologias digitais têm possibilitado acesso à informação e à comunicação, além de constantemente facilitar situações do dia a dia e criar soluções para problemas do cotidiano. Um exemplo de solução de problemas é aquele que diz respeito à mobilidade urbana. Existem aplicativos de celular que oferecem serviço de transporte privado, ampliando, desse modo as possibilidades de locomoção nas cidades.

As vantagens de aplicativos de mobilidade urbana são muitas, tanto para passageiros quanto para motoristas: passageiros têm a possibilidade de se deslocar mais rápida e confortavelmente do que no transporte público, além de acessar mais facilmente locais com poucas opções de transporte; motoristas podem exercer esse trabalho como fonte de renda secundária ou principal a qualquer momento, sem burocracia.

Assim como nos serviços realizados por táxis, o usuário desses serviços paga, de maneira geral, uma taxa fixa mínima pelo percurso, que é um tipo de taxa de embarque, e uma outra quantia que varia de acordo com a medida da distância ou com a medida de tempo de uso do serviço. Fatores como excesso de trânsito, chuva ou algum grande evento que aumente a demanda pelos serviços podem influenciar na tarifa do deslocamento.

Esses aplicativos possuem um sistema GPS integrado, de modo que passageiros e motoristas têm acesso à exata localização um do outro assim que são conectados pelo aplicativo. Os passageiros recebem ainda a informação de quanto tempo o motorista levará para chegar ao local de embarque. Além disso, é possível visualizar todo o trajeto a ser percorrido pelo motorista até o destino do passageiro e o horário estimado de chegada.

Você já utilizou um aplicativo de mobilidade urbana? Na sua opinião, quais são as desvantagens para passageiros? E para motoristas? Compartilhe com os colegas.

Respostas pessoais. Exemplos de respostas: As desvantagens para ambos podem estar relacionadas à segurança e, para os passageiros, ao preço mais elevado do que o cobrado em transportes públicos, por exemplo.

Orientações didáticas

Abertura

Os parágrafos seguintes apresentam vantagens para os usuários de serviços de transporte, mas que podem ser inclusive vistos como eventuais desvantagens para os operadores do serviço. Com relação às vantagens, levante com a turma ideias sobre o porquê do surgimento desses aplicativos como fonte de renda secundária, alertando-os de que esses aplicativos surgiram inicialmente como aplicativos de caronas, cuja intenção era economizar combustível e reduzir o número de veículos nas ruas ao unir pessoas que fariam o mesmo trajeto para o trabalho, escola ou demais compromissos.

Posteriormente, são apresentadas informações sobre o funcionamento desses aplicativos, e que todos utilizam GPS como método de localização. O GPS é um sistema de geolocalização global, sendo de propriedade do governo dos Estados Unidos, que oferece o serviço de monitoramento e utilização dos satélites GPS. Chame a atenção de quantos fatores em nível global são necessários para viabilizar tais aplicativos.

O contexto dos aplicativos de mobilidade urbana é um tema atual e com muita inserção na realidade dos estudantes, assim, aproveite a leitura e as reflexões propostas para incentivar práticas argumentativas.

Orientações didáticas

Sistema cartesiano

Na BNCC

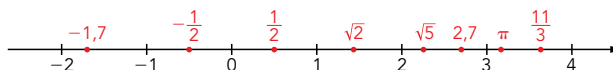
Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA16** ao explorar o sistema cartesiano de coordenadas. Em *Atividades*, mobiliza-se com maior ênfase a **CG09** e a **CEMAT08** ao propor questões que exercitam o diálogo, a empatia e a habilidade de argumentação.

É feita uma recapitulação sobre a representação de números reais em uma reta numérica, portanto, é uma oportunidade para avaliar eventuais defasagens dos estudantes. Inicialmente, é importante ter em mente que a localização de um número real e de coordenadas numéricas em um plano cartesiano é crucial para o cálculo da distância ente dois pontos, e posteriormente para a elaboração de gráficos de funções. Sendo assim, deixe clara a necessidade de uma autoavaliação honesta por parte dos estudantes com relação às suas dificuldades. O Livro do Estudante utiliza expressões como "partindo do zero e chegando ao número *A*, e daí caminhamos para *B*", e essa é uma conduta interessante para muitos estudantes, criando uma espécie de estratégia comum para a abordagem de diversas situações envolvendo coordenadas por meio de expressões típicas do uso cotidiano da língua portuguesa.

Sistema cartesiano ortogonal

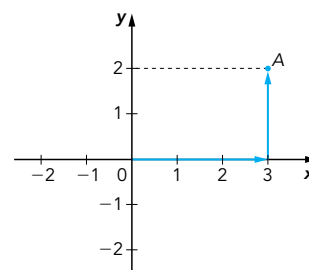
Sistema cartesiano

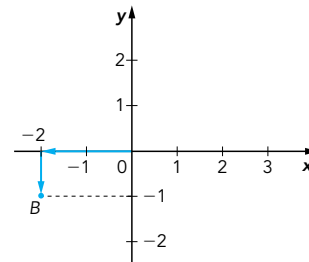
Já aprendemos a representar números reais em uma reta numérica: cada ponto da reta corresponde a um número real, e cada número real corresponde a um ponto na reta. Analise alguns exemplos de números reais na reta numérica.

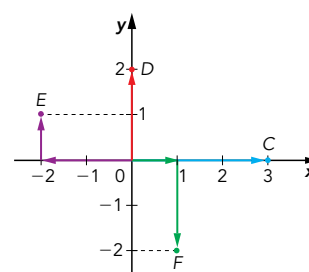
Banco de imagens/ Arquivo da editora

Também aprendemos a representar pares ordenados de números reais por pontos de um plano no qual fixamos um sistema de coordenadas.

O par $(3, 2)$ é representado no ponto *A*, que encontramos assim:

- partindo do 0, na origem do sistema, caminhamos 3 unidades no eixo *x* para a direita;
- daí, caminhamos 2 unidades paralelamente ao eixo *y*, para cima.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

O par $(-2, -1)$ é representado no ponto *B*, assim obtido:

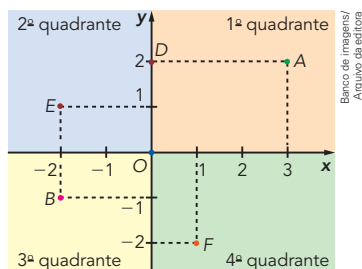
- partindo do 0, caminhamos 2 unidades no eixo *x* para a esquerda;
- daí, caminhamos 1 unidade paralelamente ao eixo *y*, para baixo.

Acompanhe outros exemplos:

$C(3, 0)$
$D(0, 2)$
$E(-2, 1)$
$F(1, -2)$

Proposta para o professor

Proponha as atividades deste capítulo como um método de avaliação diagnóstica, já que os estudantes já têm conhecimento de parte dessas habilidades exigidas. Tome as atividades como uma oportunidade para compreender as defasagens e os pontos fortes da turma.

Vamos recordar algumas nomenclaturas associadas ao sistema cartesiano e conhecer outras:

- o eixo x é o **eixo das abscissas**;
- o eixo y é o **eixo das ordenadas**;
- o ponto O, em que representamos $(0, 0)$, é a origem do sistema de coordenadas;
- em um par ordenado, chama-se **abscissa** a primeira coordenada (o primeiro número na ordem de leitura) e **ordenada** a segunda coordenada (o segundo número na ordem de leitura);
- os eixos x e y dividem o plano em quatro regiões, denominadas **quadrantes** e ordenadas como na figura.

Banco de imagens/Arquivo da editora

O ponto A está no 1º quadrante; E, no 2º quadrante; B, no 3º quadrante; e o F, no 4º quadrante.

Convencionamos que um ponto que esteja na divisa de dois quadrantes (em um dos eixos) pertence a esses dois quadrantes. Por exemplo, o ponto $D(0, 2)$ está no 1º e no 2º quadrante. Com essa convenção, a origem $O(0, 0)$ está nos quatro quadrantes.

O sistema de coordenadas é chamado **sistema cartesiano ortogonal**, ou, simplesmente, **sistema cartesiano**, em homenagem a René Descartes (1596-1650), matemático e filósofo francês, autor do *Discurso sobre o método para raciocinar bem e procurar a verdade nas ciências*, com a primeira publicação feita em 1637.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

1. Represente estes pares ordenados em um sistema cartesiano: A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

$A(4, 3)$ $C(-3, 1)$ $E(3, -2)$ $G(-1, 4)$ $I(0, -5)$

$B(1, 5)$ $D(-2, -4)$ $F(1, -1)$ $H(-4, 0)$ $J\left(2, \frac{2}{5}\right)$

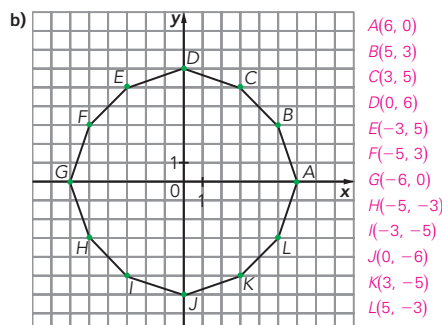
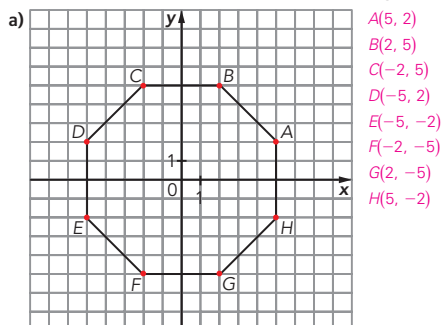
2. Dê as coordenadas dos vértices de cada polígono:

a)

$A(5, 2)$
$B(2, 5)$
$C(-2, 5)$
$D(-5, 2)$
$E(-5, -2)$
$F(-2, -5)$
$G(2, -5)$
$H(5, -2)$

b)

$A(6, 0)$
$B(5, 3)$
$C(3, 5)$
$D(0, 6)$
$E(-3, 5)$
$F(-5, 3)$
$G(-6, 0)$
$H(-5, -3)$
$I(-3, -5)$
$J(0, -6)$
$K(3, -5)$
$L(5, -3)$

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

3. No polígono do item **a** da atividade **2**:

a) que vértice tem a mesma abscissa do que o ponto B? G

b) que vértice tem a mesma ordenada do que o ponto E? H

c) que vértice é o simétrico de A em relação ao eixo y? D

d) que vértice é o simétrico de A em relação à origem $(0, 0)$? E

Orientações didáticas

Sistema cartesiano

Demarque a importância dos termos abscissa e ordenada como os termos oficiais, sinônimos dos eixos x e y, respectivamente. O uso dos termos corretos amplia o vocabulário. Sem esse vocabulário, é possível que os estudantes não consigam resolver atividades pela simples falta de segurança com o termo correto. Atente a usar os termos, fazendo pequenas digressões a cada uso. Algo como "Este ponto se encontra na coordenada de abscissa A, ou seja, no eixo x horizontal, e esta outra na ordenada, ou seja, eixo y e vertical". Com o tempo e o hábito, vá reduzindo essas digressões até o uso único dos termos técnicos.

Para levar um pouco de História da Matemática para a sala de aula, comente sobre a vida e obra de René Descartes, responsável pelo plano cartesiano. Uma curiosidade que remete ao componente curricular **Ciências** é que René Descartes abordou a tese do Heliocentrismo, sendo um dos responsáveis pela quebra dos paradigmas envolvendo a ideia de que a Terra seria o centro do Universo, e que todos os corpos celestes a orbitavam.

Se julgar adequado, sugira aos estudantes que façam uma pesquisa e busquem outras informações sobre Descartes. Por meio da pesquisa em diversas fontes, o estudante acessa com autonomia diferentes conhecimentos.

Atividades

As atividades de **1** a **3** podem ser um recurso avaliativo diagnóstico. Peça aos estudantes que façam as atividades em sala de aula para correção no mesmo dia. Inclua esse tempo de correção em seu plano de aula para que tudo corra bem. Uma outra possibilidade de correção seria pedir aos estudantes que registrem as respostas com as numerações das atividades em um caderno, e que os cadernos sejam redistribuídos entre os pares, para que os estudantes corrijam uns aos outros. Essa abordagem privilegia a **CG09** e a **CEMAT08**, exercitando o diálogo e a empatia além de incentivar o acolhimento dos saberes dos indivíduos por meio da interação cooperativa. A argumentação matemática é uma importante característica do processo de letramento matemático.

Nas atividades **3** e **4** busque incentivar que os estudantes relacionem simetria em relação aos eixos x ou y com o entendimento que, no primeiro caso, os valores na abscissa devem ser opostos, e o das ordenadas devem ter o mesmo valor.

Orientações didáticas

A medida da distância entre dois pontos

Neste tópico, serão tratados alguns conceitos importantes como segmento de reta e a utilização do teorema de Pitágoras. Mesmo transpondo o conjunto de pontos no eixo cartesiano, a distância ente dois determinados pontos resulta no mesmo valor. Dessa forma, a nomenclatura *AB*, como sendo a distância entre os pontos *A* e *B*, pode ser igual a *CD*, que é a distância entre *C* e *D*.

Explore bem a representação do plano cartesiano, mostrando os valores das coordenadas nos eixos para que os estudantes não confundam com as medidas de comprimento da figura representada.

4. No polígono do item **b** da atividade **2**, determine:

a) o vértice que tem a maior ordenada; *D*

b) o vértice que tem a mesma abscissa do que *C*; *K*

c) o vértice que tem a mesma ordenada do que *F*; *B*

d) o simétrico de *B* em relação ao eixo *x*; *L*

e) o simétrico de *B* em relação ao eixo *y*; *F*

f) os vértices de ordenada positiva; *B, C, D, E, F.*

g) os vértices de ordenada negativa; *H, I, J, K, L.*

h) os vértices de ordenada nula. *A, G.*

A medida da distância entre dois pontos

Considere o octógono *ABCDEFGH*. Esse octógono é um polígono regular?

Banco de imagens/Arquivo da editora

Para responder à questão, vamos calcular as medidas dos lados considerando que o lado de cada quadradinho da malha mede 1 unidade.

Os lados do octógono que são paralelos às linhas da malha medem:

$$BC = DE = FG = HA = 4 \text{ unidades}$$

Os lados não paralelos às linhas da malha são hipotenusas de triângulos retângulos (coloridos); então:

$$AB = CD = EF = GH = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$$

Como o polígono não tem os 8 lados com medidas iguais, ele não é um polígono regular.

Acompanhe outros exemplos de cálculo da medida da distância entre dois pontos, agora dados em um sistema cartesiano. Vamos considerar três situações para obter a medida da distância entre dois pontos *A* e *B* quaisquer considerando o segmento de reta $\overline{AB}$ disposto de diferentes maneiras no plano.

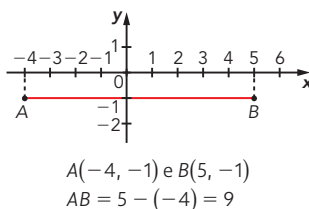
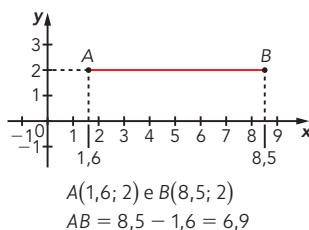
- $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo *x*.

$A(1,6;\ 2)$ e $B(8,5;\ 2)$

$AB = 8,5 - 1,6 = 6,9$

$A(-4,\ -1)$ e $B(5,\ -1)$

$AB = 5 - (-4) = 9$

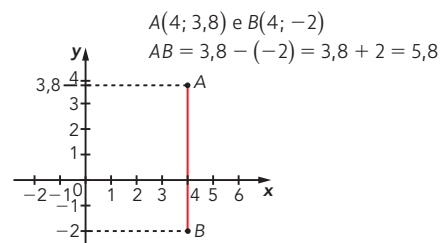
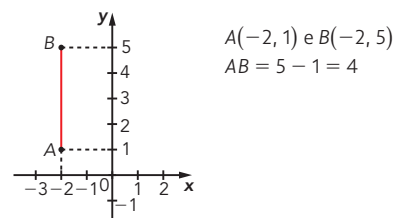
Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

Quando $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo *x*, a medida da distância entre *A* e *B* é igual à diferença entre a maior e a menor de suas abscissas.

- $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo *y*.

$A(-2,\ 1)$ e $B(-2,\ 5)$

$AB = 5 - 1 = 4$

$A(4;\ 3,8)$ e $B(4;\ -2)$

$AB = 3,8 - (-2) = 3,8 + 2 = 5,8$

No caso de $\overline{AB}$ ser paralelo ao eixo *y*, a medida da distância entre *A* e *B* é igual à diferença entre a maior e a menor de suas ordenadas.

- $\overline{AB}$ não é paralelo ao eixo x nem ao eixo y.

$$A(-3, 2) \text{ e } B(5, 6)$$

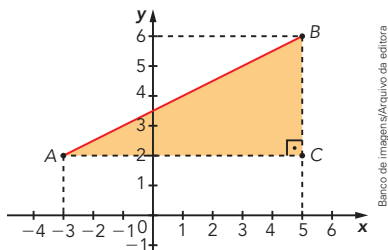
Nesse caso, tomamos um ponto C, de modo a termos o triângulo ABC retângulo em C, com um cateto paralelo ao eixo x e o outro paralelo ao eixo y. Escolhendo $C(5, 2)$, vamos calcular as medidas dos catetos:

$$AC = 5 - (-3) = 8 \text{ e } BC = 6 - 2 = 4$$

Então, pelo teorema de Pitágoras:

$$AB = \sqrt{(AC)^2 + (BC)^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = \sqrt{16 \cdot 5} = 4\sqrt{5}$$

Banco de imagens/Arquivo da editora

Quando $\overline{AB}$ não é paralelo aos eixos, calculamos a medida do segmento de reta $\overline{AB}$ aplicando o teorema de Pitágoras a um triângulo retângulo ABC que tenha catetos paralelos aos eixos.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

5. O dodecágono da atividade **2**, item **b**, é um polígono regular? Por quê?

6. Desenhe um sistema cartesiano, marque os pontos $A(-5, 6)$, $B(4, 6)$, $C(4, -3)$, $D(0, -6)$ e então calcule as medidas AB, BC, CD e DA.
9; 9; 5; 13.

7. Calcule a medida de perímetro do triângulo de vértices $A(-1{,}2; 1)$, $B(2, 1)$ e $C(2{,}8; 4)$ aproximando com uma casa decimal. Aproximadamente 11,3.

8. Você sabe que, em um triângulo, ao maior lado opõe-se o maior ângulo. Qual é o maior ângulo do triângulo de vértices $A(1, 0)$, $B(5, 1)$ e $C(2, 4)$? $\hat{A}$

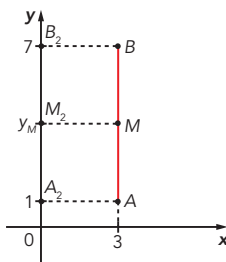
5. Não. Porque $AB = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ e $BC = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$, logo $AB \neq BC$.

Coordenadas do ponto médio

Em cada figura desenhamos um segmento de reta $\overline{AB}$ conhecendo as coordenadas de A e de B. Quais são as coordenadas do ponto médio M do segmento de reta $\overline{AB}$ em cada caso?

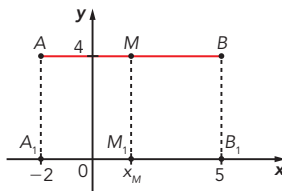
- Dados $A(3, 1)$ e $B(3, 7)$.
Como $x_A = x_B = 3$, o segmento de reta $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo y e $x_M = 3$.
Como M é ponto médio de $\overline{AB}$, M_2 é ponto médio de $\overline{A_2B_2}$. Então:

$$A_2M_2 = M_2B_2 \Rightarrow y_M - 1 = 7 - y_M \Rightarrow 2 \cdot y_M = 7 + 1 \Rightarrow y_M = \frac{8}{2} = 4$$

Logo, o ponto médio de $\overline{AB}$ é $M(3, 4)$.

Ilustrações: Banco de imagens/Arquivo da editora

- Dados $A(-2, 4)$ e $B(5, 4)$.
Como $y_A = y_B = 4$, o segmento de reta $\overline{AB}$ é paralelo ao eixo x e $y_M = 4$.
Como M é ponto médio de $\overline{AB}$, M_1 é ponto médio de $\overline{A_1B_1}$. Então:

$$A_1M_1 = M_1B_1 \Rightarrow x_M - (-2) = 5 - x_M \Rightarrow 2 \cdot x_M = 5 - 2 \Rightarrow x_M = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

Logo, o ponto médio de $\overline{AB}$ é $M(1{,}5; 4)$.

Orientações didáticas

A medida da distância entre dois pontos

Posteriormente, retome o teorema de Pitágoras e as nomenclaturas "cateto" e "hipotenusa", identificando cada uma delas, e destacando a hipotenusa como o segmento do triângulo oposto ao ângulo reto.

Guie os estudantes na leitura dos exemplos contidos no Livro do Estudante, salientando que devemos encontrar as coordenadas e encontrar as alturas e os comprimentos no triângulo formado. Posteriormente, deve-se empregar o teorema de Pitágoras utilizando os nomes dos pontos para identificar os segmentos do triângulo retângulo obtido.

Atividades

Na atividade **5**, retome a ideia de que um polígono regular é aquele em que cada um dos seus lados são congruentes entre si.

Nas atividades **6** a **8**, incentive que os estudantes desenhem o triângulo formado e correspondente às coordenadas indicadas, permitindo que tenham recursos gráficos como apoio para as resoluções. Além disso, reproduzir os triângulos resultantes dos pontos apresentados é uma forma de retomar e treinar os conteúdos vistos no início deste capítulo.

A situação apresentada na atividade **8** contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico por analogia.

Coordenadas do ponto médio

Comece identificando o conceito de ponto médio como sendo o ponto equidistante aos extremos de um segmento de reta, mas sem ainda explicar o que esses termos significam, buscando, assim, que os estudantes reflitam sobre os termos e os interpretem passando para o registro da linguagem matemática. Pergunte a eles o que compreendem dessa definição, e então, colhidas as respostas, registre em lousa a construção coletiva da explicação dos termos usados. Em seguida, acompanhe com os estudantes a leitura ativa da argumentação teórica feita no livro, bem como a prática do cálculo. Esclareça eventuais dúvidas e peça para que façam um registro sobre a estratégia de cálculo e as abordagens dos exemplos apresentados. Munidos desse registro, os estudantes devem tentar responder às atividades propostas.

Orientações didáticas

Coordenadas do ponto médio

Se julgar conveniente, incentive os estudantes a concluírem que a abscissa e a ordenada do ponto médio são, respectivamente, a média aritmética das abscissas e a das ordenadas das extremidades do segmento.

Atividades

As atividades **9** a **15** propõem a prática ainda em nível de aplicação, sugerindo que se analise, determine e calcule o que se pede. Comandos diretos dessa forma são bastante voltados para aplicação e fixação de conteúdo, mas também para que haja a oportunidade de sistematizar e estruturar o entendimento dos conceitos abordados de forma separada e controlada. Portanto, serve como oportunidade para avaliar os conteúdos desta seção e das anteriores, entendidas como pré-requisitos. Peça aos estudantes que mantenham as respostas, caso seja necessário, em formato de fração. Incentive também o uso da nomenclatura M_{AB}, por exemplo, como forma de identificar o ponto médio de um segmento AB. O uso dessa notação inicial auxilia na organização e na formalização das informações. Chame a atenção dos estudantes também para o fato de que, no caso do cálculo de uma distância, temos uma medida, e por isso o símbolo que a designa, como no caso da atividade **12**, d_{AM}, deve ser seguido por uma igualdade. Já quando o objeto é encontrar o ponto médio de uma determinada coordenada, a notação é na forma $M(x, y)$.

- Dados $A(2, 7)$ e $B(9, 3)$.

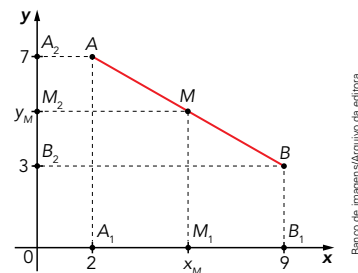
Neste caso, $\overline{AA_1}$, $\overline{MM_1}$, $\overline{BB_1}$ formam um feixe de paralelas cortado pelas transversais $\overline{AB}$ e pelo eixo x. Pelo teorema de Tales, como M é o ponto médio do segmento de reta $\overline{AB}$, temos que $AM = MB$ e $A_1M_1 = M_1B_1$. Então:

$$x_M - 2 = 9 - x_M \Rightarrow 2 \cdot x_M = 9 + 2 \Rightarrow x_M = \frac{11}{2} = 5{,}5$$

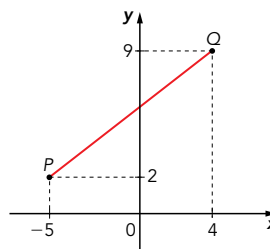
Com raciocínio semelhante, podemos concluir que:

$$A_2M_2 = M_2B_2 \Rightarrow 7 - y_M = y_M - 3 \Rightarrow 2 \cdot y_M = 7 + 3 \Rightarrow y_M = \frac{10}{2} = 5$$

Logo, o ponto médio de $\overline{AB}$ é $M(5{,}5; 5)$.

Para calcular as coordenadas do ponto médio M de um segmento de reta $\overline{AB}$, projetamos A, B e M nos eixos x e y e aplicamos o teorema de Tales.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

9. Determine o ponto médio M do segmento de reta $\overline{PQ}$ da figura. $M(-0{,}5; 5{,}5)$

10. Determine as coordenadas do ponto médio M do segmento de reta $\overline{AB}$, em que:

a) $A(3, -1)$ e $B(7, 5)$; $M(5, 2)$

b) $A(-2, 3)$ e $B(2, -3)$. $M(0, 0)$

11. Calcule as coordenadas dos pontos médios dos lados do triângulo ABC, cujos vértices são $A(-2, 5)$, $B(7, 0)$ e $C(-1, -9)$. $M_{\overline{AB}}\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$; $M_{\overline{BC}}\left(3, -\frac{9}{2}\right)$; $M_{\overline{CA}}\left(-\frac{3}{2}, -2\right)$.

12. Em um sistema cartesiano, desenhe o triângulo ABC, com vértices $A(1, 1)$, $B(5, 7)$ e $C(-11, 3)$. Depois, calcule a medida da mediana $\overline{AM}$, relativa ao vértice A. $AM = 4\sqrt{2}$
A representação do triângulo encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

13. Em um sistema cartesiano, desenhe o paralelogramo de vértices $A(-3, 2)$, $B(2, 2)$, $C(1, -5)$ e $D(-4, -5)$. Depois, faça o que se pede. A representação do paralelogramo encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

a) Determine o ponto de intersecção de suas diagonais. $M\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$

b) Calcule a medida de perímetro desse paralelogramo. $10 + 10\sqrt{2}$

c) Calcule a medida de área desse paralelogramo. 35

14. Represente no sistema cartesiano o triângulo ABC, dados $A(2, 0)$, $B(0,4)$ e $C(4, 6)$. Calcule a medida de área desse triângulo subtraindo as medidas de área dos triângulos ABO e ACD da medida de área do trapézio $BODC$, em que $O(0, 0)$ e $D(4, 0)$. 10
A representação das figuras encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

15. Represente no sistema cartesiano o quadrilátero $ABCD$, dados $A(3, 0)$, $B(7, 3)$, $C(6, 7)$ e $D(0, 4)$. Calcule a medida de área desse quadrilátero. 26
A representação do quadrilátero encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Função e suas representações

Noção de função

A atividade física do gerente

Osias é gerente em um escritório e também é atleta. Para exercitar-se, costuma correr diariamente, mantendo um ritmo constante de 9 km por hora.

Quantos metros ele corre a cada minuto?

Como 9 km = 9 000 m e 1 h = 60 min, Osias corre 9 000 metros em 60 minutos, o que resulta em 150 metros a cada minuto.

Acompanhe, na tabela a seguir, as medidas de distância que ele percorre conforme a medida de tempo de corrida.

mimagephotography/Shutterstock

Atletas profissionais conseguem atingir uma média de 20 km por hora.

Desempenho de Osias na corrida

Medida de tempo (em min)	15	20	30	45	50	60	75	80	90
Medida de distância (em m)	2 250	3 000	4 500	6 750	7 500	9 000	11 250	12 000	13 500

Dados elaborados para fins didáticos.

Perceba que, no problema proposto inicialmente, há uma correspondência entre a medida de tempo e a medida de distância percorrida por Osias em sua corrida diária.

A cada medida de tempo corresponde uma única medida de distância. Por isso, dizemos que a medida da distância percorrida é **função** da medida de tempo decorrido na atividade de Osias.

Nesse exemplo, se x representa a medida de tempo em minutos e y representa a medida de distância em metros, temos:

$$y = 150 \cdot x$$

Dizemos que y é a função de x, dada pela fórmula $y = 150 \cdot x$.

Também dizemos que, nessa fórmula, y está dado **em função** de x.

Note que a cada valor de x corresponde um único valor de y. Por exemplo:

- para $x = 15$
  $y = 150 \cdot x = 150 \cdot 15 = 2\,250$
- para $x = 25$
  $y = 150 \cdot x = 150 \cdot 25 = 3\,750$
- para $x = 48$
  $y = 150 \cdot x = 150 \cdot 48 = 7\,200$

Quando há correspondência entre duas grandezas x e y, de modo que para cada valor de x fica determinado um único valor de y, dizemos que y é **função** de x.

Orientações didáticas

Noção de função

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA06** ao propor a compreensão das funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica e algébrica. Mobiliza principalmente a **CEMAT07** ao utilizar as ferramentas matemáticas para entender e explicar o mundo em seus diversos aspectos. O contexto apresentado favorece o desenvolvimento dos TCTs *Trabalho* e *Saúde*.

Inicialmente, o trabalho se dá de modo a motivar o estudo das funções, apresentando um exemplo prático que é trabalhando também no componente curricular **Ciências**, que é o conceito de velocidade. É apresentada uma tabela relacionando tempo e distância.

Faça a leitura inferencial do texto e da explanação teórica. Caso identifique a necessidade, relembre os estudantes sobre a ideia de grandezas diretamente proporcionais entre si. No exemplo do Livro do Estudante, a relação $y = 150 \cdot x$ mostra a correspondência das duas grandezas (x e y), de modo que, ao se modificar o valor de x, o valor de y também será modificado proporcionalmente à mudança sofrida por x.

Sobre o boxe que explica a correspondência entre x e y, concluir uma regra a partir de um exemplo é característica do raciocínio lógico indutivo.

Para fazer uma boa articulação com os TCTs *Trabalho* e *Saúde*, reflita com estudantes sobre a importância de praticar atividades físicas e de criar estratégias para conciliá-las com o trabalho.

Orientações didáticas

Atividades

Até o presente momento, o capítulo lida com relações entre grandezas, e não foi ainda qualificada a ideia de função ou o que a diferencia de uma simples relação. Então, por enquanto, continue chamando de relação entre grandezas e trate como ideias muito próximas entre si. Indique que a ideia é treinar algumas habilidades para compreender, de fato, o que é uma função. Utilize as atividades propostas como modo de avaliação diagnóstica, focando em compreender as dificuldades dos estudantes com a leitura e a computação dos dados dos enunciados, além de suas habilidades com álgebra básica. Sugira que realizem as atividades e chame alguns deles para auxiliar na correção conjunta com a sala. Caso haja erros nas resoluções, incentive os demais estudantes, que acertaram, a auxiliar na resolução. Desse modo, o momento de erro pode se transformar em um momento de aprendizado coletivo.

Faça as atividades no caderno.

1. Considere uma prova com 20 questões de múltipla escolha, sendo que cada resposta correta vale 5 pontos.

a) Quantos pontos o estudante vai fazer ao acertar:

- 11 questões? 55 pontos.
- 14 questões? 70 pontos.
- x questões? $5x$ pontos.

b) A nota y depende do número x de respostas corretas. Responda no caderno: y é função de x? Por quê? Sim. A cada x corresponde uma única nota y.

2. O preço pago para fazer cópias em uma papelaria é função do número de cópias tiradas. Até dez cópias, o valor cobrado é R$ 0,25 por cópia. A partir da 11ª cópia, o valor cobrado é R$ 2,50 pelas dez primeiras e mais R$ 0,20 para cada cópia excedente.

a) Quanto uma pessoa vai pagar para tirar 5 cópias nessa papelaria? E 20 cópias? R$ 1,25; R$ 4,50.

b) Se uma pessoa tirar 50 cópias, quanto pagará, em média, por cópia? R$ 0,21

3. Em uma longa viagem, um carro se desloca com medida de velocidade constante de 100 km por hora.

a) Que medida de distância ele percorre em 2 horas? 200 km

b) Se y representa o número de quilômetros que ele percorre em x horas, qual é a fórmula para calcular y? $y = 100x$

c) Que medida de distância ele percorre em 90 minutos? 150 km

4. Quarenta pessoas vão participar de um desafio cujo prêmio é de R$ 1.200,00 a ser dividido entre os acertadores.

a) No caderno, copie e complete a tabela:

Nº de acertadores	1	2	5	8	20	40
Prêmio de cada um (em R$)	1.200,00	600,00	240,00	150,00	60,00	30,00

b) O valor do prêmio que cada acertador vai receber está em função de que variável? Do número de acertadores.

c) Usando letras, represente a função do item anterior com uma fórmula. Exemplo de resposta: p: prêmio (em R$); n: nº de acertadores; $p = \frac{1\,200}{n}$.

5. Use uma letra para representar a medida do lado e outra para representar a medida de área de um quadrado.

a) A medida de área é função da medida do lado do quadrado. Qual é a fórmula dessa função? Exemplo de resposta: $A = \ell^2$ (medida do lado: ℓ; medida de área: A)

b) A medida do lado do quadrado é função da sua medida de área. Qual é a fórmula dessa função? Exemplo de resposta: $\ell = \sqrt{A}$

c) Se um quadrado tem 20 cm^2 de medida de área, quanto mede seu lado? $2\sqrt{5}$ cm

6. Duas variáveis, x e y, estão relacionadas pela equação $2x + 5y = 10$.

a) Dado $x = 15$, calcule y. $y = -4$

b) Dado $y = 20$, calcule x. $x = -45$

c) Expresse y em função de x. Para isso, isole y no primeiro membro da equação. $y = \frac{10 - 2x}{5}$

d) Expresse x em função de y. $x = \frac{10 - 5y}{2}$

7. Duas variáveis, x e y, estão relacionadas pela equação $x^2 + y^2 = 100$. Considere o conjunto dos números reais.

a) Dado $x = 8$, quanto vale y? $y = 6$ ou $y = -6$.

b) y é função de x? Por quê? Não. Existe valor de x (por exemplo, 8) para o qual correspondem 2 valores de y.

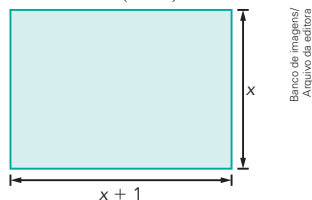
8. Se x e y são números reais e estão relacionados por $x^2 - y = 0$, podemos concluir que:

a) y é função de x? Por quê? Sim. A cada x corresponde um único y.

b) x é função de y? Por quê? Não. Quando $y = 9$, por exemplo, temos $x = 3$ ou $x = -3$. Então, há valor de y para o qual correspondem 2 valores de x.

A notação $f(x)$

A medida de área de um retângulo de altura medindo x e base medindo $x + 1$ é função da medida x.

Medida de área: $(x + 1) \cdot x = x^2 + x$

Simbolicamente, representando a medida de área por A, essa frase pode ser escrita assim:

(Lê-se: "A é igual a f de x" ou "A está em função de x".)

Nessa notação, damos o nome de f para a referida função. A fórmula dessa função pode ser escrita do seguinte modo:

$$A = x^2 + x$$

ou, então:

$$f(x) = x^2 + x$$

Note que x é a medida da altura do retângulo e $f(x)$ é a medida de área dele.

Vamos analisar um exemplo.

Substituindo x por 4 na fórmula da medida de área e calculando-a, obtemos:

$$A = x^2 + x = 4^2 + 4 = 20$$

ou, então:

$$f(4) = 4^2 + 4 = 16 + 4 = 20$$

Para $x = 4$, a medida de área do retângulo é 20, e $f(4)$ é a medida de área do retângulo quando $x = 4$.

Orientações didáticas

A notação $f(x)$

Comente com os estudantes que as funções podem ser escritas por quaisquer letras, não apenas com f e x, como: $f(c) = 3c$; $g(x) = x^2 + 1$; $h(d) = 5d - 9$.

Lembre os estudantes de que as funções não se restringem apenas à Matemática, mas também são importantes no entendimento de outras áreas, como **Ciências**. Eles devem perceber que as funções estão presentes no dia a dia. Reserve um tempo para criar um diálogo com a turma; dessa maneira, podem contextualizar juntos a noção de função e relacioná-las com o cotidiano e a situação apresentada no Livro do Estudante.

Orientações didáticas

Atividades

Uma das defasagens possíveis de ser identificada é a dificuldade que os estudantes têm em formalizar seus pensamentos e lidar com vocabulários específicos.

Nas atividades **9** a **12**, reforce a necessidade de utilizar as unidades corretas. Na atividade **10**, aconselhe o uso da fórmula da função como $f(x) = \frac{1}{10}x$ no lugar da notação decimal.

Na atividade **11**, relembre o comportamento dos sinais diante de adições e subtrações de reais. No item **d**, a resolução é não existe. Na correção, chame a atenção dos estudantes sobre a possibilidade de fazer uso de símbolos matemáticos, neste caso, $\nexists$. Aproveite e proponha uma discussão sobre o que seria este não existe. Uma abordagem para explicar esse conceito é dizer que o valor de $x = -1$ não representa um valor válido para a função.

Na atividade **12**, é possível que os estudantes se assustem com a equação apresentada, do volume da esfera, e com o uso do número π. Tranquilize-os, indicando que só é necessário organizar o raciocínio, e que o π atua apenas como mais um número, 3, neste caso.

Consideremos outro exemplo.

Considere uma função dada pela fórmula $f(x) = \frac{1 + 2 \cdot x}{2 + x}$.

a) Qual é o valor de $f(x)$ para $x = 8$?

b) Qual é o valor de $f(3)$?

c) Quanto é $f(-2)$?

Para responder às perguntas, substituímos o valor de x na fórmula dada:

a) Para $x = 8$, temos:

$$f(8) = \frac{1 + 2 \cdot 8}{2 + 8} = \frac{1 + 16}{10} = \frac{17}{10} = 1{,}7$$

$f(8) = 1{,}7$

b) $f(3)$ é o valor da função para $x = 3$. Então:

$$f(3) = \frac{1 + 2 \cdot 3}{2 + 3} = \frac{1 + 6}{5} = \frac{7}{5} = 1{,}4$$

$f(3) = 1{,}4$

c) Trocando x por -2 em $\frac{1 + 2 \cdot x}{2 + x}$, obtemos um denominador nulo. Como não existe divisão por 0, concluímos que $f(-2)$ não existe. Dizemos que a função não é definida para $x = -2$.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

9. A partir de certo instante, a medida de distância percorrida por um carro é dada em função da medida de tempo decorrida. Em x minutos, ele percorre a medida de distância $f(x)$ metros, dada pela fórmula $f(x) = 10x^2 + 1\,000x$.

a) Calcule a medida de distância percorrida em 10 minutos. 11 km

b) Calcule $f(60)$. A quantas horas corresponde essa medida de distância percorrida? 96 km; 1 h.

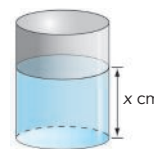
c) Em quanto tempo o carro terá percorrido 200 quilômetros? 100 min (ou 1 h 40 min).

10. A medida de volume de água em um recipiente cilíndrico é dada em função da medida da altura da água dentro do recipiente. Se a medida da altura é x centímetros, a medida de volume é $f(x)$ litros, dada por $f(x) = (0{,}10)x$.

Banco de imagens/Arquivo da editora

a) Qual é a medida de volume de água se a medida da altura da água é 15 cm? 1,5 L

b) Quanto é $f(10)$? O que representa? 1 L; representa a medida de volume (que é 1 L) quando a medida da altura da água é 10 cm.

c) Qual deve ser a medida da altura da água para haver 2 L de água no recipiente? 20 cm

11. Dada a fórmula da função $f(x) = \frac{1}{x + 1}$, calcule, se existir:

a) $f(-2)$; -1

b) $f\left(\frac{3}{5}\right)$; $\frac{5}{8}$

c) $f(\sqrt{3})$; $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$

d) $f(-1)$. Não existe.

12. A medida de volume de uma bola, de formato esférico e raio medindo x cm, é $V(x)$ cm^3, dado por $V(x) = \frac{4}{3}\pi \cdot x^3$.

a) Qual é a medida de volume de uma bola de 24 cm de medida de diâmetro? Use $\pi = 3$ e dê um valor aproximado da medida de volume em litros. Aproximadamente 6,9 L.

b) Quanto é $V(3)$? O que representa? 36π cm^3; representa a medida de volume (que é 36π cm^3) da bola de raio medindo 3 cm.

Lembre-se de que 1 cm^3 = 1 mL.

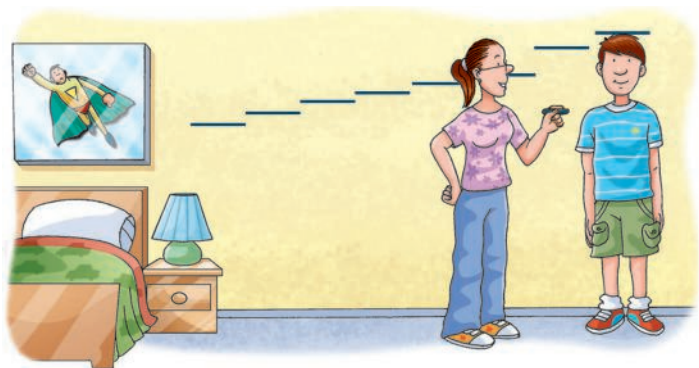
Proposta para o professor

Surge aqui então a oportunidade de não apenas amplificar o vocabulário dos estudantes como também provocar que avaliem continuamente os conceitos trabalhados. Quando se utiliza "*f* em função de *x*" no lugar de "*f* de *x*" o conceito é constantemente trabalhado e repassado. A depender do avanço da turma em relação ao tema, expressões mais resumidas poderão ser utilizadas sem perdas.

Gráfico de uma função

O crescimento de Lucas Júnior

Os pais de Lucas Júnior registraram a idade e as medidas da altura do filho, obtidas no início de cada ano letivo, desde que ele ingressou no Ensino Fundamental.

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

Analise os dados da tabela.

Crescimento de Lucas Júnior durante o Ensino Fundamental

Idade (em anos)	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Medida da altura (em cm)	115	122	128	134	138	142	148	155	165

Dados elaborados para fins didáticos.

A cada idade de Lucas Júnior, há uma única medida da altura correspondente; assim, podemos dizer que a medida da altura de Lucas Júnior, no início do Ensino Fundamental, é uma função da idade dele.

A medida da altura de Lucas Júnior no início de cada ano letivo, em função de sua idade, pode ser representada em um gráfico: cada par ordenado ("idade"; "medida da altura") da tabela fica representado por um ponto, e o conjunto desses pontos compõe o **gráfico da função**.

Crescimento de Lucas Júnior durante o Ensino Fundamental

Banco de imagens/Arquivo da editora

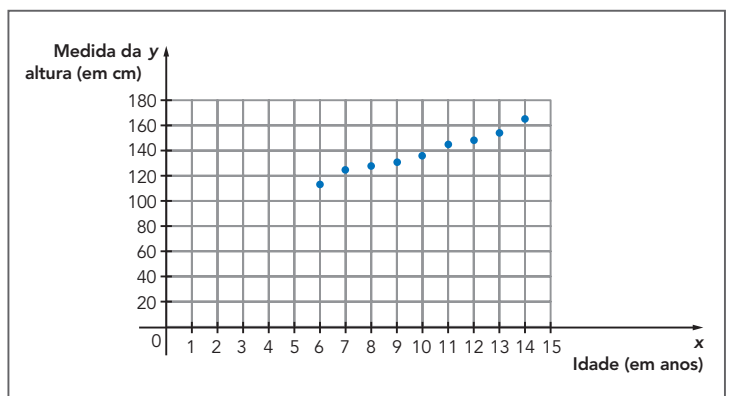



Gráfico elaborado para fins didáticos.

Orientações didáticas

Gráfico de uma função

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA06** ao propor a compreensão das funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações gráficas. A atividade 17 mobiliza com maior ênfase a **CEMAT01**.

Uma função pode ser representada e apresentada como uma tabela, um gráfico, uma fórmula, ou, até mesmo, um enunciado em linguagem escrita. O fato é que todas essas representações devem apresentar a mesma função. No que diz respeito à tabela sobre o crescimento de Lucas Júnior, para a construção, toma-se como verdade a relação entre a altura e a idade de Lucas Júnior, e entende-se que são coordenadas, sendo a altura a ordenada, e a idade, a abscissa. Posteriormente, encontra-se os pontos das coordenadas correspondentes em um plano cartesiano, marcando-os.

Proposta para o estudante

Peça aos estudantes que estruturem outras relações como a vista aqui. Solicite a um estudante que diga alguma grandeza mensurável, e que outro diga uma grandeza de alguma forma relacionada à primeira, mesmo que de modo só qualitativo. Posteriormente, avaliem em conjunto se as grandezas podem ser tratadas como funções e, caso positivo, qual grandeza é dependente de qual.

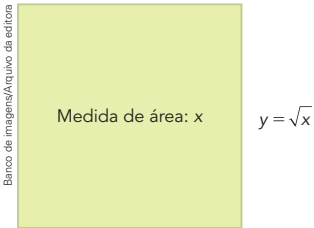
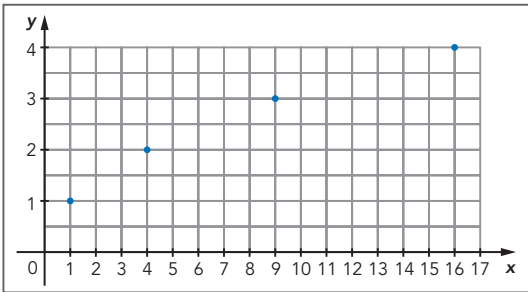
Orientações didáticas

Gráfico de uma função

É dado um segundo exemplo sobre a mesma estratégia. Encontrar qual grandeza depende da outra, e, então, marcar respostas para os pontos representados no plano cartesiano. Nesse caso, a fórmula da área de um quadrado. Será exigido a necessidade de arredondamento dos valores encontrados, e os estudantes podem auxiliar neste momento, sugerindo ou relembrando os critérios para arredondamento. Após traçar os pontos no plano cartesiano, é possível verificar que se forma o gráfico, que não é exatamente linear.

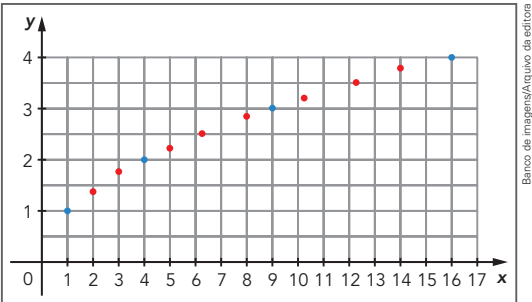
Agora, verificaremos outro exemplo.

Vamos fazer o gráfico da função dada pela fórmula $y = \sqrt{x}$, em que y representa a medida do lado de um quadrado de área medindo x.

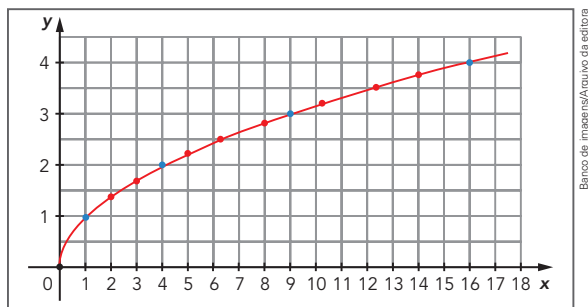
Para representar a fórmula graficamente, construímos uma tabela de pontos, atribuindo valores a x e calculando os correspondentes valores de y. Como a fórmula contém uma raiz quadrada, vamos, inicialmente, dar valores de quadrados perfeitos para x, para simplificar os cálculos.

Valor atribuído a x	1	4	9	16
Valor calculado para y	$y = \sqrt{1} = 1$	$y = \sqrt{4} = 2$	$y = \sqrt{9} = 3$	$y = \sqrt{16} = 4$
Coordenadas do ponto do gráfico	(1, 1)	(4, 2)	(9, 3)	(16, 4)

(Para melhor visualização, adotamos escalas diferentes nos dois eixos.)

Podem ser atribuídos a x outros valores, por exemplo, aqueles compreendidos entre os pontos já marcados. Isso acrescentará mais pontos ao gráfico.

x	$y = \sqrt{x}$
2	$\sqrt{2} \simeq 1{,}4$
3	$\sqrt{3} \simeq 1{,}7$
5	$\sqrt{5} \simeq 2{,}2$
6,25	2,5
8	$2\sqrt{2} \simeq 2{,}8$
10,24	3,2
12,25	3,5
14	$\sqrt{14} \simeq 3{,}7$

Com mais pontos, o gráfico ficará assim:

Também podemos atribuir a x valores menores do que 1 ou maiores do que 16, desde que sejam valores não negativos (lembrando que, para os números reais, não existe raiz quadrada de número negativo).

Note que se $x = 0$, $y = \sqrt{0} = 0$.

Considerando que a fórmula da função $y = \sqrt{x}$ pode ser calculada para qualquer x real não negativo, seu gráfico é uma linha contínua partindo de $(0, 0)$.

Na seção *Matemática e tecnologias* desta Unidade, estudaremos a construção de gráficos de funções utilizando o GeoGebra.

As imagens não estão representadas em proporção.

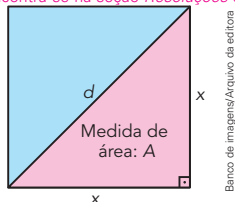
Atividades

Faça as atividades no caderno.

13. Um camundongo percorre um labirinto em 15 minutos na primeira tentativa; em 9 minutos na segunda tentativa; em 7 minutos na terceira tentativa, e assim por diante; na n-ésima tentativa, ele gasta $\left(3 + \frac{12}{n}\right)$ minutos. Faça o gráfico da medida de tempo t, em minutos, gasta na n-ésima tentativa, em função de n, com $n = 1, 2, 3, 4, 5$ e 6.
A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

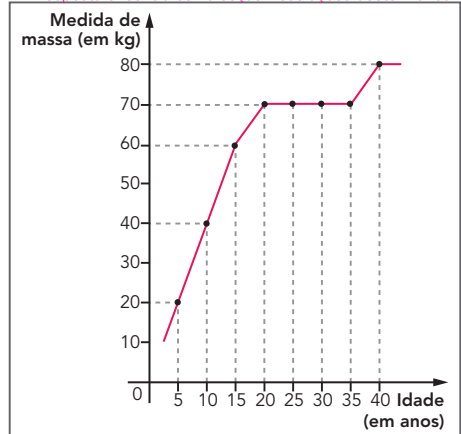
Helio Senatore/Arquivo da editora

14. Para cada x positivo, vamos considerar um quadrado de lado com medida x. A medida d da diagonal e a medida de área A do triângulo que a diagonal define com dois dos lados do quadrado são funções de x. Elabore os gráficos dessas funções.
A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Banco de imagens/Arquivo da editora

15. Duas grandezas, x e y, estão relacionadas pela fórmula $x \cdot y - x = 10$, sendo x e y positivos.

a) Expresse y em função de x. $y = \frac{10 + x}{x}$, para $x > 0$.

b) Obtenha alguns pontos do gráfico da função e ligue-os por uma linha contínua.
A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

16. Este gráfico representa um estudo sobre a medida de massa de um paciente.
A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

Analise o gráfico e escreva no caderno qual era a medida de massa desse paciente:

a) quando tinha 5 anos; 20 kg

b) aos 10 anos; 40 kg

c) aos 15 anos; 60 kg

d) dos 20 aos 35 anos. 70 kg

Orientações didáticas

Atividades

Na atividade **13**, o n é utilizado como variável. Explique que é comum o uso do n como símbolo para variável quando o contexto sugere uma contagem, neste caso, número de tentativas, e que *n-ésimo* uma posição entre os diversos valores que n pode assumir.

Na atividade **16**, discuta sobre o significado conceitual ou qualitativo do platô formado entre os 20 e 35 anos. Questione o que isso significa. O esperado é que respondam em algum momento que, durante esse período, não houve alteração na massa do indivíduo. Nomeie tal período como constante.

Orientações didáticas

Atividades

A atividade **17** traz como assunto o consumo mensal de água em uma determinada cidade. Comente que o cálculo feito pela companhia de distribuição de água é basicamente uma função. A diferença é que utiliza bancos de dados, planilhas nas quais cada célula representa um ponto da função. O motivo disso é que o pensamento computacional humano é extremamente poderoso, porém as dificuldades de lidar com grandes quantidades de dados e em velocidade é fato, e, nesses casos, os recursos computacionais são preferíveis, ou até mesmo necessários. Esta discussão enfatiza a aplicação do conteúdo à realidade, buscando relacionar o mundo ao redor com seus aprendizados, além de trabalhar a **CEMAT01** ao reconhecer a Matemática como uma ciência humana, fruto das necessidades e preocupações de diferentes culturas.

Função afim

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA06** ao propor o estudo de funções afim.

Afim, de função afim, significa "contínuo". Desse modo, uma função afim é uma função contínua e linear. Tais predicados relacionam-se com o formato de seu gráfico também.

No texto é tratado o contexto em que um eletricista cobra um valor fixo, adicionado de um valor em função do tempo (horas de serviço). É dada uma tabela com a lei da função e, então, ao traçar os pontos do eixo cartesiano, é possível perceber que essa função tem um ponto de partida diferente de zero, e que ela foi transladada verticalmente. Dessa maneira, podemos, com base neste exemplo, dizer que a função afim pode ter um ponto de partida diferente de zero com relação ao eixo das ordenadas.

17. A conta mensal de água em uma cidade é calculada da seguinte maneira:

- uma taxa fixa de R$ 25,00 é cobrada se o consumo for mínimo, de até 10 m³;
- uma taxa de R$ 3,91 é cobrada a mais para cada m³ excedido do mínimo.

De acordo com as informações anteriores, faça o que se pede.

a) Qual é o valor a pagar, em reais, em um mês em que a família consumiu 20 m³? R$ 64,10

b) Qual é o valor y a pagar, em reais, no mês em que o consumo excede o mínimo em x m³? $y = 25 + 3{,}91x$

c) Represente em um gráfico o valor da conta, y, em função do número x de m³ excedentes. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

d) Qual foi o consumo de água, em m³, no mês em que a conta totalizou R$ 71,92? 22 m³

18. Um aplicativo que oferece transporte privado cobra uma taxa fixa de embarque de R$ 5,00 e uma taxa de deslocamento de R$ 0,75 por quilômetro. Joana costuma fazer um percurso que, nessas condições, lhe custa R$ 11,15. Em determinado momento do dia, porém, devido a um engarrafamento, a taxa de deslocamento por quilômetro passou a ser R$ 1,64. Qual é o valor a pagar pelo percurso que Joana costuma fazer, considerando as condições do engarrafamento? Aproximadamente R$ 18,45.

19. Um caminhão-pipa está cheio com 6 000 L de água. Para esvaziá-lo, abrimos uma válvula, por onde saem 100 L de água por minuto.

Ilustra Cartoon/Arquivo da editora

a) Quantos litros de água (y) restam no tanque do caminhão x minutos depois que abrimos a válvula? $y = 6\,000 - 100x$, para $0 \leqslant x \leqslant 60$.

b) Construa uma tabela de pares (x, y) escolhendo valores para x e calculando y. Resposta pessoal.

c) No caderno, construa o gráfico da função. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

20. Na confecção de certo produto, uma fábrica tem um custo fixo de R$ 100.000,00 mais R$ 50,00 por unidade produzida.

a) Qual é a fórmula do custo y (em reais) para produzir x unidades? $y = 100\,000 + 50x$

b) Qual é o custo para produzir 10 000 unidades? R$ 600.000,00

c) Se na venda de 10 000 unidades a fábrica deseja ter um lucro de R$ 500.000,00, qual deve ser o preço de venda de cada unidade? R$ 110,00

Função afim

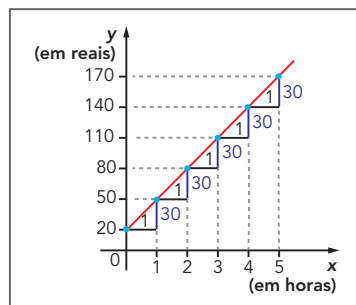
O preço de serviço do eletricista

Um eletricista cobra a taxa de R$ 20,00 pela visita ao cliente e mais R$ 30,00 por hora trabalhada.

Como calcular o preço final a ser pago já que este depende da medida de tempo de duração do serviço?

Se o serviço do eletricista durar x horas, vai custar $(30 \cdot x)$ reais mais os R$ 20,00 da taxa de visita. Assim, o preço total y em reais a ser pago ao eletricista é dado por: $y = 30 \cdot x + 20$.

Este é um exemplo de função afim.

Número de horas de serviço	Preço (em reais)
x	$y = 30 \cdot x + 20$
0	20
1	50
2	80
3	110
4	140
5	170

Banco de imagens/Arquivo da editora

Toda função do tipo $y = ax + b$, em que a e b são números reais conhecidos, é chamada de **função afim**. Essas funções são representadas por retas.

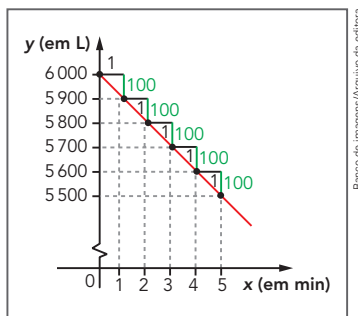
A cada hora a mais de serviço, o preço aumenta R$ 30,00. Dizemos que a **taxa de variação** do preço é de R$ 30,00 por hora de serviço. Essa taxa é o coeficiente a da função.

A taxa de visita, R$ 20,00, é o valor do serviço para $x = 0$, portanto, é a ordenada do ponto em que o gráfico intersecta o eixo y. Ela é o coeficiente b da função.

A medida de volume de água no caminhão

Vamos considerar a situação da atividade **19**, em que um caminhão-pipa com 6 000 L de água pode ser esvaziado por uma válvula pela qual saem 100 L de água por minuto. Assim, x minutos depois que abrimos a válvula, restam no tanque do caminhão y litros de água, sendo $y = 6\,000 - 100 \cdot x$.

Vamos acompanhar como o caminhão vai sendo esvaziado.

Medida de tempo (em min)	Medida de volume restante (em L)
x	$y = 6\,000 - 100 \cdot x$
0	6 000
1	5 900
2	5 800
3	5 700
4	5 600
5	5 500

Analise:

$$y = \underbrace{-100}_{a} \cdot x + \underbrace{6\,000}_{b}$$

A cada minuto que passa, a medida de volume de água dentro do caminhão diminui 100 litros, portanto a taxa de variação da medida de volume da água é de −100 litros por minuto, representada pelo coeficiente a.

O coeficiente b é 6 000, que é o valor de y que corresponde a $x = 0$. O ponto do gráfico no eixo y é $(0, 6\,000)$.

Ernesto Reghran/Pulsar Imagens

Lavagem da área externa do Hospital Doutor Anísio Figueiredo, em Londrina (PR), com hipoclorito de sódio para desinfecção em razão da pandemia de covid-19. Foto de 2020.

Orientações didáticas

A medida de volume de água no caminhão

Nesta situação relaciona-se a medida de volume restante com o tempo de utilização da água dentro do caminhão, gerando o gráfico de uma função afim, porém aqui, decrescente. Use os diversos registros da língua portuguesa para dar significado ao gráfico, como “Pode-se ver que, conforme o tempo vai avançando, o gráfico adquire valores cada vez menores em relação ao eixo das ordenadas. Desse modo, o desenho do gráfico faz sentido com relação ao esperado, já que, conforme o tempo passa, mais água é gasta e, portanto, menor é o volume que resta no caminhão”. Auxilie os estudantes a interpretar esse tipo de gráfico.

Proposta para o professor

No momento de desenhar gráficos em função do tempo, atente ao fato de que não se faz os valores negativos do eixo que representa o tempo, isso porque o tempo não pode assumir valores negativos.

Orientações didáticas

Função crescente e função decrescente

Na BNCC

Este tópico favorece o desenvolvimento da habilidade **EF09MA06** ao propor o estudo de funções crescentes e decrescentes.

Inicie o conteúdo teórico e aborde os termos formais, indicando que, nas funções crescentes, enquanto a variável do eixo das abscissas avança, a variável do eixo das ordenadas aumenta. E que, na função decrescente, o que ocorre é o contrário. Diga dessa forma e peça aos estudantes que formalizem em seus cadernos como se expressa essa ideia para funções afins decrescentes. Espera-se algo como: "Em uma função afim decrescente, conforme a variável representada no eixo das abscissas avança, a variável representada pelo eixo das ordenadas reduz".

Atividades

As atividades **21** e **22** visam trabalhar conceitos de intervalo em um gráfico. Certifique-se de que os estudantes compreendem a diferença e os significados dos seguintes símbolos: $\leqslant$, $<$, $>$ e $\geqslant$.

Proporcionalidade

Na BNCC

Este tópico retoma os conceitos apresentados no capítulo **7** e explora as habilidades **EF09MA07** e **EF09MA08**.

Apoie-se na linguagem falada para auxiliar na resolução do exemplo dado no Livro do Estudante, buscando estabelecer conexões entre as variáveis e fixando seus valores para compreender as relações entre elas. Incentive a análise do resultado final e se o valor é próximo do esperado de acordo com a lógica da situação. Essa abordagem capacita o estudante a produzir análises críticas com relação à sua própria produção intelectual, mas também de terceiros, incentivando, assim, sua criticidade.

Função crescente e função decrescente

No exemplo do preço do serviço do eletricista, aumentando o número x de horas de serviço, o preço y aumenta. Já no exemplo da medida de volume de água no caminhão, aumentando a medida de tempo x, a medida de volume y diminui.

Dizemos que uma função é **crescente** quando, aumentando os valores de x, em correspondência aumentam os de y. Nesse caso, quanto maior for x, maior será y.

Dizemos que uma função é **decrescente** quando, aumentando x, temos que y diminui. Nesse caso, quanto maior for x, menor será y.

Toda função afim do tipo $y = ax + b$, com $a > 0$ (taxa de variação positiva) é uma função crescente. A função do preço do eletricista, dada pela fórmula $y = 30x + 20$, é uma função crescente.

Toda função afim do tipo $y = ax + b$, com $a < 0$ (taxa de variação negativa) é uma função decrescente. A função da medida de volume de água no caminhão, dada pela fórmula $y = -100x + 6\,000$, é uma função decrescente.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

21. Uma caixa de 1 litro de leite, feita de papelão, tem o formato de um bloco retangular de altura medindo 25 cm. Quando tiramos uma xícara de leite da caixa, a medida da altura do leite na caixa diminui 2 cm.

a) Qual é a medida da altura y, em centímetros, do leite que resta na caixa depois que retiramos x xícaras? $y = 25 - 2x$, para $0 \leqslant x \leqslant 12{,}5$.

b) Construa o gráfico de y em função de x. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

c) Qual é a taxa de variação da medida da altura do leite na caixa? -2 cm/xícara

22. Para encher o tanque de certo automóvel, são necessários 52 litros de combustível. O preço por litro do combustível é R$ 6,80.

a) Quanto se paga para encher o tanque desse automóvel estando ele inicialmente vazio? R$ 353,60

b) Qual é a quantia y em reais a ser paga quando se colocam x litros de combustível no tanque? $y = 6{,}80x$, para $0 \leqslant x \leqslant 52$.

c) Construa, no caderno, o gráfico da função do item **b**. A resposta encontra-se na seção *Resoluções* deste Manual.

d) Qual é a taxa de variação do preço para abastecer esse automóvel? 6,80 R$/L

Proporcionalidade

Estudamos relações entre grandezas no capítulo **7**, particularmente a proporcionalidade. Vamos, agora, relacionar este assunto com o estudo das funções.

O preço do coco

Em uma barraca de praia, cada coco é vendido por R$ 4,00.

Dessa maneira, temos:

- 3 cocos custam R$ 12,00;
- 6 cocos custam R$ 24,00;
- 9 cocos custam R$ 36,00.

Perceba que, dobrando o número de cocos, dobra o preço; triplicando o número de cocos, triplica o preço.

Na situação anterior, dividindo o preço total pelo número de cocos, obtemos:

- $\frac{12}{3} = 4$
- $\frac{24}{6} = 4$
- $\frac{36}{9} = 4$

Em todos os casos, a razão $\frac{\text{preço}}{\text{número de cocos}}$ é sempre 4; portanto, é constante.

O preço y, em reais, de x cocos é dado por $y = 4 \cdot x$.

A razão $\frac{y}{x}$ é constante e igual a 4.

Dizemos que o preço é **proporcional** ao número de cocos e que a razão entre o preço e o número de cocos é 4.

Quando 2 grandezas são diretamente proporcionais, para um valor positivo x de uma delas corresponde o valor y na outra, calculado pela relação algébrica:

$$y = k \cdot x$$

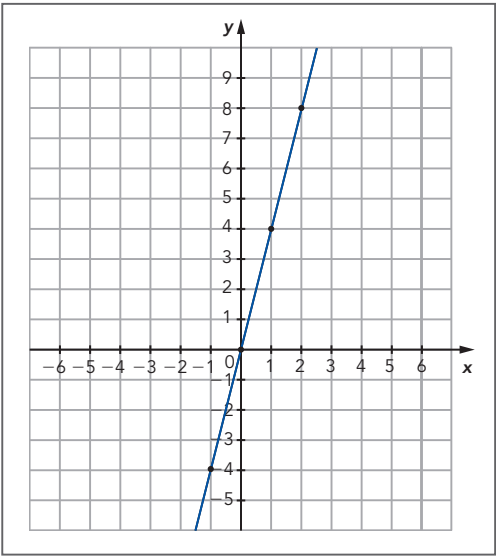
sendo k a constante de proporcionalidade. Este é um caso particular de função afim, do tipo $y = ax + b$, em que a taxa de variação a é a constante de proporcionalidade, $a = k$, e o coeficiente b é nulo, $b = 0$. Neste caso particular, a função afim recebe o nome de **função linear**.

Uma função do tipo $y = a \cdot x$, em que a é um número real não nulo, é denominada **função linear**.

Exemplo:

Vamos construir o gráfico da função linear dada pela fórmula $y = 4x$ para x variando no conjunto dos números reais.

x	y = 4x
0	$4 \cdot 0 = 0$
1	$4 \cdot 1 = 4$
2	$4 \cdot 2 = 8$
−1	$4 \cdot (-1) = -4$
...	...

Banco de imagens/Arquivo da editora

O gráfico de uma função linear é uma reta que passa no ponto (0, 0).

Orientações didáticas

Proporcionalidade

Algumas dúvidas podem surgir neste momento, como se, por exemplo, a função linear é uma função afim, ou vice-versa. O que é possível dizer é que a função linear do tipo $y = ax$ é uma função afim do tipo $y = ax + b$ para $b = 0$, e, portanto, poderia entrar nessa categoria. A ideia de função linear, porém é razoavelmente mais simples de contextualizar e tratar como grandezas proporcionais, ao menos de forma prática no momento de desenvolver as resoluções.

Faça a leitura do exemplo aplicado e sugira que levantem possibilidades de contextos em que é possível tratar um determinado fenômeno, seja físico social ou abstrato, como uma função linear.

Aproveite o momento e explore a construção de gráficos pelo GeoGebra: na mesma tela construa, pelo menos, três gráficos de funções afim crescentes e, em outra, pelo menos três funções afim decrescentes).

Orientações didáticas

Atividades

Na atividade **23** retome a ideia de fator de proporcionalidade, incentivando que relacionem o conteúdo atual com o que foi aprendido anteriormente. Ainda que não se lembrem de forma óbvia, esse tipo de relação demonstra que a Matemática é uma construção de diversos pequenos conhecimentos.

Na atividade **24**, que busca analisar informações de quadros, peça aos estudantes que construam o gráfico referente a cada um dos exemplos, ao menos de forma qualitativa, para, assim, se apoiarem neste material a fim de amparar seus argumentos matemáticos. Incentive também que escrevam o porquê de cada uma das respostas com a finalidade de retomar esse registro quando tiverem dúvidas no futuro.

Faça as atividades no caderno.

23. O carro de Mariane é econômico, pois percorre 10 quilômetros de distância com 1 litro de gasolina. O preço da gasolina é R$ 6,80 o litro.

a) Determine a fórmula do custo y em reais para percorrer x quilômetros de distância. $y = 0{,}68x$

b) O gasto com gasolina é proporcional à medida de distância percorrida? Por quê?
Sim. A razão $\frac{\text{custo}}{\text{medida de distância}}$ é constante.

Kdonmuang/Shutterstock

Em 2020, havia mais de 58 milhões de automóveis (veículos destinados ao transporte de até 9 passageiros) registrados no Brasil. (Fonte dos dados: IBGE. *Cidades*. Disponível em: https://cidades.ibge.gov.br/brasil/pesquisa/22/28120?ano=2020. Acesso em: 11 jun. 2022.)

24. Analise alguns valores da função dados em cada tabela e depois responda no caderno.

I.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	11	12	13	14	15	16	17	18

II.

x	1	2	3	4	5	6
y	10	20	30	40	50	60

III.

x	1	2	4	5	10	20
y	10	5	2,5	2	1	0,5

IV.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	8	7	6	5	4	3	2	1

V.

x	1	2	3	4	5	6
y	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6

VI.

x	1	2	3	4	5	6
y	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5	5,5

a) Quais tabelas têm valores de funções crescentes? **I**, **II**, **V**, **VI**.

b) Quais tabelas têm valores de funções decrescentes? **III**, **IV**.

c) Em quais delas y é proporcional a x? **II**, **V**.

25. Um artigo, cujo preço de tabela é x reais, está sendo vendido com 12% de desconto.

a) Escreva a função que expressa o valor d do desconto. $d = (0{,}12)x$

b) Escreva a função que expressa o preço v de venda. $v = (0{,}88)x$

c) Os valores d e v são proporcionais ao preço tabelado x? Sim.

Proporcionalidade inversa

Quando 2 grandezas são inversamente proporcionais, para um valor positivo x de uma delas corresponde o valor y na outra, calculado pela relação algébrica:

$$y = \frac{k}{x}$$

sendo k a constante de proporcionalidade.

Note que na proporcionalidade inversa:

- o produto xy é constante;
- como $y = k \cdot \frac{1}{x}$, y é diretamente proporcional ao inverso de x.

Atividades

Faça as atividades no caderno.

26. Na atividade **24**, em qual tabela y é inversamente proporcional a x? E em qual tabela a função é decrescente, mas y não é inversamente proporcional a x? **III**; **IV**.

27. Em uma loja de ferragens, Olívio comprou um rolo de arame com o qual pretende cercar um terreno retangular.

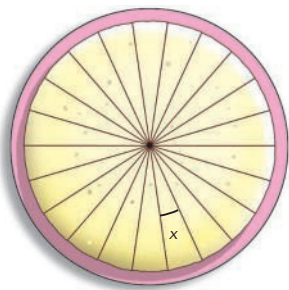
Alberto De Stefano/Arquivo da editora

Nos itens a seguir vamos descrever duas funções. Classifique cada uma delas em crescente ou decrescente e escreva no caderno se há proporcionalidade direta ou proporcionalidade inversa.

a) A medida de massa y de um pedaço de arame é função da medida de comprimento x. Crescente; y é diretamente proporcional a x.

b) Usando todo o rolo de arame, o número n de voltas da cerca é função da medida de perímetro p do terreno. Decrescente; n é inversamente proporcional a p.

28. Um vendedor de queijos do tipo minas sempre corta as peças em fatias iguais, a partir do centro.

Alberto De Stefano/Arquivo da editora

As imagens não estão representadas em proporção.

Orientações didáticas

Proporcionalidade inversa

Proponha uma leitura antecipada do tópico e peça aos estudantes que tragam as dúvidas restantes após a leitura. Tal abordagem é uma metodologia ativa chamada "sala de aula invertida" e costuma ser útil para trabalhar o protagonismo e o entendimento dos estudantes de que precisam ter uma postura ativa e reflexiva diante dos estudos. Utilize uma pequena parte da aula para tirar dúvidas sobre as leituras que fizeram sobre o tema.

Atividades

Proponha aos estudantes que façam as atividades individualmente; depois, faça a correção coletiva.

Orientações didáticas

Atividades

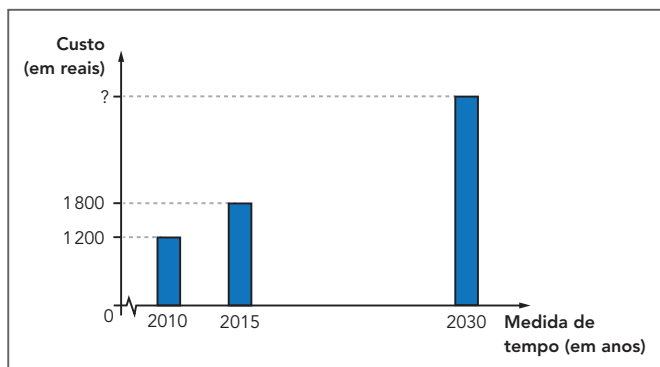
Atividades **29** e **30** propõem que os estudantes relacionem os conceitos de função crescente e decrescente com relações diretamente ou inversamente proporcionais entre grandezas. Deixe que busquem essas relações de forma autônoma, ou até mesmo levantando um debate para que compreenda os argumentos dos colegas. Após a breve discussão, formalize as ideias na lousa e incentive que registrem no caderno o que foi definido em conjunto.

a) A medida de massa *y* de cada fatia é função da medida *x* do ângulo central. Essa função é crescente ou decrescente? Crescente.

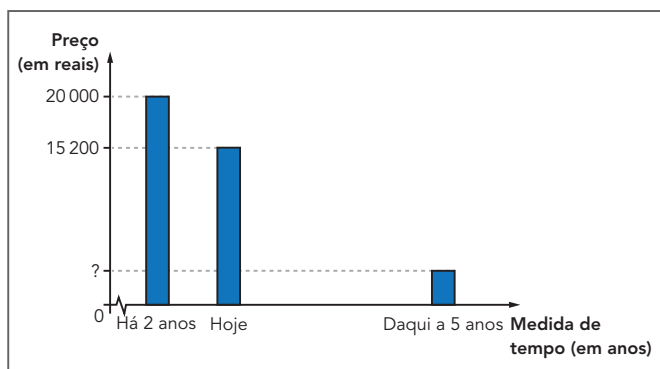
b) A medida de massa *y* de cada fatia é função do número *n* de fatias. Essa função é crescente ou decrescente? Decrescente.

c) Explique se há alguma proporcionalidade nas funções dos itens **a** e **b**. Em **a**, *y* é diretamente proporcional a *x*. Em **b**, *y* é inversamente proporcional a *n*.

29. Vamos supor que o custo anual por estudante de escola pública tenha aumentado com o passar do tempo de acordo com uma função afim. Se em 2010 esse custo era de R$ 1.200,00 e em 2015 era de R$ 1.800,00, quanto será no ano 2030 se a taxa de crescimento continuar a mesma? R$ 3.600,00

Custo anual por estudante de escola pública

Dados elaborados para fins didáticos.

30. O valor de uma máquina decresce com o tempo tendo em vista o desgaste. O valor é uma função afim da medida de tempo de uso da máquina. Se há dois anos ela valia R$ 20.000,00 e hoje ela vale R$ 15.200,00, quanto valerá daqui a cinco anos? R$ 3.200,00

Preço de uma máquina com o passar dos anos

Dados elaborados para fins didáticos.

Na mídia

O que acontece com o corpo quando passamos a beber 8 copos d'água por dia?

Para melhorar a saúde e a beleza, você não precisa de muito. Acredite, beber água com mais frequência traz muitos benefícios para todo o organismo. Durante muito tempo, nutricionistas e médicos recomendavam 2 litros ou oito copos (por dia). Hoje, sabe-se que esses números são, na verdade, uma média que pode variar de pessoa para pessoa. Para descobrir a quantidade ideal para suas necessidades, multiplique [a sua medida de massa] por 0,03 – essa é a quantidade, em litros, que você deverá beber. Uma pessoa com 60 quilos, por exemplo, deve ingerir 1,8 litro.

Um cuidado importante é não tomar tudo de uma vez só. Então, divida essa quantidade ao longo do dia, para que o organismo aproveite o líquido aos poucos, não sobrecarregando a função de nenhum órgão. Além disso, boa parte do volume de água recomendado por dia vem da alimentação – geralmente, cerca de 50%. Por isso, leve em conta, também, as refeições. O que não dá é para esquecer de ingerir líquidos entre as refeições. Para isso, vale ter sempre uma garrafinha por perto [...].

[...].

A seguir, [conheça] alguns dos benefícios da água para o corpo [...]

Visual Generation/Shutterstock

Mais disposição, redução de acne e intestino regulado são alguns dos benefícios da ingestão de água para o corpo.

Traz mais disposição

A água é o principal componente do sangue. Assim, quanto mais H_2O, mais líquido vermelho correndo nas veias. Isso aumenta o transporte de nutrientes por todo o corpo, inclusive para o cérebro, que tem todas as suas funções otimizadas.

Melhora a memória

Isso se dá não só porque o cérebro recebe mais nutrientes por meio do sangue, mas também porque certas reações químicas que acontecem nele – entre elas, a formação da memória – também dependem da presença da água para acontecer.

Emagrece

Um estudo realizado em 2010 na Universidade Virginia Tech, nos EUA, com 55 voluntários, todos acima [da medida de massa recomendada] e fazendo dieta, verificou que houve uma perda de [medida de massa] significativa em quem havia ingerido dois copos de água antes das refeições. Muitas vezes, comemos além do que precisamos por sede, e não fome. O corpo pode confundir as sensações. É por isso que um organismo hidratado "pede" menos comida.

Orientações didáticas

Na mídia

Na BNCC

Essa seção trata de forma direta aos TCTs *Saúde* e *Educação Alimentar e Nutricional* ao explorar informações sobre como manter o organismo hidratado e os benefícios dessa ação.

Nosso corpo funciona como uma "máquina" em que tudo precisa estar funcionando direito para evitar que surjam problemas. Nós precisamos estar atentos aos nossos deveres com nosso corpo, como o de nos mantermos hidratados para que o corpo esteja funcionando bem e saudável.

O texto mostra a importância de hidratar o corpo e os benefícios oriundos da hidratação, que vão desde a melhora da disposição, o desaceleramento do envelhecimento, até um sono melhor.

Ressalte que manter uma vida saudável traz muitos benefícios à saúde e ao dia a dia das pessoas.

Orientações didáticas

Na mídia

O texto traz a oportunidade de abordar outros assuntos para se ter uma vida saudável, como a prática de atividades físicas.

Se considerar oportuno, realizem uma atividade interdisciplinar com os professores de **Ciências** e **Educação Física** e proponha que cada estudante faça uma pesquisa com as pessoas com quem moram sobre os hábitos saudáveis que adotam no dia a dia. Solicite que elaborem um material de divulgação que pode ser um cartaz, um panfleto, um vídeo para ser divulgado nas redes sociais ou até mesmo um *podcast* com informações sobre hábitos saudáveis.

Nas atividades propostas, os estudantes colocarão em prática alguns dos conhecimentos matemáticos adquiridos no capítulo.

Diminui a dor após os exercícios

Quando nos exercitamos além do que o nosso condicionamento permite, o corpo produz uma substância chamada ácido lático, que é responsável pelas dores musculares comuns depois da prática de atividades. Quanto mais água presente no organismo, melhor essa substância é filtrada e diluída, diminuindo sua ação.

Regula o intestino

A água é essencial para que os processos de absorção, digestão e excreção de alimentos funcionem como um relógio. Com mais líquido, as fezes ficam mais hidratadas e aumentam de volume, favorecendo os movimentos de expulsão do alimento do corpo, durante o processo digestivo.

Desacelera o envelhecimento da pele

A chave para que isso aconteça está no intestino: quando bem hidratado, o órgão é capaz de absorver melhor as proteínas da comida, que, por sua vez, ajudam a repor o colágeno – proteína que dá firmeza e sustentação à pele.

Aumenta a imunidade

A ingestão de água reduz o risco de resfriados e infecções, já que o líquido traz mais fluidez para as secreções pulmonares. Assim, a água ajuda a eliminar vírus e bactérias do organismo com mais facilidade, sem que nos causem essas enfermidades.

Atenua as acnes

Quando a flora intestinal está desidratada e, portanto, em desequilíbrio, ela perde sua capacidade de filtrar agentes inflamatórios e toxinas. Eles acabam caindo direto na corrente sanguínea, predispondo o organismo a inflamações e também a um estado chamado de resistência insulínica, que, por sua vez, libera hormônios que favorecem o surgimento da acne.

Proporciona um sono melhor

É no intestino que são produzidos boa parte de certos neurotransmissores, como a melatonina e a serotonina, que regulam o sono. Para que essa produção ocorra de maneira satisfatória, no entanto, o intestino precisa estar bem hidratado. Dessa forma, a flora intestinal produzirá mais bactérias benéficas que, por sua vez, auxiliam na produção desses neurotransmissores.

SALLES, Carol. O que acontece com o corpo quando passamos a beber 8 copos d'água por dia? *Uol*, [*s. l.*], 14 jun. 2019. Disponível em: https://www.uol.com.br/vivabem/listas/o-que-acontece-com-o-corpo-quando-passamos-a-beber-8-copos-dagua-por-dia.htm. Acesso em: 6 abr. 2022.

1. b) As grandezas são diretamente proporcionais, pois, quanto maior a medida de massa de uma pessoa, proporcionalmente maior será a quantidade de água recomendada para que ela beba por dia. Por exemplo, dobrando a medida de massa, dobra a quantidade de água.

1. De acordo com o texto, para descobrir a quantidade ideal de água que uma pessoa deve ingerir diariamente, é necessário multiplicar a medida de massa dessa pessoa por 0,03.

a) Escreva a função que representa a quantidade y de água, em litros, a ser ingerida por uma pessoa diariamente em função de sua medida de massa x, em quilogramas. $y = 0{,}03x$

b) As grandezas x e y são diretamente ou inversamente proporcionais? Explique.

c) Quantos litros de água uma pessoa com 75 kg de medida de massa deverá ingerir por dia? 2,25 litros.

2. O texto informa que cerca de 50% da medida de volume de água recomendado por dia vem da alimentação. Assim, quantos litros de água, aproximadamente, vieram da ingestão de alimentos, no caso de uma pessoa com 82 kg que ingeriu a quantidade de água recomendada por dia? 1,23 litro.

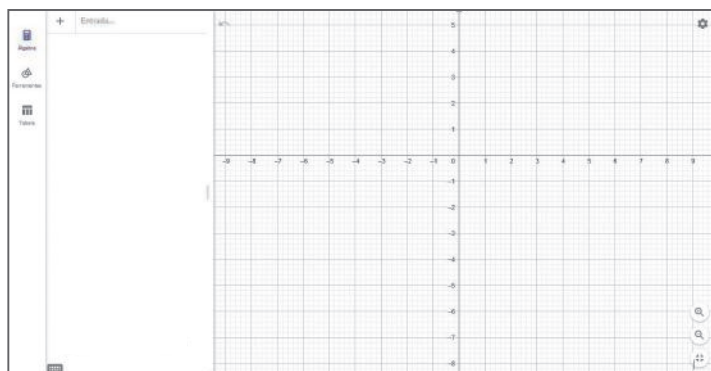
Faça as atividades no caderno.

Construção do gráfico de uma função

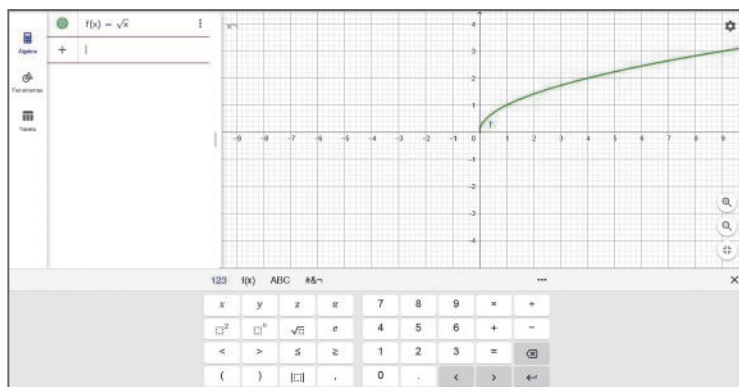
As imagens não estão representadas em proporção.

Agora, vamos utilizar o GeoGebra para construir o gráfico de uma função. Para isso, siga o passo a passo.

1º) Acesse o GeoGebra e selecione a opção "Calculadora Gráfica"; o *software* irá exibir uma tela parecida com esta imagem.

Reprodução/GeoGebra.org

Tela inicial do GeoGebra após o 1º passo.

2º) No campo "Entrada", deve ser digitada a fórmula de uma função. Para isso, clique no ícone para exibir o teclado.

Vamos começar com a função raiz quadrada. Portanto, registre $f(x) = \sqrt{x}$ no campo "Entrada" utilizando o teclado do *software*. Automaticamente, será exibido o gráfico da função.

Tela do GeoGebra após o 2º passo.

Orientações didáticas

Matemática e tecnologias

Na BNCC

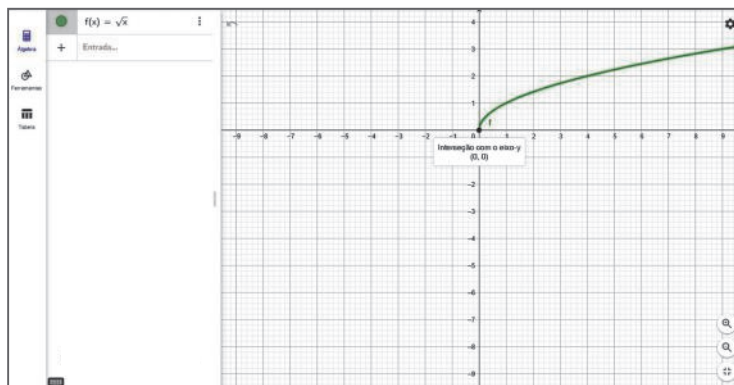
Esta seção favorece o desenvolvimento do TCT *Ciência e Tecnologia* e mobiliza com maior ênfase a **CG07** e a **CEMAT05** ao fazer o uso do GeoGebra para a construção de gráficos.

O GeoGebra permite a construção de gráficos e até mesmo de atividades interativas ou pré-elaboradas pelo professor, ou, ainda, sugeridas pela comunidade GeoGebra que as disponibiliza de forma gratuita para uso educacional. O passo a passo do exemplo proposto no Livro do Estudante trabalha de forma direta a TCT *Ciência e Tecnologia*, a **CG07** e a **CEMAT05** ao ampliar a cultura digital dos estudantes.

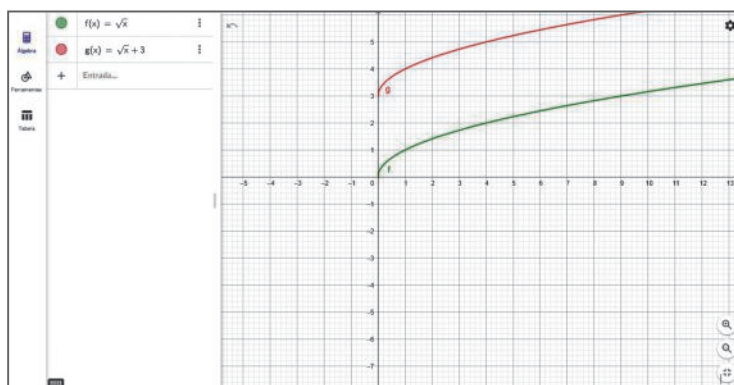
Orientações didáticas

Matemática e tecnologias

Se possível, realize o passo a passo na sala de aula com os estudantes fazendo o uso do GeoGebra e solucione possíveis dúvidas que possam surgir. Verifique também se algum estudante apresenta algum tipo de dificuldade com o uso de tecnologias e ajude-o.

3º) Ao clicar sobre o ponto de interseção do gráfico com os eixos, ele aparece destacado.

Tela do GeoGebra após o 3º passo.

Para melhor visualização do gráfico, clique com o botão esquerdo do *mouse* sobre a tela para mover a construção e utilize os botões de “ampliar” ou “reduzir” apresentados na tela do GeoGebra.

4º) Para construir o gráfico de uma ou mais funções no mesmo sistema cartesiano, digite no campo “Entrada” a fórmula da função desejada. Vamos verificar como ficaria o gráfico da função anterior ao adicionar ou subtrair a constante 3. Para isso, registre $g(x) = \sqrt{x} + 3$.

Tela do GeoGebra após o 4º passo.

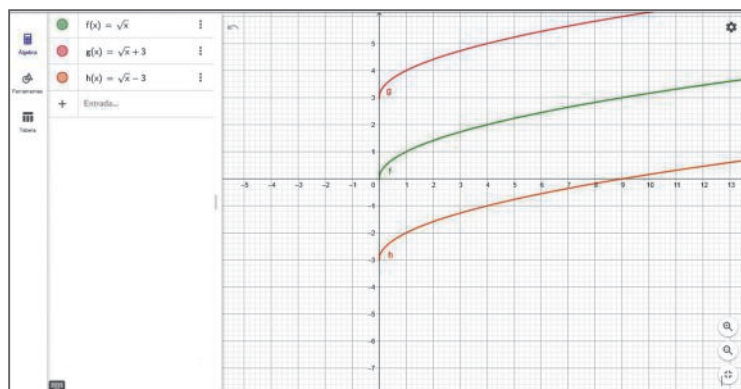
Ao adicionar 3 a uma função, obtemos outra função cujo gráfico coincide com o da primeira deslocado 3 unidades para cima.

Proposta para o professor

O trabalho a seguir, apesar de ter sido executado com estudantes do Ensino Médio, traz considerações importantes sobre a utilização do GeoGebra como ferramenta de ensino.

SOUSA, Reilson Matos de. *O uso do GeoGebra no Ensino da função quadrática*. 2014. 76 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém, 2014. Disponível em: https://repositorio.ufopa.edu.br/jspui/bitstream/123456789/404/1/Disserta%C3%A7%C3%A3o_OUsoDoGeogebra.pdf. Acesso em: 25 jun. 2022.

5º) A seguir, registre $h(x) = \sqrt{x} - 3$ no campo "Entrada".

Reprodução/GeoGebra.org

Tela do GeoGebra após o 5º passo.

> Ao subtrair 3 de uma função, obtemos outra função cujo gráfico coincide com o da primeira deslocado 3 unidades para baixo.

Utilize o GeoGebra para realizar as seguintes atividades. As construções encontram-se na seção *Resoluções* deste Manual.

1. Construa o gráfico da função dada pela fórmula $f(x) = 2x + 4$ e destaque os pontos de interseção com os eixos y e x. Quais são as coordenadas desses pontos? (0, 4) e (−2, 0).
2. Construa o gráfico da função dada pela fórmula $f(x) = -0{,}5x + 2{,}2$ e destaque os pontos de interseção com os eixos y e x. Quais são as coordenadas desses pontos? (0; 2,2) e (4,4; 0).
3. Construa os gráficos de $f(x) = 1{,}5x + 3$, $g(x) = 0{,}8x - 2$ e $h(x) = 0{,}5x$ e cite duas características comuns a essas funções. Exemplos de resposta: Os gráficos são retas; as funções são crescentes.
4. Construa os gráficos de $f(x) = -x + 4$, $g(x) = -0{,}25x - 2$ e $h(x) = -2x + 2$ e cite duas características comuns a essas funções. Exemplos de resposta: Os gráficos são retas; as funções são decrescentes.
5. Construa em um mesmo sistema cartesiano os gráficos de $f(x) = 0{,}6x$, $g(x) = 2 \cdot f(x)$ e $h(x) = \frac{f(x)}{2}$. Depois, escreva no caderno um pequeno texto sobre o que você notou quando se multiplica ou se divide uma função por uma constante não nula.
Ao multiplicar por 2, as ordenadas dos pontos do gráfico dobram; ao dividir por 2, ficam reduzidas à metade.
6. Escolha cinco funções lineares e represente-as graficamente em um mesmo sistema cartesiano.
Resposta pessoal. Espera-se que formem funções do tipo $y = ax$, com a tomando 5 valores diferentes.
7. Construa o gráfico da função dada pela fórmula $y = x^2$ e, depois, escreva no caderno um texto explicando o que acontece com ele ao adicionar uma constante, como em $y = x^2 + 2$, em $y = x^2 + 5$ e em $y = x^2 - 3$.
O gráfico desloca-se, respectivamente, 2 unidades para cima, 5 unidades para cima e 3 unidades para baixo.
8. Construa em um mesmo sistema cartesiano os gráficos das funções dadas pelas fórmulas $f(x) = 3x - 6$ e $g(x) = -2x + 6$ e destaque o valor de x para que se tenha $f(x) = g(x)$. $x = 2{,}4$

Orientações didáticas

Matemática e tecnologias

O passo a passo conta com instruções diretas para a construção de um gráfico para determinada função. Assim, as atividades propostas consistem em utilizar as mesmas estratégias para as construções. Se possível, proponha aos estudantes que trabalhem a resolução das atividades em conjunto. Lembre-se de que o GeoGebra possui também um aplicativo para *smartphones*, no qual é possível também realizar a atividade de forma plenamente satisfatória.

Orientações didáticas

Na Unidade

Na BNCC

Esta seção favorece o desenvolvimento das habilidades exploradas ao longo de toda a Unidade e mobiliza com maior ênfase a **CEMAT02**, a **CEMAT06** e a **CG02** ao propor a resolução de atividades diversas por meio de diferentes contextos e estratégias de resolução.

Esta seção traz atividades dos principais conteúdos abordados na Unidade que podem ser utilizadas como ferramentas de avaliação. Proponha a resolução das atividades individualmente. Acompanhe os estudantes durante a realização delas e registre avanços e dificuldades para, ao final, propor novas atividades para remediação coletiva ou individual de defasagens, conforme cada caso.

A seguir, listamos algumas sugestões e estratégias para remediação.

Na atividade **1**, por meio da tabela fornecida na atividade, os estudantes precisam determinar a função que determina qualquer número *n* da sequência dos números naturais ímpares.

A atividade **2** fornece uma função $f(x)$, a qual os estudantes deverão utilizar para determinar o valor de $f(m + n) - f(m - n)$. Caso haja dificuldades, para remediação, solicite aos estudantes que retomem a leitura dos enunciados e, se preciso, leiam novamente o conteúdo do capítulo **19**.

A atividade **3** trabalha com o plano cartesiano. Nesta atividade, os estudantes devem ser capazes de determinar coordenadas dos pontos representados no plano cartesianos, calcular a medida da distância entre dois pontos e determinar as coordenadas do ponto médio de segmentos. No caso de dúvidas, proponha atividades de remediação, para serem feitas em duplas.

Na atividade **4** os estudantes devem considerar as informações do quadro para conseguir determinar a expressão algébrica que permite calcular o nível da água em função do número de bolas. Dessa forma, caso haja necessidade, retome com eles a leitura do enunciado do problema.

Na Unidade

1. Na tabela, $f(n)$ representa o n-ésimo número na sequência dos naturais ímpares.

n	1	2	3	...
$f(n)$	1	3	5	...

Então, para todo n: Alternativa **d**.

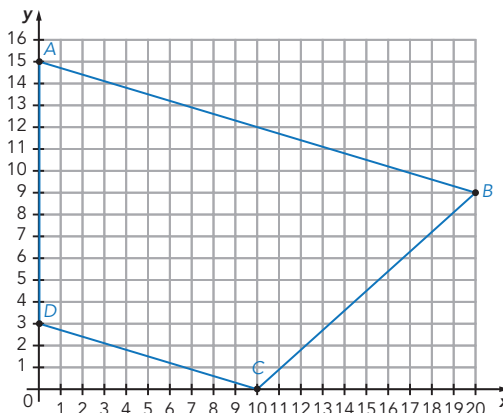
a) $f(n) = 2n + 1$. **b)** $f(n) = n + 1$. **c)** $f(n) = 3n - 2$. **d)** $f(n) = 2n - 1$.

2. (FGV-SP) Seja a função $f(x) = x^2$.

O valor de $f(m + n) - f(m - n)$ é: Alternativa **c**.

a) $2m^2 + 2n^2$. **b)** $2n^2$. **c)** $4mn$. **d)** $2m^2$.

3. Considerando o sistema cartesiano a seguir, faça o que se pede no caderno.

Banco de imagens/ Arquivo da editora

a) Determine as coordenadas dos pontos A, B, C e D. $A(0, 15)$; $B(20, 9)$; $C(10, 0)$; $D(0, 3)$.

b) Calcule as medidas de distância AB, BC, CD e DA. $AB = 2\sqrt{109}$; $BC = \sqrt{181}$; $CD = \sqrt{109}$; $DA = 12$.

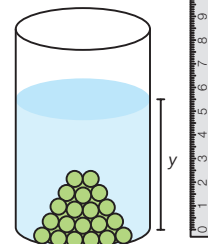
c) Determine as coordenadas dos pontos médios dos segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$. $M_{\overline{AB}}(10, 12)$; $M_{\overline{BC}}(15; 4,5)$; $M_{\overline{CD}}(5; 1,5)$; $M_{\overline{DA}}(0, 9)$.

4. (Enem) Um experimento consiste em colocar certa quantidade de bolas de vidro idênticas em um copo com água até certo nível e medir o nível da água, conforme ilustrado na figura ao lado. Como resultado do experimento, concluiu-se que o nível da água é função do número de bolas de vidro que são colocadas dentro do copo.

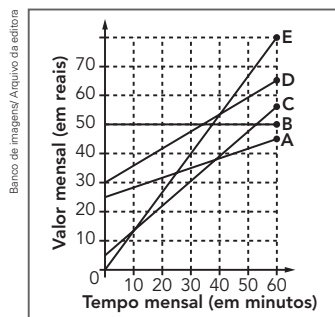
O quadro a seguir mostra alguns resultados do experimento realizado.

Banco de imagens/ Arquivo da editora

Número de bolas (x)	Nível da água (y)
5	6,35 cm
10	6,70 cm
15	7,05 cm

Disponível em: www.penta.ufrgs.br. Acesso em: 13 jan. 2009 (adaptado).

Qual a expressão algébrica que permite calcular o nível da água (y) em função do número de bolas (x)? Alternativa **e**.

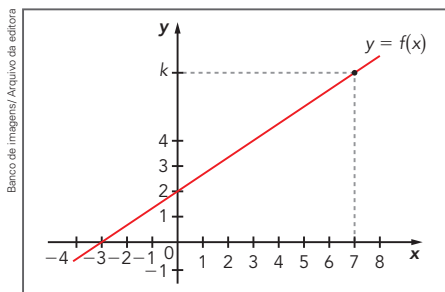
a) $y = 30x$
b) $y = 25x + 20,2$
c) $y = 1,27x$
d) $y = 0,7x$
e) $y = 0,07x + 6$

5. **(Enem)** No Brasil há várias operadoras e planos de telefonia celular. Uma pessoa recebeu 5 propostas (**A**, **B**, **C**, **D** e **E**) de planos telefônicos. O valor mensal de cada plano está em função do tempo mensal das chamadas, conforme o gráfico a seguir.

Essa pessoa pretende gastar exatamente R\$ 30,00 por mês com telefone. Dos planos telefônicos apresentados, qual é o mais vantajoso, em tempo de chamada, para o gasto previsto para essa pessoa? Alternativa **c**.

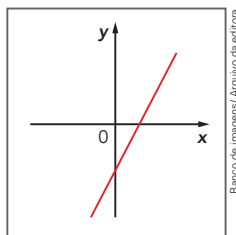
a) A
b) B
c) C
d) D
e) E

6. O gráfico da função dada pela fórmula $y = 5x + 10$ forma com os eixos coordenados um triângulo de medida de área: Alternativa **a**.

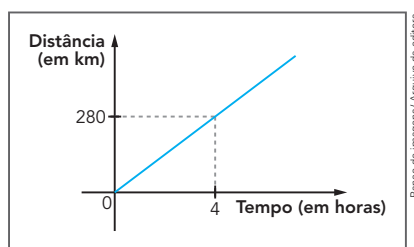
a) 10
b) 20
c) 25
d) 50

7. Na figura a seguir temos o gráfico de uma função afim $y = f(x)$.

Qual é o valor da ordenada k? Alternativa **c**.

a) 6
b) $6\frac{1}{3}$
c) $6\frac{2}{3}$
d) 7

8. O gráfico a seguir é de uma função afim, do tipo $f(x) = ax + b$.

Podemos afirmar que: Alternativa **b**.

a) $a > 0$ e $b > 0$
b) $a > 0$ e $b < 0$
c) $a < 0$ e $b > 0$
d) $a < 0$ e $b < 0$

9. **(Saresp)** O gráfico desenhado [a seguir] representa uma relação entre a grandeza tempo (em horas) e distância percorrida (em quilômetros).

As grandezas distância e tempo, nesse caso, são: Alternativa **c**.

a) não proporcionais.
b) inversamente proporcionais.
c) diretamente proporcionais.
d) proporcionais, mas a primeira ao quadrado da segunda.

10. Qual das fórmulas a seguir define uma função $y = f(x)$ em que y é inversamente proporcional a x? Alternativa **c**.

a) $y = x - 2$
b) $y = 2 - x$
c) $y = \frac{2}{x}$
d) $y = \frac{x}{2}$

Orientações didáticas

Na Unidade

Na atividade **5**, para determinar o plano mais vantajoso, os estudantes devem fazer uma interpretação do gráfico que traz todos os planos recebidos pela pessoa. Nele, os estudantes devem encontrar o valor de R\$ 30,00 mensais e identificar qual das propostas permite ao cliente mais tempo em minutos por mês. Caso haja dificuldade, como remediação, proponha uma releitura do enunciado feita em pequenos grupos.

A atividade **6** exige dos estudantes alguns conhecimentos adquiridos nesta Unidade, na construção do gráfico da função dada, e em Unidades anteriores, com o cálculo da medida da área do triângulo formado pela intersecção do gráfico da função com os eixos coordenados. Para aqueles que apresentarem dificuldade, como remediação, proponha que resolvam, com um colega, atividades específicas de cada conceito.

A atividade **7** exige que os estudantes usem as definições de função afim para que determinem a função do gráfico apresentado, e, então, encontrem o valor da ordenada k.

A atividade **8** trabalha com os coeficientes a e b da função afim. Os estudantes devem analisar o gráfico apresentado para determinar que $a > 0$ e $b < 0$.

Na atividade **9**, os estudantes devem fazer uma analise do gráfico que representa a relação tempo e distância percorrida e verificar que se trata de uma função crescente, em que as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais, ou seja, quanto mais o tempo aumenta, maior será a distância percorrida.

A atividade **10** retoma o tema inversamente proporcional. Os estudantes devem se atentar que y é inversamente proporcional a x para determinar qual das fórmulas define a função desejada.

Como remediação para as atividades de **7** a **10**, proponha uma releitura do enunciado feita em pequenos grupos.

Outras dificuldades diferentes das listadas podem surgir; por isso, é importante o monitoramento individual e contínuo dos estudantes.

Respostas

UNIDADE 1

Capítulo 1

Atividades

1. a) Números racionais.

b) Números racionais.

c) Número irracional.

2. Todos.

3. Racionais: **a**, **c**, **d**, **e**; irracionais: **b**, **f**.

4. $a < b < c < e < f < d$

5. Três: 0,272272227...; 0,4567891011...; −7,02468101214...

6. Resposta pessoal.

7. A: 0,02; B: −0,05; C: 0,13.

9. A: 1,85; B: 2,05; C: 2,125; D: 2,275; E: 2,45.

10. b) 10

c) $\sqrt{10}$

12. a) Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

c) Resposta pessoal.

d) Resposta pessoal.

13. a) Aproximadamente 3,65.

b) Aproximadamente 0,83.

14. a) Aproximadamente 2,828.

b) Aproximadamente 1,118.

c) Aproximadamente −1,710.

d) Aproximadamente 3,162.

15. a) $\frac{49}{12}$

b) $\frac{452}{81}$

c) $\frac{25}{22}$

16. a) 3,14; 3,1416.

b) Aproximadamente 251,2 m.

c) Aproximadamente 12 700 km (aproximadamente 127 centenas de quilômetros).

17. $2 + 2\sqrt{5}$ cm; aproximadamente 6,47 cm.

18. Resposta pessoal.

Capítulo 2

Atividades

1. a) 10 000; 10^4.

b) 100 000 000; 10^8.

c) 0,1; 10^{-1}.

d) 0,01; 10^{-3}.

2. a) 51 algarismos.

b) 51 casas decimais.

3. a) 1 000

b) 100 000

c) 0,01

d) 0,000001

e) −0,001

f) 1

4. a) A Rússia, pois a medida de área do seu território é $1{,}125 \cdot 10^7$ km², que é a maior medida de área se comparada com a dos outros países do BRICS.

b) China.

5. 1 rupia valia 10^{-1} renmimbis.

6. 317 anos.

7. a) 125; −64; 0,0625.

b) 36; −243; 0,008.

c) 0,81; 0,001; 2,25.

d) 10; 1; 1.

e) 1; $-\frac{1}{5}$; 0.

f) $\frac{1}{64}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{64}{9}$.

8. a) 2,25 m²

b) 3,375 m³

c) 3 375 L

9. a) 5

b) −3

c) 6

d) 3

e) 2

f) 0

10. $x = 2$

11. Índia.

12. a) $3{,}65 \cdot 10^5$

b) $1{,}1 \cdot 10^{13}$

c) $2{,}5 \cdot 10^{-1}$

d) $1{,}0 \cdot 10^{-6}$

13. Índia; $6{,}25 \cdot 10^{-1}$.

14. b) A molécula de açúcar.

c) 19 vezes.

15. a) $6 \cdot 10^{24}$ moléculas.

b) $2 \cdot 10^{22}$ moléculas.

c) 300 vezes.

d) $6{,}02 \cdot 10^{24}$ moléculas.

16. a) a^8

b) 10^5

c) $(2 \cdot a \cdot b)^3$

d) $\left(\frac{2}{3}\right)^5$

e) a^{10}

f) 2^2

17. a) 10^{22}

b) $1{,}98 \cdot 10^{-8}$

c) $9{,}84 \cdot 10^3$

d) $5 \cdot 10^4$

18. $1{,}03 \cdot 10^{25}$ moléculas.

19. O maior é $5^{3^2} = 5^9$, pois $(5^3)^2 = 5^6$.

20. a) 2^5

b) 2^{12}

21. Entre A e B.

22. 1 milhão de reais.

23. Resposta pessoal.

24. a) 12 000 000 m

b) 0,001025 m

25. a) $1{,}5 \cdot 10^8$ km

b) 150 Gm

26. 30 yg

27. Micro.

28. Bilhões.

29. Aproximadamente 1%.

30. Resposta pessoal.

31. Resposta pessoal.

32. 14 fileiras.

33. 3 cm, 6 cm, 9 cm.

34. a) Certo.

b) Errado.

c) Errado.

d) Certo.

e) Certo.

f) Errado.

35. a) $x = \pm 6$

b) $x = \pm 12$

c) Não existe raiz real.

d) $x = 0$

e) $x = \pm\sqrt{5}$

f) $x = \pm\sqrt{2}$

36. a) 2

b) 24

c) $\frac{7}{5}$

d) 1

37. $\frac{1}{5}$

38. a) 1,414; 1,732; 2,236; 2,449; 2,646; 3,162.

b) Aproximadamente 5,47. Aproximadamente 0,72.

39. Resposta pessoal.

40. 8 cm

41. a) $\frac{20}{3}$ e 6.

b) A aritmética.

42. Média aritmética: 13,5; média geométrica: 10; a média aritmética é maior.

43. a) 9

b) 9

c) 10

44. a) 10 000

b) -512

c) 3

d) 6

45. 4 m

46. 2 cm

47. a) $x = \pm 10$

b) $x = 0$

c) $x = -1$

d) $x = 5$

e) Não tem raiz real.

f) $x = -\frac{1}{4}$

48. a) 7

b) 5

c) 16

d) 125

e) $\frac{1}{3}$

f) 64

g) 3

h) 10

i) 4

49. a) $\sqrt[5]{10^4}$

b) $\sqrt{10}$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{10^2}}$ ou $\sqrt[3]{10^{-2}}$.

d) $\sqrt[3]{5}$

e) $\sqrt{8^7}$

f) $\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ ou $\sqrt[4]{2^{-1}}$.

g) $\sqrt{6}$

h) $\sqrt[4]{3}$

50. a) 0,3

b) 32

c) -1

d) $\frac{28}{9}$

51. No cálculo **II**, a passagem $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{-3}$ está errada.

52. a) $2^{\frac{4}{3}}$

b) $9^{\frac{5}{6}}$

c) $5^{-\frac{1}{2}}$

d) $10^{\frac{3}{2}}$

53. a) 81

b) 1 000

c) 8

d) 25

54. a) 12

b) 30

c) 4

d) 30

55. a) $6\sqrt{2}$

b) $3\sqrt{2}$

c) $2\sqrt{5}$

d) $4\sqrt{3}$

56. a) 36

b) 18

c) $3\sqrt{2}$

d) • $12\sqrt{2}$

• $6 + 6\sqrt{2}$; $6 + 3\sqrt{2}$.

• $12 + 6\sqrt{2}$; $6 + 9\sqrt{2}$.

• $12 + 6\sqrt{2}$

57. a) *ADE* e *CDE*: $3 + \sqrt{3}$; *ABE* e *BCE*: $\sqrt{6} + 2\sqrt{3}$; *ABD* e *CBD*: $3 + \sqrt{3} + \sqrt{6}$; *ACD*: $4 + 2\sqrt{3}$ e *ABC*: $2\sqrt{6} + 2\sqrt{3}$.

b) *ABCD*: $4 + 2\sqrt{6}$.

c) *AEDCB* e *ADECB*: $3 + \sqrt{3} + 2\sqrt{6}$ e *AEBCD* e *ABECD*: $4 + 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$.

58. a) 10

b) 3

59. a) $\sqrt{10}$

b) $\sqrt{30}$

c) 6

d) 4

60. a) $\sqrt{5}$

b) $\sqrt{\frac{1}{2}}$

c) $\sqrt{3}$

d) 3

61. a) 9

b) 32

c) 25

d) 9

e) $4\sqrt{2}$

f) 1 250

62. $80 \cdot \sqrt{10}$ cm³

63. a) $\sqrt[4]{6}$

b) $\sqrt[6]{10}$

c) $\sqrt[8]{2}$

Na Unidade

1. d

2. c

3. c

4. c

5. b

6. c

7. b

8. c

9. d

10. c

UNIDADE 2

Capítulo 3

Atividades

1. a) $x^2 + 2x + 1$

b) $x^2 + 12x + 36$

c) $a^2 + 20a + 100$

d) $y^2 + 8y + 16$

e) $x^2 + 2\sqrt{2}x + 2$

f) $9x^2 + 6x + 1$

2. a) $4a^2 + 20a + 25$

b) $a^2 + 4ab + 4b^2$

c) $25a^2 + 30ab + 9b^2$

d) $x^4 + 8x^2 + 16$

e) $a^4 + 2a^2 + 1$

f) $4a^2 + 40a + 100$

4. a) $(20 + 1)^2 = 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 1 + 1^2 = 400 + 40 + 1 = 441$

b) $(30 + 2)^2 = 30^2 + 2 \cdot 30 \cdot 2 + 2^2 = 900 + 120 + 4 = 1\,024$

c) $(60 + 1)^2 = 60^2 + 2 \cdot 60 \cdot 1 + 1^2 = 3\,600 + 120 + 1 = 3\,721$

d) $(90 + 5)^2 = 90^2 + 2 \cdot 90 \cdot 5 + 5^2 = 8\,100 + 900 + 25 = 9\,025$

5. Bruno; 1 764.

6. a) $7 + 4\sqrt{3}$

b) $30 + 10\sqrt{5}$

7. a) $18 + 8\sqrt{2}$

b) $32 + 10\sqrt{7}$

c) $17 + 12\sqrt{2}$

d) $5 + 2\sqrt{6}$

8. a) $4x + 4$

b) $5x^2 - 5$

9. a) $-2x^2 + 2x + 4$

b) $a^4 + b^4$

c) 0

10. $(a - b)^2 = (a^2 + b^2) - (2ab) = a^2 - 2ab + b^2$

11. a) $x^2 - 2ax + a^2$

b) $x^2 - 20x + 100$

c) $9x^2 - 6x + 1$

d) $25a^2 - 30ab + 9b^2$

e) $n^2 - 2n\sqrt{6} + 6$

f) $4n^2 - 4n + 1$

12. a) $9a^2b^2 - 6ab + 1$

b) $x^4 - 2x^2y^2 + y^4$

c) $x^2 - x + \frac{1}{4}$

d) $4 - 2\sqrt{3}$

e) $7 - 2\sqrt{10}$

13. a) $(20 - 1)^2 = 361$

b) $(50 - 1)^2 = 2\,401$

c) $(50 - 2)^2 = 2\,304$

d) $(100 - 2)^2 = 9\,604$

e) $(30 - 1)^2 = 841$

f) $(40 - 1)^2 = 1\,521$

g) $(40 - 2)^2 = 1\,444$

h) $(100 - 1)^2 = 9\,801$

14. a) $4ab$

b) $2x^2 + 2$

c) $4x$

15. $\left(6 - 4\sqrt{2}\right)\ \text{m}^2$

16. a) $(a + b) \cdot (a - b)$

b) $a^2 - b^2$

c) $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

17. **A**: $x^2 - 1$; $a^2 - 25$; $9b^2 - 49$; $x^4 - 4$.

B: $x^2 - 6$; $a^2 - 14$; $9x^2 - 4y^2$; $4a^2b^2 - 9c^2$.

C: 1; 20; 97; −17.

18. a) 1 599

b) 2 496

c) 3 591

d) 8 099

e) 8 096

f) 9 991

g) 39 900

h) 89 999

19. a) $4x^2$

b) a^8

c) $16x^2$

d) c^4

e) -5

20. a) Não.

b) Não.

c) Sim.

d) Não.

e) Sim.

f) Não.

g) Sim.

h) Sim.

21. $(x + 10)^2$

22. $(2x + 9y) \cdot (2x - 9y)$

23. Resposta pessoal.

25. Aproximadamente 28,4 cm.

26. a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ou aproximadamente 0,58.

b) $\frac{5\sqrt{6}}{6}$ ou aproximadamente 2,04.

c) $\frac{\sqrt{5}}{10}$ ou aproximadamente 0,22.

d) $\frac{3\sqrt{2}}{20}$ ou aproximadamente 0,21.

27. a) $2\sqrt{3}$

b) $\frac{3\sqrt{10}}{4}$

28. a) $\sqrt{2} - 1$

b) Aproximadamente 0,414.

29. a) $\frac{4 - \sqrt{2}}{14}$

b) $2\sqrt{5} - 4$

c) $\frac{3 + \sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{-7 - \sqrt{2}}{47}$

30. 8 aves por metro quadrado aproximadamente.

Capítulo 4

Atividades

1. a) $a \cdot (x + y)$

b) $p \cdot (a + b + c)$

c) $x \cdot (1 + y - yz)$

d) $2a \cdot (b + 4)$

e) $x \cdot (x + 1)$

f) $x^2 \cdot (x^2 - x + 1)$

g) $2x \cdot (4x^2 - 3x + 2)$

2. a) $\frac{2b}{3c}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{a + b}{2}$

d) $3x^2$

3. a) $x + 2$

b) $x = 22$

4. Resposta pessoal.

5. a) $(x + a) \cdot (x + b)$

b) $(m + n) \cdot (p - q)$

6. a) $\frac{a}{a + b}$

b) $\frac{1}{x - 1}$

7. $x^2 + ax + bx + ab = (x + a) \cdot (x + b)$

8. $(x + y) \cdot (x - y)$; $(x + y) \cdot (x - y)$.

9. a) $(x + 6) \cdot (x - 6)$

b) $(n + 1) \cdot (n - 1)$

c) $(10x + 1) \cdot (10x - 1)$

d) $(a + 2b) \cdot (a - 2b)$

e) $(3x + 4a) \cdot (3x - 4a)$

f) $(ab + cd) \cdot (ab - cd)$

g) $(a^2 + b^2) \cdot (a + b) \cdot (a - b)$

h) $(x^2 + 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$

10. a) $(x + 1) \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)$

b) $(x - y) \cdot (x + y + 1)$

11. $\frac{x + 1}{x - 2}$; 1,003.

12. a) $a^2 + 2ab + b^2$

b) $a + b$

c) $(a + b)^2$

13. a) $(x + 2)^2$

b) $(n - 5)^2$

c) $(3a + b)^2$

d) $(2x - 3y)^2$

14. a) $x \cdot (x - 1)^2$

b) $x^2 \cdot (x + 1)^2$

15. 0,998

16. 256 m^2

Na Unidade

1. d

2. b

3. b

4. a

5. c

6. c

7. c

8. b

9. c

10. d

UNIDADE 3

Capítulo 5

Atividades

1. a) -2

b) 0 ou 4.

2. 0 ou -3.

3. 2 anos.

4. a) 5

b) 2; -2 ou 5.

5. 0 ou 2.

6. 0; $\frac{1}{2}$ ou $-\frac{1}{2}$.

7. 10 de fevereiro.

8. 13 anos.

9. a) $x^2 - 7x + 12 = 0$

b) $x^2 + 7x + 10 = 0$

c) $x^2 + 3x - 18 = 0$

d) $x^2 - 3x - 18 = 0$

10. a) $(x - 3) \cdot (x - 1)$

b) $(y + 8) \cdot (y + 3)$

c) $(a - 9) \cdot (a + 5)$

d) $(t - 4) \cdot (t + 3)$

e) $(y + 5) \cdot (y + 6)$

f) $(x - 4) \cdot (x - 6)$

g) $(x - 6) \cdot (x - 1)$

h) $(y + 5) \cdot (y - 1)$

i) $(a + 2) \cdot (a - 1)$

j) $(t + 8) \cdot (t - 1)$

11. a) $\frac{x + 2}{x - 4}$

b) $\frac{x + 4}{x + 2}$

12. a) -8 ou -4.

b) 8 ou 4.

c) -8 ou 4.

d) 8 ou -4.

e) 3 ou -1.

f) 4 ou -4.

13. 12 cm

Capítulo 6

Atividades

1. a) -2 ou 2.

b) -3 ou 3.

c) $-\frac{5}{2}$ ou $\frac{5}{2}$.

d) $-\frac{4}{3}$ ou $\frac{4}{3}$.

e) $-\sqrt{2}$ ou $\sqrt{2}$.

f) $-\sqrt{\frac{5}{2}}$ ou $\sqrt{\frac{5}{2}}$.

g) Não tem raízes reais.

h) $-\sqrt{\frac{2}{3}}$ ou $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

i) -5 ou 5.

j) Não tem raízes reais.

2. 15 cm

3. Aproximadamente 1,58 m; resposta pessoal.

4. a) 0 ou 2.

b) 0 ou -5.

c) 0 ou $\frac{1}{3}$.

d) 0 ou $-\frac{1}{2}$.

5. a) 3 e 2.

b) -3 e -5.

c) -5 e 2.

d) 1 e $\sqrt{2}$.

6. 6 m ou 8 m.

7. a) 2 cm

b) 6 cm

8. 8 estudantes.

9. a) $-3 \pm \sqrt{7}$

b) $5 \pm \sqrt{11}$

c) $1 \pm \sqrt{3}$

d) $-2 \pm 2\sqrt{5}$

10. $2 + \sqrt{2}$ e $2 - \sqrt{2}$.

12. a) $-\frac{1}{2}$ ou -3.

b) $\frac{9 \pm \sqrt{5}}{2}$

13. a) Tornam-se iguais (é a mesma raiz).

b) 4

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

14. Nenhuma.

15. 7 anos.

16. a) 0,8 m^2

b) 2,1 m

c) $x^2 - 2{,}1x + 0{,}8 = 0$

d) Sim, $a = 1{,}6$ m e $b = 0{,}5$ m.

17. Resposta pessoal.

18. 6 e 7 ou -6 e -7.

19. a) $s = -\frac{5}{3}; p = \frac{2}{3}$.

b) $s = -\frac{11}{2}; p = -\frac{1}{2}$.

c) $s = \frac{7}{9}; p = \frac{1}{9}$.

d) $s = \frac{5}{7}; p = -\frac{3}{7}$.

20. $1^{-10} = 1$

21. a) $\frac{2}{5}$

b) $-\frac{3}{5}$

c) $-\frac{2}{3}$

d) $\frac{4}{5}$

Na Unidade

1. b

2. d

3. b

4. c

5. d

6. d

7. c

8. c

9. d

10. c

UNIDADE 4

Capítulo 7

Atividades

1. a) 4,9 hab./km^2

b) 1106,2 hab./km^2

c) 4 514,3 hab./km^2

d) 197,9 hab./km^2

e) Curitiba, pois a densidade demográfica dessa cidade é maior do que a das outras.

2. 100 km/h

3. Não; justificativa pessoal.

4. Embalagem 3.

5. a) 18 quilates.

b) $\frac{3}{4}$

c) 75%

d) 24 quilates.

6. 1 : 62 500 000

7. a) 3,68 cm

b) Resposta pessoal.

8. Pedro: 450 m^2; Paulo: 270 m^2.

9. Mônica: R$ 8.400,00; Renato: R$ 12.600,00; Roberto: R$ 16.800,00.

10. Resposta pessoal.

11. Lara: 180 peças; Marco: 220 peças.

13. R$ 64,00

14. 0; 20; 40; 60; 80; 100.

15. a) 1 500 mL

b) $y = \frac{1}{250} \cdot x$

16. a) Não, pois a razão entre salário e vendas não é constante.

c) R$ 3.000,00

17. Resposta pessoal.

18. a) 24 dias.

b) 20 dias.

c) 16 dias.

19. 2 km

20. 400 azulejos.

21. 1 500 livros.

22. 9 dias.

23. 8 pessoas.

24. 30 metros.

25. Resposta pessoal.

26. Resposta pessoal.

27. R$ 87,10

Capítulo 8

Atividades

1. R$ 3.478,80

2. R$ 3.806,25

3. R$ 6.720,00

4. R$ 10.800,00

5. R$ 152,52; R$ 3.432,52.

6. R$ 1.148,00; R$ 20.348,00.

7. R$ 536,25

8. a) R$ 43,20

b) R$ 763,20

9. a) Sim, porque ela vai receber R$ 14.245,00.

b) Resposta pessoal.

10. Resposta pessoal.

11. a) 1,10

b) R$ 6,60

12. a) 1,05

b) R$ 945,00

13. a) 0,90

b) R$ 108,00

14. a) 0,70

b) R$ 2.520,00

15. a) 1,05

b) 5%

16. a) 0,86

b) 14%

17. Aproximadamente 2 845 milhares.

18. a) 60 480 veículos.

b) 28%

19. a) R$ 35.200,00

b) R$ 39.424,00, abaixo do valor de 2019; em 1,44%.

20. 87,4%

21. 21%

22. 10%

23. R$ 4.233,60

24. Resposta pessoal.

25. 1,771561; aproximadamente 77,16%.

Na Unidade

1. c

2. a

3. a

4. c

5. b

6. b

7. a

8. c

UNIDADE 5

Capítulo 9

Atividades

1. $\frac{1}{2}$

2. a) $\frac{5}{8}$

b) $\frac{8}{5}$

c) $\frac{8}{15}$

d) 3

3. a) 1

b) $\frac{1}{3}$

c) 1

d) 3

e) $\frac{1}{4}$

4. 4 cm

5. $x = 14$ cm e $y = 21$ cm.

6. 42 m

7. 30 m; 45 m.

8. 1

9. a) $x = 6$

b) $x = 7$

c) $x = 6$

d) $x = \frac{21}{2}$

10. 32 metros.

11. a) $x = 12$; $y = 9$.

b) $x = 6$; $y = 15$.

14. Resposta pessoal.

15. a) 12

b) 12

16. $x = 15$; $y = 16$.

17. 42

18. Resposta pessoal.

Capítulo 10

Atividades

1. a) 13; 19.

b) 11; 14.

c) 15

d) 12

e) 10

f) 9; 18.

4. 255 mm (25,5 cm).

5. 48 km

6. a) 2; 3; 7 e 10.

b) Nenhum.

c) 6

d) 9

e) 12

7. Lado homólogo a $\overline{AB}$ é $\overline{A_1B_1}$; a $\overline{BC}$ é $\overline{B_1C_1}$; e a $\overline{CA}$ é $\overline{C_1A_1}$.

Lado homólogo a $\overline{AB}$ é $\overline{C_2B_2}$; a $\overline{BC}$ é $\overline{B_2A_2}$; e a $\overline{CA}$ é $\overline{A_2C_2}$.

Lado homólogo a $\overline{AB}$ é $\overline{A_3C_3}$; a $\overline{BC}$ é $\overline{C_3B_3}$; e a $\overline{CA}$ é $\overline{B_3A_3}$.

Lado homólogo a $\overline{AB}$ é $\overline{B_4A_4}$; a $\overline{BC}$ é $\overline{A_4C_4}$; e a $\overline{CA}$ é $\overline{C_4B_4}$.

Lado homólogo a $\overline{AB}$ é $\overline{MO}$; a $\overline{BC}$ é $\overline{ON}$; e a $\overline{CA}$ é $\overline{NM}$.

Lado homólogo a $\overline{AB}$ é $\overline{N_1O_1}$; a $\overline{BC}$ é $\overline{O_1M_1}$; e a $\overline{CA}$ é $\overline{M_1N_1}$.

8. a) $x = 12$

b) $x = \frac{5}{2}$; $\alpha = 105°$.

c) $x = 4$; $y = 3$.

9. 21 cm, 15 cm e 12 cm.

10. a) 21; 18; 15.

b) $\frac{3}{2}$

12. 12 cm, 27 cm e 24 cm.

13. a) $\frac{1}{2}$; $x = 10$ e $y = 12$.

b) 2; $x = 12$; $y = 6$.

14. 3 cm, 6 cm e 7 cm.

15. $x = 3$ cm; $y = 4$ cm.

16. $x = 10$ cm

17. $x = 6$

18. a) 9 metros.

b) 30 metros a partir da margem.

19. $x = 8$ m; $y = 10$ m.

20. 10 m; 12 m; 14 m.

21. 63 m

22. A ~ H (LAL); B ~ C (LLL); D ~ E (LLL); F ~ G (AA).

23. a) $x = 2$; $y = 3$.

b) $x = 8$; $y = 10$.

24. 45 m

25. a) $x = 9$; $y = \frac{32}{3}$.

b) $x = 7$; $y = 10$.

26. $x = \frac{63}{5}$ cm

27. $x = \frac{45}{4}$; $y = \frac{75}{4}$.

28. $x = 14$ cm; $y = 8$ cm.

29. a) $x = \frac{8}{3}$; $y = \frac{4}{3}$.

b) $x = 6$; $y = 10$.

30. 16 cm

31. $x = \frac{8}{3}$ cm

32. a) $x = 6$; $y = \frac{10}{3}$.

b) $x = \frac{15}{2}$; $y = 5$.

33. $\frac{12}{5}$

34. 4,8 cm

35. $x = \frac{15}{2}$; $y = \frac{17}{2}$.

36. $\frac{2}{3}$

38. 18 cm^2

Capítulo 11

Atividades

1. a) m; a; $m \cdot n$; $a \cdot h$; a^2.

b) n^2; m^2; a^2; h^2; $m \cdot n$; n^2; m^2.

c) t^2; n^2; $(r + s) \cdot t$; m^2; m^2; n^2; $(r + s)^2$.

2. a) 6

b) 3

c) 2

d) 8

3. a) 5

b) 12

c) 4

d) 2

4. 2 m

5. a) $2\sqrt{29}$

b) 9

c) $\frac{52}{5}$

d) 6

6. 2 m

7. 20 m e 15 m.

8. 13 cm

9. Sim; teorema de Pitágoras.

10. 1,82 m ou 182 cm.

11. $2\sqrt{3}$ cm

12. 28 cm

13. a) 6

b) 2

14. Resposta pessoal.

15. $3\sqrt{2}$ cm

16. $(\sqrt{5} - 1)r$

17. $2(\sqrt{2} + 1)$ cm

18. Resposta pessoal.

19. a) $\sqrt{21}$

b) 12,30

20. Resposta pessoal.

21. 20 cm

22. 13 cm

23. a) $5\sqrt{3}$

b) $4\sqrt{3}$

24. $4\sqrt{3}$ cm

25. 12

26. a) 5

b) 10

27. 75 cm e 72 cm.

28. 17 cm

29. $4\sqrt{3}$

30. $2\sqrt{Rr}$

31. 30 cm

32. 2 m

Na Unidade

1. d

2. d

3. c

4. a

5. d

6. a

7. a

8. d

9. d

10. a

UNIDADE 6

Capítulo 12

Atividades

2. a) Aproximadamente 34%

3. a) 12%; 20%; 16%; 40%; 8%; 4%.

4. a) 50%

b) Não, porque não sabemos qual foi a produção em números absolutos de cada estado.

6. b) 45%

7. c) 32%

9. a) Resposta pessoal.

b) Resposta pessoal.

c) Resposta pessoal.

10. a) Safra 2004/2005; 1,362 milhão de toneladas.

b) 256 mil toneladas; aproximadamente 28,6%.

11. a) 2005 a 2008; 2009 a 2011; 2016 a 2018.

b) Resposta pessoal.

12. a) 4 : 9; 7 : 8.

13. De 60 a 69 anos.

14. Resposta pessoal.

15. Na rede privada.

16. Resposta pessoal.

17. 5,29 bilhões de dólares.

18. a) 2000

b) O espaçamento entre os anos não está proporcional no gráfico. Por exemplo, de 1980 a 1990 decorrem 10 anos; de 2018 a 2020, apenas 2 anos.

c) Resposta pessoal.

19. Resposta pessoal.

20. a) Resposta pessoal.

b) A medida da altura da primeira barra deveria ser $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$ da medida da altura da segunda. No gráfico do jornal X essa razão é menor do que $\frac{2}{3}$; então o candidato B está sendo favorecido. No gráfico do jornal Y, essa razão é maior do que $\frac{2}{3}$; então o candidato A está sendo favorecido.

21. No gráfico **I**, não haveria prejuízo visual se a legenda estivesse correta, pois as cores estão trocadas. Já no gráfico **II**, o candidato A tem prejuízo visual.

22. a) Respostas pessoais.

b) Respostas pessoais.

23. A comparação realizada no pictograma não apresenta precisão, pois ele não segue uma escala, e pode causar erro de interpretação do leitor.

24. a) O time D é o que apresenta a maior torcida.

b) Os times A e B parecem apresentar as menores torcidas, porém não é possível afirmar qual tem a menor torcida em valores absolutos.

c) Não é possível ter precisão sobre a quantidade de torcedores de cada time, pois o pictograma não apresenta uma escala bem definida e pode induzir a erro quando comparamos as dimensões.

25. 8 cm

26. 2,2; 2; 2.

27. R$ 3.332,00; R$ 3.300,00; R$ 3.300,00.

28. 155 min

29. Na abscissa 137 min.

30. a) Não, pois as porcentagens ultrapassam 100%.

b) Violação por negligência.

31. 7,0

32. a) 152 cm; 6 cm.

b) 156 cm; 6 cm.

33. a) Diretor de *marketing*.

b) Em todas as categorias.

34. a) $Q_1 = 4$; $Q_2 = 5$ e $Q_3 = 7$.

b) Média: aproximadamente 5,45; mediana: 5; a média.

c) 8 e 3.

35. a) 18; 1º quartil.

b) 33 anos.

Capítulo 13

Atividades

1. a) 14 modos.

b) 24 modos.

c) 48 modos.

d) 24 modos.

2. a) 11 modos.

b) 30 modos.

3. a) 9 pares.

b) 6 pares.

4. 36 pares.

5. 8 sequências.

6. a) 45 segmentos de reta.

b) 16 pontos.

7. $S = \{1, 2, 3, ..., 10\}$; 10 resultados possíveis.

$A = \{9, 10\}$

$B = \{2, 3, 5, 7\}$

8. $S = \{$domingo, segunda-feira, terça-feira, ..., sábado$\}$; 7 resultados possíveis.

$A = \{$domingo$\}$

9. $S = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), ..., (4, 3)\}$; 12 resultados possíveis.

$A = \{(1, 4), (2, 4), (3, 4), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$

$B = \{(1, 3), (3, 1)\}$

$C = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)\}$

$D = \{(1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2)\}$

10. $P(A) = \frac{1}{5}$; $P(B) = \frac{2}{5}$.

11. $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{6}$; $P(C) = \frac{1}{2}$; $P(D) = \frac{1}{3}$.

12. a) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

b) $\frac{1}{6}$

c) 1

d) $\frac{2}{3}$

13. a) $\frac{3}{10}$

b) $\frac{3}{5}$

14. a) $\frac{1}{7}$

b) $\frac{2}{7}$

15. b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{2}$

16. 98,4%

17. 4%

18. $\frac{7}{8}$

19. a) $\frac{7}{8}$

b) $\frac{7}{8}$

20. a) 30%

b) 100%

21. 10%; 60%.

22. a) $\frac{1}{4}$ (ou 25%)

b) 25%

23. a) $\frac{37}{115}$

b) $\frac{18}{115}$

c) $\frac{13}{23}$

24. $\frac{3}{11}$

25. a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{3}{11}$

c) $\frac{1}{11}$

26. a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{9}$

27. $\frac{1}{4}$

28. a) $P(A) = \frac{1}{3}$; $P(B) = \frac{1}{3}$; $P(A \cap B) = \frac{1}{9}$.

b) $P(A) = \frac{1}{3}$; $P(B) = \frac{1}{3}$; $P(A \cap B) = 0$.

Na Unidade

1. d
2. c
3. e
4. a) 85%; 9%; 5%; 1%.
5. d
6. d
7. c

UNIDADE 7

Capítulo 14

Atividades

1. a) 32 m^2
   b) 120 m^2
2. 25 cm^2
3. $25\sqrt{3}$ m^2
4. $12\sqrt{3}$ m^2
5. 60 m^2
6. $(8 + 4\sqrt{2})$ cm
7. 15 cm^2
8. a) $\frac{bh}{8}, \frac{bh}{4}, \frac{3bh}{8}$ e $\frac{bh}{2}$.
   b) $\frac{1}{4}$

Capítulo 15

Atividades

1. 7 diagonais; 35 diagonais.
2. 27 diagonais.
3. 11 lados.
4. 1 800°
5. 1 260°
6. Heptágono.
7. 720°
8. 110°, 120° e 130°.
9. a) $3\sqrt{3}$ m
   b) $2\sqrt{3}$ m
   c) $\sqrt{3}$ m
   d) $\sqrt{3}$ m
10. a) $8\sqrt{2}$ m
    b) $4\sqrt{2}$ m
    c) 4 m
    d) 4 m
11. a) 12 m
    b) 6 m
    c) $3\sqrt{3}$ m
    d) $6\sqrt{3}$ m
    e) $3\sqrt{3}$ m
12. Icoságono.
13. 36 lados.
14. 9 lados.
15. a) 2
    b) 3
16. $12\sqrt{3}$ cm^2
17. 64 cm
18. $24\sqrt{3}$ cm^2
19. 36°
20. Lado: $r\sqrt{3}$; $r\sqrt{2}$; r;
    apótema: $\frac{r}{2}$; $\frac{r\sqrt{2}}{2}$; $\frac{r\sqrt{3}}{2}$.
21. 10 cm; 5 cm.
22. 1 m
23. $10\sqrt{2}$ cm
24. 100 cm^2
25. Aproximadamente 1 753 m.
26. Aproximadamente 1 039 m^2.
27. 8 cm
28. a) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm
    b) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm
    c) $5\sqrt{3}$ cm
29. a) Não é possível, pois, ao juntar os vértices de 3 pentágonos, a soma das medidas dos ângulos internos é 324 graus, faltando 36 graus para uma volta completa, o que significa que haveria um "buraco", não formando um ladrilhamento.
    b) Exemplo pessoal.
35. a) Decágono regular com lado medindo 2.

Na Unidade

1. a
2. a
3. c
4. b
5. c
6. c
7. a
8. b

UNIDADE 8

Capítulo 16

Atividades

1. Aproximadamente 753,6 m.
2. Aproximadamente 152,9 cm.
3. Aproximadamente 31 847 voltas.
4. Aproximadamente 10 m.
5. Aproximadamente 491,2 m.
6. Aproximadamente 6,28 cm; aproximadamente 8,85 cm.
7. Aproximadamente 3,14 cm.
8. Aproximadamente 16 077 m.
9. Aproximadamente 10 350 voltas no total; 94 voltas por minuto.
10. 125 cm
11. Aproximadamente 6,5 cm.
12. a) Aproximadamente 141,3 cm.
    b) Aproximadamente 94,2 cm.
    c) Aproximadamente 113,04 cm.
13. Aproximadamente 19,89 m.
14. 240°
15. a) Aproximadamente 25,12 cm.
    b) Aproximadamente 94,2 cm.
16. Aproximadamente 39,81 m.

17. 2, independentemente da medida (de comprimento ou angular).

18. Aproximadamente 150,72 cm.

19. Aproximadamente 2,29 m.

20. a) $x = 32°$

b) $x = 120°$; $y = 60°$.

c) $\text{med}(\widehat{AB}) = 80°$

d) $x = 10°$

e) $x = 25°$

f) $x = 44°$

21. 85°

22. 92°

23. $x = y = z = t = 60°$

24. a) $125\sqrt{3}$ cm³

25. a) 18 arestas, 12 vértices e 8 faces.

b) $540\sqrt{3}$ cm³

26. $300 \cdot \pi$ cm³

27. Aproximadamente 28 L.

28. a) Aproximadamente 14 cm.

b) Exemplo pessoal.

29. 5 galões.

30. a) $5^2 = 3^2 + 4^2$

b) 36 m³

c) 84 m²

31. O cilindro.

32. Resposta pessoal.

33. Resposta pessoal.

Capítulo 17

Atividades

1. A - I; B - III; C - II.

Na Unidade

1. b

2. c

3. e

4. d

5. e

6. Aproximadamente 31,4 m.

7. $\frac{90}{\pi}$ cm

8. a) $4 \cdot \pi$ m²

b) $7 \cdot \pi$ m²

c) 30 m²

d) 18 m²

9. A - III; B - I; C - II.

10. e

UNIDADE 9

Capítulo 18

Atividades

2. a) $A(5, 2)$; $B(2, 5)$; $C(-2, 5)$; $D(-5, 2)$; $E(-5, -2)$; $F(-2, -5)$; $G(2, -5)$; $H(5, -2)$.

b) $A(6, 0)$; $B(5, 3)$; $C(3, 5)$; $D(0, 6)$; $E(-3, 5)$; $F(-5, 3)$; $G(-6, 0)$; $H(-5, -3)$; $I(-3, -5)$; $J(0, -6)$; $K(3, -5)$; $L(5, -3)$.

3. a) G

b) H

c) D

d) E

4. a) D

b) K

c) B

d) L

e) F

f) B, C, D, E, F.

g) H, I, J, K, L.

h) A, G.

5. Não. Porque $AB = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ e $BC = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$, logo $AB \neq BC$.

6. 9; 9; 5; 13.

7. Aproximadamente 11,3.

8. $\hat{A}$

9. $M(-0{,}5; 5{,}5)$

10. a) $M(5, 2)$

b) $M(0, 0)$

11. $M_{\overline{AB}}\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$; $M_{\overline{BC}}\left(3, -\frac{9}{2}\right)$; $M_{\overline{CA}}\left(-\frac{3}{2}, -2\right)$.

12. $AM = 4\sqrt{2}$

13. a) $M\left(-1, -\frac{3}{2}\right)$

b) $10 + 10\sqrt{2}$

c) 35

14. 10

15. 26

Capítulo 19

Atividades

1. a) 55 pontos; 70 pontos; $5x$ pontos.

b) Sim; a cada x corresponde uma única nota y.

2. a) R$ 1,25; R$ 4,50.

b) R$ 0,21

3. a) 200 km

b) $y = 100x$

c) 150 km

4. a) Nº de acertadores: 8; 20.
Prêmio de cada um (em R$): 600,00; 240,00; 30,00.

b) Do número de acertadores.

5. c) $2\sqrt{5}$ cm

6. a) $y = -4$

b) $x = -45$

c) $y = \frac{10 - 2x}{5}$

d) $x = \frac{10 - 5y}{2}$

7. a) $y = 6$ ou $y = -6$.

b) Não. Existe valor de x (por exemplo, 8) para o qual correspondem 2 valores de y.

8. a) Sim. A cada x corresponde um único y.

b) Não. Quando $y = 9$, por exemplo, temos $x = 3$ ou $x = -3$. Então, há valor de y para o qual correspondem 2 valores de x.

9. a) 11 km

b) 96 km; 1 h.

c) 100 min (ou 1 h 40 min).

10. a) 1,5 L

b) 1 L; representa a medida de volume (que é 1 L) quando a medida da altura da água é 10 cm.

c) 20 cm

11. a) -1

b) $\frac{5}{8}$

c) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

d) Não existe.

12. a) Aproximadamente 6,9 L.

b) 36π cm³; representa a medida de volume (que é 36π cm³) da bola de raio medindo 3 cm.

15. a) $y = \frac{10 + x}{x}$, para $x > 0$.

16. a) 20 kg

b) 40 kg

c) 60 kg

d) 70 kg

17. a) R$ 64,10

b) $y = 25 + 3{,}91x$

d) 22 m³

18. Aproximadamente R$ 18,45.

19. a) $y = 6\,000 - 100x$, para $0 \leqslant x \leqslant 60$.

b) Resposta pessoal.

20. a) $y = 100\,000 + 50x$

b) R$ 600.000,00

c) R$ 110,00

21. a) $y = 25 - 2x$, para $0 \leqslant x \leqslant 12{,}5$.

c) -2 cm/xícara

22. a) R$ 353,60

b) $y = 6{,}80x$, para $0 \leqslant x \leqslant 52$.

d) 6,80 R$/L

23. a) $y = 0{,}68x$

c) Sim; a razão $\frac{\text{custo}}{\text{medida da distância}}$ é constante.

24. a) **I**, **II**, **V**, **VI**.

b) **III**, **IV**.

c) **II**, **V**.

25. a) $d = (0{,}12)x$

b) $v = (0{,}88)x$

c) Sim.

26. **III**; **IV**.

27. a) Crescente; y é diretamente proporcional a x.

b) Decrescente; n é inversamente proporcional a p.

28. a) Crescente.

b) Decrescente.

c) Em **a**, y é diretamente proporcional a x. Em **b**, y é inversamente proporcional a n.

29. R$ 3.600,00

30. R$ 3.200,00

Na Unidade

1. d

2. c

3. a) $A(0, 15)$; $B(20, 9)$; $C(10, 0)$; $D(0, 3)$.

b) $AB = 2\sqrt{109}$; $BC = \sqrt{181}$; $CD = \sqrt{109}$; $DA = 12$.

c) $M_{\overline{AB}}(10, 12)$; $M_{\overline{BC}}(15; 4{,}5)$; $M_{\overline{CD}}(5; 1{,}5)$; $M_{\overline{DA}}(0, 9)$.

4. e

5. c

6. a

7. c

8. b

9. c

10. c

Lista de siglas

Embraer-SP: Empresa Brasileira de Aeronáutica S.A. (São Paulo)
Enem: Exame Nacional do Ensino Médio
ESPM-SP: Escola Superior de Propaganda e Marketing (São Paulo)
Etec-SP: Escola Técnica Estadual (São Paulo)
ETFs-RJ: Escolas Técnicas Federais (Rio de Janeiro)
Fatec-SP: Faculdade de Tecnologia (São Paulo)
FEI-SP: Centro Universitário da Faculdade de Engenharia Industrial (São Paulo)
FGV-SP: Fundação Getulio Vargas (São Paulo)
Obmep: Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas
PUCC-SP: Pontifícia Universidade Católica de Campinas (São Paulo)
PUC-MG: Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
Udesc: Universidade do Estado de Santa Catarina
UFMG: Universidade Federal de Minas Gerais
UFPR: Universidade Federal do Paraná
Unesp-SP: Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (São Paulo)
Unicamp-SP: Universidade Estadual de Campinas (São Paulo)
Unisa-SP: Universidade Santo Amaro (São Paulo)
Vunesp: Fundação para o Vestibular da Unesp

Referências bibliográficas comentadas

BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria euclidiana plana*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

Essa obra proporciona uma visão ampliada do que se ensina em sala de aula e foi referencial bibliográfico para a elaboração desta coleção. A Geometria euclidiana plana é apresentada de um ponto de vista que extrapola os tópicos do Ensino Básico, além de permitir a familiaridade com fatos geométricos por meio de teoria, exercícios, problemas e comentários.

BERLINGHOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. *A Matemática através dos tempos*: um guia fácil e prático para professores e entusiastas. Tradução: Elza F. Gomide e Helena Castro. São Paulo: Edgard Blucher, 2008.

Nesse livro constam informações históricas, consultadas para a elaboração desta coleção, de pessoas e eventos importantes na construção da Matemática que conhecemos atualmente, além de propostas de projetos que aplicam, entre outros contextos, a História da Matemática.

BORBA, Marcelo de Carvalho *et al*. *Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática*: sala de aula e internet em movimento. Belo Horizonte: Autêntica, 2014. (Coleção Tendências em Educação Matemática).

Referência para o uso de tecnologias proposto nesta coleção, a obra apresenta uma visão sobre a aplicação de tecnologias em Educação Matemática, exemplificando questões teóricas e propostas de atividades, bem como dissertando sobre o presente e o futuro da sala de aula de Matemática.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. *História da Matemática*. Tradução: Helena Castro. São Paulo: Edgard Blucher, 2012.

Esse livro é uma referência de consulta sobre a História da Matemática, e nele são apresentados e explicados aspectos dela, considerando-se a ordem cronológica e o local dos acontecimentos, desde a origem do conceito de número até os desenvolvimentos matemáticos do século XX. Ao longo dos capítulos, são apresentadas definições matemáticas importantes e as pessoas que trabalharam nelas. Esse livro foi referência para a elaboração de textos e problemas históricos abordados nesta coleção.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 25 abr. 2022.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE). Além disso, a BNCC estabelece conhecimentos, competências e habilidades que se espera que todos os estudantes desenvolvam ao longo de cada ano da escolaridade básica, e, por isso, todos os volumes desta coleção foram desenvolvidos buscando atender a tais requisitos.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 25 abr. 2022.

BRASIL. Ministério da Educação. *Temas Contemporâneos Transversais na BNCC*: proposta de práticas de implementação. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/guia_pratico_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 25 abr. 2022.

Esses dois documentos visam esclarecer a inserção dos Temas Contemporâneos Transversais (TCTs) aos currículos escolares e nortear as contextualizações dos conteúdos ensinados por meio de temas do interesse dos estudantes e têm relevância para o desenvolvimento deles como cidadãos. Tais temas estão presentes em diversas propostas ao longo dos volumes desta coleção, e esses documentos nortearam as propostas.

BUSSAB, Wilton de O.; MORETTIN, Pedro A. *Estatística básica*. São Paulo: Saraiva, 2017.

Essa obra, destinada a cursos básicos de Probabilidade e Estatística no Ensino Superior, trata da análise de dados unidimensionais e bidimensionais com atenção especial para métodos gráficos, conceitos básicos de probabilidade e variáveis aleatórias, bem como os tópicos principais da inferência estatística. A obra foi consultada na elaboração dos conceitos relacionados à Probabilidade e à Estatística em todos os volumes desta coleção.

EUCLIDES. *Os Elementos*. Tradução: Irineu Bicudo. São Paulo: Unesp, 2009.

Essa edição é a primeira tradução completa para o português feita do texto grego do livro original de Euclides. Nela, além de definições, postulados e axiomas, demonstram-se proposições envolvendo a Geometria euclidiana, o desenho geométrico e a Aritmética. Tais conceituações geométricas foram referências para a elaboração dos conteúdos e demonstrações geométricos ao longo desta coleção.

EVES, Howard. *Introdução à História da Matemática*. Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2004.

Além da narrativa histórica, que abarca a História da Matemática desde a Antiguidade até os tempos modernos, o livro adota recursos pedagógicos, como exercícios ao fim de cada capítulo. Alguns capítulos são introduzidos por panoramas culturais da época e, como um todo, a obra foi fonte de consulta para a elaboração de textos históricos para esta coleção.

GUNDLACH, Bernard H. *Números e numerais*. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1998. (Tópicos de História da Matemática para Uso em Sala de Aula).

Referência para a educação, bem como para a elaboração desta coleção, essa obra apresenta temas relacionados ao desenvolvimento dos números ao longo da história, desde as primeiras ideias de contagem até a abstração para o registro dos números com algarismos.

MARCONI, Marina de Andrade; LAKATOS, Eva Maria. *Fundamentos de metodologia científica*. 9. ed. Rio de Janeiro: GEN; Atlas, 2021.

Por meio de exemplificações dos mais variados conceitos, essa obra se torna um instrumento confiável para o pesquisador iniciante ou experiente ao apresentar linguagem de fácil compreensão e esclarecer procedimentos adequados a uma pesquisa científica. A obra serviu de base para as sugestões de metodologias de pesquisa apresentadas nesta coleção.

MENDENHALL, William. *Probabilidade e Estatística*. Rio de Janeiro: Campos, 1985. v. 1.

No capítulo 1, a obra procura identificar a natureza da Estatística, os objetivos e o modo pelo qual ela exerce uma função importante nas ciências, na indústria e particularmente em nossa vida diária. Nesta coleção, a utilizamos como fonte de consulta para a elaboração de conceitos e atividades didáticas.

MORGADO, Augusto César; CARVALHO; João Bosco Pitombeira de; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; FERNANDEZ, Pedro. *Análise combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro: SBM, 2020.

Essa obra traz demonstrações de como resolver questões sem recorrer necessariamente a fórmulas e prepara os leitores para serem criativos ao buscarem soluções para problemas combinatórios, o que serviu de referencial para propostas didáticas nesta coleção. Além disso, traz técnicas que auxiliam na resolução de problemas envolvendo combinação de possibilidades e probabilidade.

MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo; ZANI, Sheila Cristina. *Progressões e matemática financeira*. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

Essa obra apresenta o passo a passo para calcular taxa de juros e termos de progressões, além de construir planilhas eletrônicas para usá-las como calculadoras financeiras. Propostas relacionadas a essas temáticas, nesta coleção, foram desenvolvidas com referencial nessa obra.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

A obra analisa métodos criativos de resolução de problemas, revela as quatro etapas básicas da resolução de qualquer problema e sugere maneiras de trabalhar os problemas em sala de aula. Foi utilizada como fonte de consulta para estabelecer as metodologias relacionadas à resolução de problemas nesta coleção.

ROQUE, Tatiana. *História da Matemática*: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

Nessa obra, a autora apresenta fatos da História da Matemática em ordem cronológica, sob um olhar crítico, analisando mitos e lendas perpetuados por muito tempo. A obra começa abordando conceitos matemáticos desenvolvidos na Mesopotâmia, passando por Egito, Grécia, França e Alemanha. É o primeiro livro brasileiro a retratar a História da Matemática e foi utilizado como referência no desenvolvimento desta coleção.

VIEIRA, S. *Estatística básica*. São Paulo: Cengage Learning, 2012.

Essa obra mostra que a Estatística é uma ferramenta auxiliar para a tomada de decisão, pensamento que é presente nos volumes desta coleção. Os conceitos estatísticos são demonstrados na obra de maneira informal, como uma tentativa de explicar a lógica sem demonstrações matemáticas. Para incrementar a aprendizagem, são apresentados exemplos e exercícios com respostas comentadas.

WING, J. Pensamento computacional: um conjunto de atitudes e habilidades que todos, não só cientistas da computação, ficaram ansiosos para aprender e usar. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, v. 9, n. 2, p. 1-10, maio/ago. 2016. Disponível em: https://periodicos.utfpr.edu.br/rbect/article/view/4711/pdf. Acesso em: 20 abr. 2022.

O pensamento computacional é uma habilidade fundamental para todos, pois envolve, com destaque, a resolução de problemas e a identificação de padrões, que são processos inerentes à atividade matemática e a situações cotidianas. Na publicação original, que foi traduzida para o português e consultada para a elaboração desta coleção, a autora disserta sobre os estudos relacionados ao pensamento computacional.

HINO NACIONAL

Letra: Joaquim Osório Duque Estrada

Música: Francisco Manuel da Silva

Ouviram do Ipiranga as margens plácidas
De um povo heroico o brado retumbante,
E o sol da liberdade, em raios fúlgidos,
Brilhou no céu da Pátria nesse instante.

Se o penhor dessa igualdade
Conseguimos conquistar com braço forte,
Em teu seio, ó liberdade,
Desafia o nosso peito a própria morte!

Ó Pátria amada,
Idolatrada,
Salve! Salve!

Brasil, um sonho intenso, um raio vívido
De amor e de esperança à terra desce,
Se em teu formoso céu, risonho e límpido,
A imagem do Cruzeiro resplandece.

Gigante pela própria natureza,
És belo, és forte, impávido colosso,
E o teu futuro espelha essa grandeza.

Terra adorada,
Entre outras mil,
És tu, Brasil,
Ó Pátria amada!

Dos filhos deste solo és mãe gentil,
Pátria amada,
Brasil!

Deitado eternamente em berço esplêndido,
Ao som do mar e à luz do céu profundo,
Fulguras, ó Brasil, florão da América,
Iluminado ao sol do Novo Mundo!

Do que a terra mais garrida
Teus risonhos, lindos campos têm mais flores;
"Nossos bosques têm mais vida",
"Nossa vida" no teu seio "mais amores".

Ó Pátria amada,
Idolatrada,
Salve! Salve!

Brasil, de amor eterno seja símbolo
O lábaro que ostentas estrelado,
E diga o verde-louro desta flâmula
- Paz no futuro e glória no passado.

Mas, se ergues da justiça a clava forte,
Verás que um filho teu não foge à luta,
Nem teme, quem te adora, a própria morte.

Terra adorada,
Entre outras mil,
És tu, Brasil,
Ó Pátria amada!

Dos filhos deste solo és mãe gentil,
Pátria amada,
Brasil!

MULHERES DA HISTÓRIA, ESPELHOS DO FUTURO

Caros alunos brasileiros,
Venho aqui lhes contar
A história destas mulheres
Que defenderam seu lar.
Moças que foram à luta
Em versos vou apresentar.

Maria Leopoldina,
Esposa do imperador,
Pressionou seu marido
A ser cooperador
Na relação entre Brasil
E Portugal divisor.

Conhecem Maria Quitéria?
Forte e independente!
Entrou nas forças armadas,
Vestindo-se de homem valente,
Soldado Medeiros se fez
Conhecida do tenente.

Primeira mulher brasileira
Nas forças armadas a entrar,
Fiel heroína da pátria,
Antes, a seu pai foi desafiar,
Para sem medo ingressar na luta
E seu país ajudar.

Teve também na Bahia,
Cujo cargo de abadessa exerceu,
Irmã Joana de Jesus,
Que o convento da Lapa defendeu,
Impedindo que os soldados lá entrassem.
E por isso ela morreu.

Maria Felipa, marisqueira...
Pescou os portugueses sedentos.
Escrava de corpo,
Mas não de mente,
Liderou um grande grupo
Por uma Bahia independente.

Bela negra, capoeirista
De Itaparica, nação.
Seduzia os portugueses
E surrava-os de cansanção.
Queimou o que Portugal tinha
Ali de embarcação.

A luz que outrora brilhou,
Das ativistas aqui lembradas,
Resplandeceu no Brasil República
Em mulheres arretadas,
Que da mesma sina sofreram
De sangue, nas lutas eternizadas.

São tantas almas sedentas
Que buscam por mais justiça,
Não deixam a morte vencer.
Sem cavalos, gritam: é vida!
Mulheres inspiradoras
Que morrem por outras vidas.

Bebiam os camponeses
O amargo mel da cana,
Sem direito e liberdade.
Contra isso, sem engano,
Lutou e morreu Margarida Alves,
Uma flor paraibana.

Da mesma má sorte e sina
No céu verde cintilava
Irmã Dorothy, uma estrela
Que na terra brilhava.
Defendeu muitos sem-terra
E a reforma agrária.

Dando continuidade
Na busca pela igualdade,
Doutora Zilda apostou
Numa nova sociedade:
Salvou da fome crianças
Na Pastoral Caridade.

É ironia dizer
Justo no Haiti,
Vítima de um terremoto
Que veio lhe atingir.
Mas vivas estão as mulheres
Que ela ajudou a parir.

São incontáveis mulheres
Que merecem nos livros um lugar.
Nunca desanimaram
Nem deixaram de sonhar
Por um Brasil independente.
E no futuro pra sempre,
Em berço esplêndido,
Seu filho repousar.

Letícia Maria Morais
Vencedora Região Nordeste
Escola Estadual 26 de Março - Paraná/RN

Este livro didático é um **bem reutilizável** da escola e deve ser **devolvido em bom estado** ao final do ano para uso de outra pessoa no **próximo** período letivo.

ISBN: 978-65-5766-254-0